Relime Vol. 1, Núm.2, julio, 1998 pp.5-28

Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto

Humberto Jaime de León Pérez[1]

RESUMEN

Este estudio tiene por objetivo analizar los procedimientos de los niños de primaria al estudiar situaciones de reparto. Nuestra expectativa es contribuir a la discusión y planteamiento de preguntas relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en particular sobre los procesos cognitivos de los niños al aprender las fracciones. En él se muestran que hay ciertas regularidades para que los niños se apropien del significado de las fracciones en el contexto de los problemas de reparto, a saber: los niños ignoran las relaciones fraccionarias involucradas en las situaciones problemáticas, luego incorporan de manera implícita las relaciones fraccionarias y finalmente llegan a las fracciones como mediaciones o herramientas que les permiten anticipar la solución a las situaciones problemáticas de reparto.

ABSTRACT

The objetive of this study is to analyze the procedures of primary school children when studying situations of distribution. Our expectation is to contribute to the discussion and posing of questions related to the processes of teaching and learning of mathematics and in particular about the cognitive processes of children when they learn fractions. We show that there are certain regularities so that children appropriate the meaning of fractions in the context of problems of distributions, namely: children ignore the fractional relations that are implied in the problem situations, then they incorporate these relations in an implicit way and finally they arrive at fractions as mediations or tools that allow them guess the solutions to the distribution problem.

1. Objeto de estudio

Tenemos como objetivo analizar los procedimientos de los niños de primaria al resolver situaciones de reparto. La idea que nos guía para estudiar las concepciones de los niños es ponerlos en situación de resolver problemas, pues estamos de acuerdo con Vergnaud que el criterio y la fuente del saber matemático es la resolución de problemas.

Es importante precisar que no entendemos como problema matemático a las actividades que usualmente se aplican en el aula: resolución de cuentas dónde se aplican los algoritmos de las diferentes operaciones aritméticas, o a las situaciones que se presentan de manera estereotipada y donde se establece con anticipación el procedimiento de solución. Al contrario, concebimos que un problema matemático representa un reto o dificultad que no tiene resolución inmediata y que posibilita la búsqueda de procedimientos por parte del alumno a partir de sus conocimientos previos. Esta concepción de problema (Vergnaud, 1983) implica la novedad, tanto en el sentido de una tarea que tiene elementos nuevos que no se comprenden, como en la idea de construir procedimientos o estrategias para la resolución del mismo.

Nuestra expectativa es contribuir a la discusión y planteamiento de preguntas sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en particular sobre los procesos cognitivos de los niños al aprender las fracciones.

2. Justificación

La enseñanza de las fracciones es una de las tareas más difíciles para los maestros de educación primaria. Dicha dificultad se manifiesta en el alto porcentaje de niños que fracasan en aprender

[1] Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav-IPN, México.

este contenido.

Uno de los aspectos que determinan el fracaso, es la pobreza conceptual que se maneja en la práctica escolar. Se sabe que la enseñanza prioriza el significado del fraccionamiento de la unidad así como el dominio en las reglas de cálculo, dejando de lado una gran variedad de situaciones que están vinculadas al significado de las fracciones. Algunos ejemplos de situaciones que no son debidamente aprovechadas en la instrucción son: los problemas de reparto, de comparación, de medición y de transformación de medidas.

Por lo que respecta a las situaciones de reparto, otro elemento que explica el fracaso, es el desconocimiento por parte de los maestros, tanto de los esquemas de conocimiento que necesitan los alumnos para darle significado a las fracciones, como de los modelos de conocimiento implícito de los niños sobre las fracciones. Más aún los docentes plantean a los niños de manera prematura el uso del lenguaje convencional y los algoritmos sin reconocer que se necesitan ciertos esquemas (de partición, de equivalencia, conservación del área, etcétera) para darle sentido al lenguaje simbólico y las reglas de cálculo. Los saberes así aprendidos solo sirven en el contexto escolar y no funcionan como herramientas para resolver problemas.

Por lo que respecta a las situaciones de reparto, investigaciones recientes en didáctica han resaltado la importancia de este contexto para el aprendizaje de las fracciones. Estas situaciones propician actividades de partir uno o varios enteros, identificar unidades divisibles y obtener representaciones distintas pero equivalentes, todo lo cual es básico para la constitución de los diferentes significados de las fracciones (Kieren, 1983). Freudenthal (1994) por su parte afirma que el reparto puede prestarse para que se presenten las dos grandes situaciones que organizan las ideas sobre las fracciones: como fracturantes y comparadoras. Las fracciones como fracturantes se refieren a situaciones donde un todo: "...ha sido o esta siendo rajado, cortado, rebanado, roto, coloreado en partes iguales, o si se experimenta imagina, piensa como si lo fuera". Un ejemplo sería partir un chocolate en cuatro partes iguales y tomar dos de esas partes. Por su parte en el contexto de comparadora, las fracciones sirven para "comparar objetos que se separan uno de otro o que se experimenta, imagina o piensa como si se separaran". Al comparar los pedazos resultantes de diferentes repartos podemos hacer la comparación sin necesidad de hacer materialmente los repartos, podemos expresar la comparación con base a la razón de cada reparto, por ejemplo deducimos que el pedazo resultante de un reparto de 3 entre 2 es mayor que el de 2 entre 4, porque en el primero hay más chocolates que niños y en el segundo hay más niños que chocolates.

Estas características matemáticas de las situaciones de reparto las vuelve relevantes desde un punto de vista didáctico. De hecho en los nuevos planes y programas de estudio (SEP, 1993) se consideran los más recientes trabajos en la matemática educativa sobre las fracciones y se incluye una secuencia de actividades de reparto desde tercero a sexto.

Lo anterior justifica estudios sobre los procedimientos y dificultades de los alumnos al resolver problemas de reparto. Los productos de las investigaciones pueden aportar información que sería pertinente tanto a investigadores en didáctica como a los maestros en servicio. Los docente podrán transformar y enriquecer su práctica de enseñanza si conocen mejor las posibilidades cognitivas de sus alumnos. Por su parte los especialistas en didáctica de las matemáticas pueden derivar ideas para explorar ciertas secuencias didácticas que consideren las posibilidades cognitivas de los alumnos.

3. Marco teórico

El presente estudio se ubica en el conjunto de investigaciones que estudian los procesos de enseñanza y del aprendizaje de los contenidos matemáticos. Esta problemática es compleja y diversa y es estudiada por la didáctica de las matemáticas.

La didáctica de las matemáticas aborda su objeto de estudio, considerando las complejas relaciones que se presentan entre los profesores, los estudiantes, el conocimiento y el medio. Al estudiar esta problemática se han desarrollado cuatro líneas importantes de investigación:

- La cognitiva, desarrollada por Vergnaud (1991a) al estudiar la psicogénesis de los contenidos matemáticos.
- La antropológica, impulsada en un principio por Chevallard (1985) sobre la distancia que hay entre los conocimientos constituidos por los especialistas y los que se realizan en el salón de clase y las razones que la explican.
- La de la teorización sobre las situaciones didácticas, donde los estudios realizados por Brousseau (1987) son una muestra de ellos.
- Las investigaciones centradas en construir, experimentar y analizar situaciones para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el aula, entre las que cabe señalar las desarrolladas en el DIE, por Fuenlabrada, Gálvez y Saiz (1978-1984) y posteriormente por Fuenlabrada y Block de 1985 a la fecha.

De estas cuatro aproximaciones, nuestro estudio se ubica en la línea de la psicogénesis de los contenidos matemáticos, que se fundamenta en la psicología genética de Piaget y en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1991b).

3.1 La psicología genética

Para la psicología genética el conocimiento consiste en actuar sobre los objetos y transformarlos. La transformación del objeto puede ser física y conceptual, y esto último es lo más importante para la psicología genética. Por ejemplo los niños al interactuar con materiales a repartir, transforman los objetos de manera física: los fracturan, pero lo más relevante es que la relación parte-todo se modifica, de ser interpretada con la ayuda de los números enteros se transforma en una cuantificación fraccionaria de la parte en relación al todo.

Algunas teorías de aprendizaje de las matemáticas adoptan la concepción de aprendizaje de la psicología genética, específicamente la idea de que los mecanismos de la equilibración constituyen uno de los factores que explican el aprendizaje de nuevos conocimientos (Piaget, 1978). Para la psicología genética el aprendizaje no se concibe como una acumulación de conocimientos sino como un proceso dónde los saberes previos se reorganizan en los nuevos conocimientos. La reorganización del conocimiento se vuelve necesaria, cuando los esquemas de conocimiento entran en conflicto con otros esquemas de conocimiento o cuando las características del objeto de conocimiento presentan resistencias a ser asimiladas por dichos conocimientos.

Esta teoría del aprendizaje surge fuera del aula, y se ubica en una problemática epistemológica y psicológica, por lo que no considera las especificidades del aprendizaje en el contexto escolar, es decir, no aborda las complejas relaciones entre el alumno, el saber, los docentes y el medio.

A pesar de lo anterior, coincidimos con Castorina (1994), en que los principios epistemológicos de la psicología genética son pertinentes para analizar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de los contenidos escolares. En el entendido de que dicha pertinencia, no significa una aplicación directa de la teoría al campo educativo sino implica transformar el programa de investigación y la creación de nuevas categorías teóricas. Por ejemplo la psicología genética se centró en estudiar la construcción de categorías generales del pensamiento (espacio, tiempo, causalidad, etc.) y los procesos responsables de dicha construcción y no se interesó por el estudio de los contenidos escolares, en cambio la disciplina didáctica (Fuenlabrada, 1991) debe necesariamente estudiar los procesos, conceptos y situaciones que se vinculan a los contenidos escolares, en un intento por diseñar y caracterizar situaciones didácticas que favorezcan la génesis de nuevos conocimientos.

3.2 La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud

Las investigaciones de Vergnaud (1991b) están centradas en analizar las adquisiciones de los contenidos matemáticos. Su objetivo es desarrollar una teoría sobre la construcción de los campos conceptuales.

Para dilucidar los procesos de pensamiento de los sujetos en situación de resolver problemas que implican significados matemáticos Vergnaud (1991a; 253-262) elige como unidad de análisis la categoría de esquema, ésta la concibe como una "totalidad dinámica y organizada" por cuatro elementos:

- Invariantes operatorios. Son los conceptos o preconceptos que permiten reflejar las propiedades cualitativas y cuantitativas de los objetos y los que posibilitan la realización de inferencias o deducciones.
- Cálculos relacionales. Son las inferencias o deducciones que se realizan a partir de los invariantes operatorios.
- Reglas de acción o procedimientos. Se refieren a las reglas de acción que generan el comportamiento observable del sujeto en situación de resolver situaciones problemáticas.
- Predicciones. Son las anticipaciones sobre los efectos de las acciones del sujeto sobre la realidad.

Para Vergnaud el significado de un contenido matemático no es independiente de las situaciones en que se funcionaliza, de los esquemas de acción que se ponen en juego y de los sistemas de significantes (dibujo, diagramas, escritura, etc.) que se utilizan en la solución de problemas. Esta concepción es distinta a la que prevalece en la práctica escolar donde el concepto matemático está relacionado con cierta definición. Desde la perspectiva escolar los contextos y la acción de los niños son independientes del significado, no contribuyen a la construcción de los mismos, son simples apoyos que permiten aplicar la definición que se enseñó previamente.

Descontextualizar de las situaciones la definición de un concepto y bloquear la actividad de los sujetos no permite comprender la compleja dinámica que se da en la formación de los conceptos tanto en el plano histórico, como en el personal.

Vergnaud considera que un concepto está vinculado a una diversidad de situaciones, y a su vez una situación nos remite a varios conceptos, por ejemplo el concepto de fracción esta ligado a varias situaciones:

- Cuando se reparten una o varias unidades a cierto número de personas. Por ejemplo repartir 3 chocolates a 4 personas.
- Cuando se compara una longitud con otra, y una de ellas se considera como unidad de medida. Por ejemplo, el largo de la mesa mide 3/4 de metro, la unidad de medida es el metro, se fractura en cuatro, y tres de esas cuatro partes dan la medida del largo de la mesa.
- Cuando se unen dos medidas fraccionarias. Por ejemplo cuando se pregunta ¿cuánto miden dos alambres si la longitud de uno es 2/3 de metro y del otro 3/4 de metro?

Por otra parte, en lo que se refiere a la relación entre situaciones y conceptos; una que, por ejemplo, exprese relaciones multiplicativas, puede remitir a los conceptos de área, volumen, proporción, fracciones, etc.

Por lo anterior para Vergnaud (1991b) el estudio de los conceptos matemáticos tiene sentido si se analizan sus múltiples relaciones, tanto con las más diversas situaciones como con otros conceptos, por ello propone la noción de campo conceptual.

Para Vergnaud un campo conceptual es un "espacio de problemas". La importancia de la investigación sobre campos conceptuales radica en que los conceptos simples no se constituyen de manera aislada sino en relación con otros conceptos y diferentes esquemas de significantes. El estudio de campos conceptuales desde una orientación psicogenética puede aportar las relaciones, continuidades y discontinuidades que se presentan entre los distintos contenidos matemáticos, ésta información sirve a la didáctica y como dice Halbawachs (1981) es importante para establecer “lo que se puede enseñar, en que orden y con que métodos”.

3.3 Los diferentes significados de las fracciones

Los números fraccionarios son una estructura de una riqueza y complejidad que encuentra aplicaciones en una multiplicidad de contextos: la ciencia, la técnica, el arte y la vida cotidiana. En cada uno de estos contextos las fracciones se presentan con una diversidad de significados. Este estudio se apoya en el análisis y clasificación de Kieren (1980; 1983) sobre los racionales. Este autor, en nuestra opinión, es quien presenta con mayor profundidad y riqueza los diferentes matices de los números fraccionarios.

Kieren afirma que la expresión simbólica a/b puede modelar cuatro significados o ideas matemáticas: medida, cociente, operador multiplicativo y razón, agrega un quinto significado la relación parte-todo, pero señala que éste se puede encontrar presente en los otros cuatro significados, al identificar en cada contexto la unidad y sus partes correspondientes.

El trabajo que aquí se expone está centrado en estudiar los procedimientos de los niños ante situaciones de reparto. Estas situaciones son particularmente importantes porque propician en los niños el desarrollo de las habilidades de subdivisión en partes iguales y de manera exhaustiva. Actividades que permiten cuantificar de manera implícita la fracción resultante de un reparto.

4. Principales preguntas de investigación

Específicamente nos interesa analizar las siguientes actividades de los niños en los problemas de reparto:

- La cuantificación implícita de una parte en relación al todo que se reparte.
- La comprensión de la igualdad entre el total de las partes y el total de los enteros en una situación de reparto.
- El establecimiento de equivalencias y de orden al comparar dos situaciones de reparto.

Las actividades anteriores son importantes porque con base a su organización se construyen las ideas de parte-todo, conmensuración, equivalencia y el aspecto ordinal de los números fraccionarios. La constitución de estos saberes son necesarios para construir posteriormente una interpretación significativa del par de números a/b.

Las preguntas de investigación son las siguientes:

¿Qué procedimientos usan los niños al resolver los problemas de reparto?

¿Qué dificultades encuentran los niños para darle significado a las situaciones de reparto?

¿Qué conocimientos previos se necesitan para darle sentido a los problemas de reparto?

¿Qué procedimientos usan los niños para establecer equivalencias y relaciones de orden al comparar distintos repartos?

¿Qué obstáculos enfrentan los niños para establecer equivalencias y relaciones de orden en la comparación de repartos?

Nuestro objetivo es generar resultados y análisis que contribuyan a la discusión sobre el establecimiento de los momentos y los problemas más pertinentes para la enseñanza de las fracciones en la educación primaria.

5. Metodología

Ya hemos señalado que el objetivo de esta investigación es estudiar las concepciones de los niños sobre las fracciones por medio del análisis de los procedimientos de solución de los niños ante problemas de reparto. Para lograr nuestro objetivo seleccionamos al azar una muestra de 36 niños, 8 por cada grupo de primero a tercero y 4 por grupo de cuarto a sexto.

Para obtener los datos realizamos entrevistas individuales de aproximadamente 45 minutos de duración. Las entrevistas se realizaron por parejas de investigadores, uno actuaba como experimentador y el otro como observador y registrador. Todas las entrevistas fueron registradas manualmente y grabadas con cinta magnetofónica. Se registraron las anticipaciones de cada reparto y los procedimientos efectivos para realizarlo. El protocolo final se formó cotejando el registro con la grabación.

Entrevistamos a niños de una escuela primaria cuya población pertenece a diversos estratos sociales pues entre los padres de los alumnos algunos desempeñan labores de intendencia, administración, docencia e investigación.

Las entrevistas fueron una combinación de estructura fija de preguntas con el empleo del método clínico crítico creado por J. Piaget (1984), el cuál se caracteriza por partir de ciertas hipótesis de investigación y una actitud flexible que permite adaptar las preguntas a las respuestas del sujeto. Otra característica que define al método es ser una exploración de tipo crítico en el sentido de que los razonamientos de los niños se cuestionan con la idea de identificar si se mantienen o se transforman bajo la influencia de las condiciones de la indagación.

A todos los niños se les presentaron tres tipos de problemas:

- De reparto. En esta situación se pide a los niños que repartan equitativa y exhaustivamente cierta cantidad de chocolates entre determinada cantidad de niños. Los chocolates fueron representados por tiras de cartoncillo y los niños por muñecos de plástico.
- De selección del pedazo resultado de un reparto. A partir de un reparto de chocolates (equitativo y exhaustivo) ya realizado, entre cierta cantidad de niños, se pide a los alumnos que seleccionen el pedazo de chocolate que le tocó a cada niño; el pedazo lo seleccionan de cuatro posibles conjuntos de repartos.
- De comparación de repartos. En esta situación los niños comparan los resultados de dos repartos y deciden en cuál reparto le tocó más chocolate a un niño (o menos) o bien si les tocó lo mismo.

6. Principales resultados

6.1 Problemas de reparto

Situación problemática: En esta situación se pide a los niños que repartan equitativa y exhaustivamente cierta cantidad de chocolates entre determinada cantidad de niños. Esta situación problemática involucró a las fracciones 1/3, 3/2, 2/3 y 3/4, es decir estas fracciones aparecen en cada una de las situaciones planteadas como el resultado de cada uno de los repartos correspondientes. Con base en lo anterior se pidió a los alumnos que repartieran: un chocolate entre tres niños, tres chocolates entre dos niños, dos chocolates entre tres niños y tres chocolates entre cuatro niños, de tal manera que al repartir los chocolates a todos los niños involucrados en los repartos les tocara lo mismo y no sobrara chocolate.

La elección de las cuatro fracciones se realizó con la idea de comparar los procedimientos de solución ante las siguientes variaciones en las situaciones de reparto: fracciones con numerador uno (1/3); con numerador mayor que uno (2/3, 3/2 y 3/4); con numerador mayor que el denominador (3/2); con numerador menor que el denominador (1/3, 2/3 y 3/4); con denominador 2 o potencia de 2 (3/2 y 3/4); y con denominador 3 (1/3 y 2/3).

Se usaron tiras de cartoncillo de 10 cm. de largo y 2 cm. de ancho, las cuales representaban los chocolates y muñecos de plástico para representar a los niños del reparto.

Los alumnos podían doblar, cortar o marcar las tiras de cartoncillo, la única restricción fue no usar regla para medir las tiras. Con esta situación pretendíamos indagar los procedimientos que los niños ponen en juego para resolver problemas de reparto equitativo y exhaustivo.

Nos interesaba descubrir cómo los niños construyen la relación entre un todo (uno, dos, tres o cuatro chocolates) y el número de partes que resultan después de la repartición, tomando en cuenta que se debe repartir todo lo que hay de chocolate (exhaustividad); así como considerar la relación de equivalencia entre las partes (lo que le tocó a cada niño una vez hecho el reparto). Estudiar cómo los niños construyen la relación parte-todo en un contexto de reparto implica identificar los momentos previos a la necesaria doble construcción (exhaustividad y equivalencia) para lograr éxito en la acción de repartir.

Los resultados surgidos de un estudio de corte transversal, ponen de manifiesto cuatro procedimientos o formas de organizar las situaciones de reparto:

- Procedimiento I. Reparten exhaustivamente sin controlar la equitatividad.
- Procedimiento II. Reparto en partes iguales pero con residuo.
- Procedimiento III. Reparto exhaustivo y en partes iguales sin anticipación.
- Procedimiento IV. Reparten exhaustivamente y en partes iguales con anticipación.

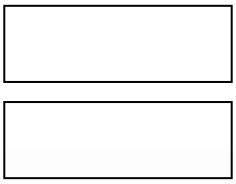
Procedimiento I. En este procedimiento los niños organizan las situaciones a partir de ciertas hipótesis sobre la igualdad y la relación lógica parte-todo. Sobre esta relación los niños no comprenden la conexión necesaria entre ambos aspectos, conciben a las partes de manera aislada y sin vinculación con el todo. De lo anterior se entiende que no lleguen a considerar la invariancia o conservación del todo, para estos niños un todo que es dividido deja de ser el mismo todo. En relación a la igualdad, ésta se concibe en el contexto de los números enteros, o sea que en un reparto equitativo a los niños les debe tocar el mismo número de partes independientemente de su forma o tamaño.

Las anteriores concepciones son un obstáculo para lograr la coordinación de la exhaustividad y las partes iguales, Daniela (primer grado; 6;05) es un ejemplo, ya que en la situación (3/4), parte en 5, 6 y 9 pedazos respectivamente cada uno de los chocolates y al repartir los pedazos cuida que a cada niño le toque el mismo número de pedazos, al final, a cada niño le tocan 5 pedazos pero de diferente tamaño:

Daniela (6;05)Primer grado.
Entrevistador: (Plantea la consigna correspondiente a la situación 3/4).

D: Cortarlos y repartirlos (Hace cuatro cortes y le salen 5 partes desiguales, al segundo chocolate lo parte en 6 pedazos, al tercero lo corta en 9 pedazos. Reparte los pedazos y le tocan 5 pedazos a cada muñeco).
E: ¿Les tocó igual Daniela?
D: Si.

☺	☺	☺	☺
1/5*	1/5	1/5	1/5
1/5	1/6	1/6	1/6
1/6	1/6	1/6	1/9
1/9	1/9	1/9	1/9
1/9	1/8	1/9	1/9



*Usamos el signo para expresar que las partes del entero no son iguales.

Procedimiento II. En este procedimiento los alumnos obtienen un residuo después del reparto. A diferencia de quienes utilizan el procedimiento I, estos alumnos respetan la igualdad de las partes, pero al no tener claro el número de partes necesario para dividir los chocolates les queda un residuo. Encontramos dos expresiones de este procedimiento. La primera consiste en establecer una relación de uno a uno entre los niños y los chocolates completos. Así en la situación (3/2) Luis (primer grado; 6;07) da un chocolate a cada niño y le queda un chocolate de residuo.

Luis (6;07) Primer grado.

Eentrevistador: (Plantea la consigna correspondiente a la situación 3/2).
L: ¡Me faltaría uno!
E: Te faltaría uno, ¿uno qué?
L: ¡Un muñequito!
E: ¿Y así no se puede repartir?
L: ¡No!
E: Faltaría un muñequito...oye y ¿qué le decimos a la persona que nos pidió que repartiéramos los chocolates?
L: Que traiga otro niño.
E: ¿Y no se te ocurre otra forma de repartir esos tres chocolates?
L: Guardando éste (uno de los chocolates) y dando a estos (da un chocolate a cada niño).

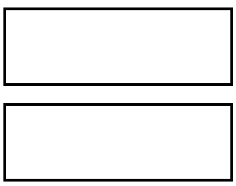
Desde la lógica "uno a uno" de Luis, la situación (3/2), no tiene solución; las soluciones que da Luis son consistentes con su lógica del "uno a uno": o se trae otro niño, o se "guarda" un chocolate.

La segunda expresión consiste en usar la bipartición sucesivamente, es decir en partir a la mitad, luego en cuartos después en octavos. Éste recurso fue utilizado en las situaciones de (1/3) y (2/3), donde el número de niños no es potencia entera de dos, implica siempre la aparición de un residuo. Ernesto es un ejemplo de esta variante:

Ernesto(8;09) Tercer grado.

Entrevistador: (Plantea la consigna correspondiente a 2/3).
Ernesto: (Toma un entero y lo parte en dos. Da un entero a un muñeco y medio chocolate a cada uno de los muñecos restantes).

☺	☺	☺
1	1/2	1/2



Ern: A éste le tocó más (señala al que le tocó un entero).
E: Pero nos dicen que les debe de tocar igual...

Ern: Entonces lo partimos (corta el entero en dos, ahora tiene 4/2, da un medio a cada muñeco y le sobra un medio).

☺ ☺ ☺

1/2 1/2 1/2 ~ 1/2

E: ¿Que pasó ahora?
Ern: Sobra uno.
E: ¿Y qué hacemos? nos dicen que no sobre nada.
Ern: Lo partimos para que a cada quien le toque dos (parte 1/2 en cuatro y le salen 4/8, da 1/8 a cada muñeco y le sobra 1/8).

☺ ☺ ☺

1/2 1/2 1/2

1/8 1/8 1/8 ~ 1/8

E: ¿Les tocó igual Ernesto?
Ern: No...éste lo partimos (el octavo que le sobró lo parte en cuatro, le salen 4/32, los reparte y le sobra 1/32).

☺ ☺ ☺

1/2 1/2 1/2
1/8 1/8 1/8
1/32 1/32 1/32 ~1/32

E: ¿Y éste? (el 1/32).
Ern: ¿Este? (el 1/32) lo dejamos.

Ernesto llega hasta dividir en 1/32 y allí se detiene, dejando un residuo, en el proceso no ve la posibilidad de partir en tres.

Procedimiento III. Al poner en juego este procedimiento los niños llegan a comprender la relación lógica entre el todo y las partes. Por otro lado entienden la equivalencia de las partes como la igualdad en tamaño y no como el mismo número de partes. La adquisición de estos conocimientos posibilita que coordinen la exhaustividad y la equitatividad en el reparto, pero mediante procedimientos de ensayo y error. No existe una anticipación del reparto, los procedimientos consisten en considerar los chocolates uno a uno, y en lo inmediato de las particiones se van haciendo los ajustes para poder cumplir con las exigencias de la exhaustividad y la equitatividad. Guillermo (segundo grado; 7;10) es un ejemplo de lo anterior, en 2/3 corta un chocolate en cuartos reparte 1/4 a cada niño, le sobra 1/4 y se lo da a uno de los niños, al segundo chocolate le parte 2/4 y distribuye 1/4 a los niños restantes ahora todos tienen 2/4, pero hay un sobrante de 1/2, lo que hace el niño es partir en tres el residuo, logra la exhaustividad y la equitatividad pero la fracción 2/4 + 1/6 que le tocó a cada niño no lo tenía planeado, sino que resultó de los ajustes inmediatos al momento de partir los chocolates.

Procedimiento IV. En esta forma de organización los niños han realizado una doble construcción: por un lado han organizado en una estructura operatoria las siete características que Piaget (1960) atribuye como necesarias para la adquisición del número fraccionario; dicha estructura coordina las acciones directas e inversas implicadas en las acciones de reparto o sea las acciones de partir o separar las partes del todo y las de juntar mentalmente las partes para volver a construir el todo. Esta organización de acciones posibilita comprender la relación lógica entre la parte y el todo y coordinar la exhaustividad y la equitatividad en el reparto. Lo anterior implica un manejo implícito de la fracción en el contexto de reparto. Además algunos niños, principalmente de quinto y sexto, llegan a relacionar los datos del reparto con la medida fraccionaria resultante de un reparto, éste conocimiento les permite anticipar la fracción que toca a cada quién en el reparto. León (sexto grado; 11;11) es un ejemplo, en el problema de 3/4 antes de hacer el reparto anticipa que a cada niño le tocará 3/4, al hacer el reparto estima 3/4 de cada chocolate, corta y entrega a 3 niños un pedazo de 3/4, le sobran 1/4 + 1/4 + 1/4 y entrega los tres cuartos al cuarto niño.

6.2 Selección del pedazo

Situación problemática: A partir de un reparto de chocolates (equitativo y exhaustivo) ya realizado, entre cierta cantidad de niños, se les pide a los alumnos que seleccionen el pedazo de chocolate que le tocó a cada niño; el pedazo lo seleccionan de cuatro posibles repartos. Esta situación problemática involucró a las fracciones 1/3 y 3/4, es decir “1 chocolate repartido entre 3 niños” y “3 chocolates repartidos entre 4 niños” respectivamente.

La estrategia privilegiada para resolver este tipo de problemas es la conmensuración. Ésta consiste en juntar todos los chocolates involucrados y buscar aquellos pedazos iguales que yuxtapuestos coincidan con la longitud de los chocolates.

Esta estrategia implica abstraer, implícita o explícitamente, la relación “*X* chocolates es igual a *Y* número de pedazos iguales”.

La situación (1/3) consiste en colocar ante el alumno un “chocolate” (una tira de cartoncillo de 18 cm. de largo) y cuatro repartos con cuatro pedazos iguales en cada reparto. Los tamaños de los pedazos, en cada paquete de cuatro, eran de 3, 4.5, 5 y 6 centímetros respectivamente. Al niño se le decía: “Mira, el chocolate es de éste tamaño (se le mostraba la tira de 18 cm.), si yo reparto este chocolate entre 3 niños (se le señalaban 3 muñecos) ¿de qué tamaño será el pedazo que le toque a cada niño?, de éste (se señalaban los cuatro pedazos de 3 cm.), de éste (se señalaban los cuatro pedazos de 4.5 cm.), de éste (se señalaban los cuatro pedazos de 5 cm.) o de éste (se señalaban los cuatro pedazos de 6 cm.)”. En esta situación la selección correcta era el pedazo de 6 centímetros.

La consigna en la situación (3/4) era análoga a la anterior, se mostraban los 3 chocolates (cada uno de 12 centímetros), los muñecos y 4 diferentes resultados posibles del reparto (los pedazos eran de 4.5 cm. ó 6 cm. ó 8 cm. ó 9 cm.). En esta situación, la selección correcta era el pedazo de 9 centímetros.

En ambas situaciones cuando los alumnos elegían un pedazo se les pedía que comprobaran, de alguna manera, que el pedazo seleccionado era el correcto.

El objetivo era indagar los momentos previos a la aparición de la estrategia de conmensuración; las dificultades y obstáculos a que se enfrentan los niños para resolver la situación problemática planteada e identificar los grados escolares en que se empieza a recurrir a la conmensuración.

Exponemos a continuación los principales resultados.

6.2.1 Selección del pedazo: Situación (1/3)

En la situación (1/3) clasificamos los resultados en dos grupos:

a) En el Grupo I están los alumnos que transforman el problema.
b) En el grupo II están los alumnos que resuelven el problema recurriendo a la medición del chocolate, superponiendo el pedazo elegido en el chocolate.

Iniciemos el análisis con los alumnos del grupo I.

GRUPO I: Los niños de este grupo empiezan por transformar el problema en una actividad de reparto, es decir toman uno de los pedazos e intentan repartirlo. Después de replantearles la consigna, entienden de ella que había que elegir un pedazo, escogen entonces uno de ellos en base a una relación cuantitativa que establecían con cualquier otro elemento presente en la situación. Ante la solicitud (del entrevistador) para que comprobaran la validez de la elección, no podían funcionalizar ningún procedimiento.

Luis e Ivan pertenecen a este grupo. Luis elige el pedazo de 3 cm., al pedirle que compruebe que ése es el pedazo correcto, se limita a decir que ese pedazo (el de 3 cm.) es menor que el de 4.5 centímetros, cuando se le pide que explique un poco más su respuesta, lo que hace es repartir los pedazos de 3 cm. a “los niños” (muñecos). A Luis no se le ocurre juntar los pedazos y luego comparar la longitud de los tres con la del chocolate o desplazar sucesivamente el pedazo tres veces sobre la longitud del chocolate entero.

Ivan también elige el pedazo de 3 cm. y al pedirle que compruebe que la elección “es correcta” recurre a una justificación alejada de la lógica de las relaciones en juego y dice que “ése pedazo es de la misma altura que los muñecos”.

Lo anterior es un indicio de la dificultad que tienen esos alumnos para realizar la acción inversa del reparto. Recordemos que en las condiciones iniciales de la situación el reparto ya estaba realizado (por el “entrevistador”); era necesario entonces que los niños tuvieran alguna idea respecto a que la reunión de ciertos pedazos iguales permitía recuperar el todo.

En este grupo se encuentran los cuatro alumnos de primero. En la primera situación problemática la del reparto (no reportada en este artículo), todos estos alumnos tuvieron dificultades para coordinar la exhaustividad y las partes iguales del reparto.

GRUPO II. En este grupo los niños frente a la situación (1/3) estiman a “ojo” cuál de los pedazos puede caber tres veces en el chocolate. Al pedirles que comprueben que eligieron correctamente, miden el chocolate con los pedazos elegidos; rechazan los que no caben exactamente tres veces en el chocolate, así verifican que la elección fue correcta, o en el proceso se dan cuenta que su anticipación fue incorrecta y cambian de pedazo, para encontrar el pedazo correcto.

En éste grupo se encuentran todos los alumnos de segundo a sexto. Algunos, se limitan a medir los pedazos, pero otros además de medir lo explicitan y dicen “voy a medir los pedazos en el chocolate”; más aún, estos niños llegan a descubrir en el contexto de la situación de reparto las relaciones de medida involucradas en la selección del pedazo (la partición y el desplazamiento sucesivo de una de las partes sobre la longitud total que se desea medir).

6.2.2 Selección del pedazo: Situación (3/4)

En esta situación se clasifican los resultados en cuatro grupos.

Grupo I: En este grupo están quienes consideran que el pedazo debe ser menor que un chocolate. Al utilizar este procedimiento los alumnos se apoyan en la relación cualitativa de parte-todo. Luis es un ejemplo de esta estrategia, elige el pedazo de 4.5 cm. y al pedirle que lo compruebe dice: “Estos (señala los pedazos de 4.5 cm.), porque están más chiquitos que éstos (señala los chocolates)”. En este grupo se encuentran los cuatro alumnos de primero.

Grupo II: Los alumnos de este grupo miden un chocolate tomando como unidad un pedazo. En este procedimiento la idea de los niños es encontrar un pedazo que quepa cuatro veces en un chocolate. En los procedimientos de estos niños subyace el significado de fraccionamiento de la unidad. Que sabemos se trabaja de manera privilegiada en la escuela.

Cynthia es un ejemplo de este grupo, ella toma en cuenta los pedazos más chicos, compara la longitud de esos cuatro pedazos y los compara con un chocolate, como no se cumple lo que ella espera concluye: “ninguno es, porque no le cupieron los más chiquitos”.

Once niños usan este procedimiento, es el que predomina en los niños de nuestra muestra. No podemos dejar de anotar que el significado de la fracción como fraccionamiento de la unidad, que subyace al procedimiento usado por los niños, es prácticamente el único significado que se trabaja en la escuela.

Grupo III: En este grupo los alumnos miden uno o más chocolates con los pedazos y fracasan. Los niños de éste grupo hacen toda una serie de ensayos, prueban con todos los pedazos. La diversidad de ensayos y errores sin éxito indican la ausencia de la relación “*X* número de pedazos debe ser igual a *Y* número de chocolates”.

Fabiola es un ejemplo de este grupo. Ella realiza varios procedimientos: transforma el problema en uno de reparto, junta los chocolates pero no tiene una anticipación numérica de como deben empatar los chocolates con los pedazos, finalmente pone el pedazo de 9 cm. en un chocolate y dice que ningún pedazo es el correcto.

Grupo IV: En este grupo se encuentran los alumnos que miden uno o más chocolates con los pedazos y tienen éxito. Se puede hacer una distinción al interior de este grupo, de los 6 niños que lo componen 4 realizan estrategias similares a las del grupo 3, hacen una serie de ensayos y errores pero finalmente eligen el pedazo correcto y los 2 niños que restan en el grupo aplican sin rodeos la relación de conmensuración, ello les evita hacer cambios de procedimiento como la mayoría de los niños.

6.3 Comparación de resultados de repartos

Situación problemática: Los niños comparan los resultados de dos repartos, deciden en cuál reparto le tocó más chocolate a un niño (o menos) o bien si les tocó lo mismo. En esta situación se presentaron tres conjuntos de comparaciones:

- Comparación de repartos equivalentes. A partir del reparto de 1/3 se compara con cinco de sus equivalentes: 2/6; 3/9; 4/12 y 5/15.
- Comparación de repartos con numerador menor que el denominador. Se realizaron tres comparaciones: (2/3 y 2/4); (3/4 y 2/4) y (2/3 y 3/4). Se cuidó que en las comparaciones hubiera numeradores iguales (2/3 y 2/4), denominadores iguales (3/4 y 2/4) y numerador igual al denominador en donde falta una fracción unitaria para completar el entero (3/4 y 2/3).
- Comparación de repartos con numerador mayor que el denominador. También se realizaron tres comparaciones: (4/2 y 4/3); (3/2 y 5/2) y (4/3 y 3/2). También en este conjunto se presentan las igualdades del anterior: numeradores (4/2 y 4/3), denominadores (3/2 y 5/2) y denominador igual a numerador en donde excede una fracción unitaria al entero (4/3 y 3/2).

En esta situación encontramos tres procedimientos de solución:

I. Comparación de la cantidad de chocolates en ambos repartos

II. Búsqueda de la igualdad entre chocolates o entre niños

III. Reparto y comparación de pedazos a veces con éxito y con procedimientos diferenciados en la comparación

Procedimiento I. En este procedimiento los alumnos transforman el problema de comparación de fracciones en un problema de comparación entre enteros. Toman en cuenta sólo un dato del reparto e ignoran las relaciones fraccionarias involucradas en la situación.

En el CUADRO 1 se observa a los alumnos que utilizaron el procedimiento I.

CUADRO 1 Comparación de la cantidad de chocolates en ambos repartos.

		a/b = c/d	a/b, a < b			a/b, a> b		
Alumno	G.	2/6 = 1/3	2/4 y 2/3	3/4 y 2/4	3/4 y 2/3	4/3 y 4/2	5/2 y 3/2	4/3 y 3/2
Mayeli	1º	I	I	I □		I	I □	I
Daniela	1º			I □			I □	
Luis	1º	I	I	I □	I □	I	I □	I
Ivan	1º							I
Alejandro	3º	I						

Éxito: □ Fracaso:

Este procedimiento lo usaron sólo los niños de primero, a excepción de Alejandro de tercero que sólo lo utiliza en la situación de equivalencia. De los cinco alumnos Mayeli y Luis son constantes en su uso, combinando éxitos y fracasos. En cambio Daniela solo lo usa en las situaciones donde la mayoría de chocolates se relaciona con el reparto donde toca más cantidad de chocolate. Ivan y Alejandro lo usan en situaciones donde conduce al fracaso.

El procedimiento “funciona” cuando la mayoría de chocolates coincide con el reparto mayor (3/4 y 2/4), (3/4 y 2/3) y (5/2 y 3/2), pero fracasa cuando no se cumple dicha condición, que es el caso del resto de las comparaciones. Lo anterior nos permite señalar que la relación procedimiento-situación problemática, no es funcional para resolver problemas de comparación de resultados de reparto. En el contexto los “éxitos” son virtuales, pues los alumnos se manejan en el plano de los enteros y no en las relaciones fraccionarias.

Procedimiento II. Los alumnos que utilizan este procedimiento llegan a tomar en cuenta y a diferenciar la cantidad de chocolates de la cantidad de niños. El procedimiento tiene éxito cuando aplican el siguiente razonamiento: “Si en los dos repartos hay igual cantidad de niños, toca más donde hay más chocolates”, de esta manera los alumnos identifican la relación directamente proporcional entre el número de chocolates y la cantidad que toca a cada niño en el reparto. Este razonamiento cuando se vincula a las comparaciones (3/4 y 2/4) y (5/2 y 3/2), siempre conduce al éxito.

El sentido inverso de este procedimiento es cuando los niños razonan: “Si en los dos repartos hay igual cantidad de chocolates, les toca más en donde hay menos niños”, así los alumnos identifican la relación inversa entre el número de niños y la cantidad de chocolates, a diferencia del procedimiento I donde sólo se considera el número de chocolates. Cuando se utiliza el procedimiento en las comparaciones (2/4 y 2/3), (4/3 y 4/2) siempre se tiene éxito, porque el procedimiento funciona para este tipo de fracciones.

En el CUADRO 2 presentamos la relación del procedimiento II. Este procedimiento lo usan 16 alumnos: 3 de segundo; 3 de tercero; 3 de cuarto; 4 de Quinto y 3 de sexto. Los alumnos de segundo y tercero son sistemáticos en usar este recurso y los de cuarto a sexto no.

CUADRO 2: Búsqueda de la igualdad entre chocolates o niños.

		a/b = c/d	a/b, a < b			a/b, a> b		
Alumno	G.	2/6 = 1/3	2/4 y 2/3	3/4 y 2/4	3/4 y 2/3	4/3 y 4/2	5/2 y 3/2	4/3 y 3/2
Cynthia	2º	Inversa	□ Inversa	□ Directa	Inversa	□ Inversa	□ Directa	Directa

Adriana	2º	Inversa	☐ Inversa	☐ Directa	Inversa	☐ Inversa	☐ Directa	Directa
Edgar	2º	Directa	☐ Inversa	☐ Directa	Inversa	☐ Inversa	☐ Directa	Directa
Fabiola	3º	Inversa	☐ Inversa	☐ Directa	☐ Directa	☐ Inversa	☐ Directa	☐ Inversa
Carlos	3º	Inversa		☐ Directa	☐ Directa	☐ Inversa	☐ Directa	Directa
Diana	4º	Inversa	☐ Inversa	☐ Directa				
Dirak	4º	Directa						
Pablo	4º		☐ Inversa	☐ Directa	☐ Directa	☐ Inversa	☐ Directa	Directa
Marlene	5º		☐ Inversa					
Berenice	5º		☐ Inversa		☐ Directa			
Rubén	5º				☐ Directa		☐ Directa	
Armando	5º	Directa						
Ireri	6º		☐ Inversa	☐ Directa	☐ Directa			
León	6º			☐ Directa				
Eduardo	6º				Inversa			

Éxito : ☐ Fracaso:

Si analizamos la relación del procedimiento con las situaciones, podemos destacar las siguientes regularidades:

- El procedimiento siempre conduce al éxito en las situaciones donde hay relaciones directa e inversamente proporcionales: (3/4 y 2/4), (5/2 y 3/2), (2/4 y 2/3) y (4/3 y 4/2).
- En las situaciones donde no hay igualdad de niños o de chocolates, los alumnos asimilan de manera deformante las relaciones involucradas en los problemas, transformándolas en relaciones directa e inversamente proporcionales.
- En la comparación de equivalencias se observa que independientemente de si los alumnos se centran en los chocolates ("hay más, donde hay más chocolates") o en los niños ("hay más donde hay menos niños") siempre fracasan.
- En la comparación (3/4 y 2/3) los alumnos fracasan cuando adaptan el problema a una relación inversamente proporcional y tienen "éxito" cuando lo adaptan a una relación directamente proporcional. En la comparación (4/3 y 3/2) sucede a la inversa. Podemos afirmar que en estas situaciones los "éxitos" no dependen de la comprensión de las fracciones involucradas, son "éxitos" aparentes, por lo anterior podemos afirmar que el procedimiento no es funcional en estas comparaciones.

Procedimiento III. Los alumnos que utilizan este procedimiento sienten la necesidad de repartir para después comparar los pedazos de cada niño y decidir a quién le tocó más, lo anterior significa que se considera de manera implícita la cuantificación fraccionaria de la parte que resulta de un reparto, a diferencia de los procedimientos anteriores donde se hacía énfasis en una comparación de elementos aislados, como en el procedimiento I, o en una relación recíproca de elementos como en el procedimiento II. A pesar de recuperar el procedimiento de repartir se presentan una serie de confusiones en la comparación de los pedazos.

En este procedimiento identificamos cuatro diferentes formas de realizar la comparación entre los pedazos.

III.1. Comparan el total de pedazos con el total de pedazos. Los alumnos al hacer la comparación transforman el problema en una comparación entre números enteros. En este procedimiento los alumnos no toman en cuenta lo que le toca a cada niño después de haber hecho el reparto, se centran en la comparación de la cantidad de pedazos resultantes en cada una de las situaciones.

III.2. Comparación de residuo con residuo. En esta variante después de hacer los repartos, los cuales casi siempre se realizan mentalmente, la base de la comparación son los residuos. El procedimiento permite tener éxito en algunas comparaciones y fracasar en otras.

III.3. Comparan fracciones unitarias con fracciones unitarias. En este procedimiento los niños parten todos los chocolates y al hacer la comparación toman solo en cuenta la fracción unitaria resultante. En algunas situaciones el procedimiento se adapta a las comparaciones y los alumnos tienen éxito, lo anterior sucede cuando la fracción de la unidad coincide con el pedazo que le toca a los niños, en sentido contrario hay casos en que la fracción unitaria no coincide con lo que le toca a los niños, si los alumnos no consideran lo anterior fracasan en la comparación.

III.4. Comparan pedazo con pedazo. En esta variante los niños comparan el total del pedazo con el total del pedazo, al igual que los anteriores procedimientos se dan casos de aciertos y de errores, si bien hay que señalar que son más los éxitos que los fracasos, lo cual nos indica la pertinencia del procedimiento para solucionar los problemas de comparación de resultados de repartos.

En el CUADRO 4 observamos que lo utilizan 14 alumnos: 1 de segundo, 1 de tercero, 4 de cuarto, 4 de quinto y 4 de sexto.

CUADRO 4 Reparto y comparación de pedazos.

		a/b = c/d	a/b, a < b			a/b, a> b		
Alumno	G.	2/6 = 1/3	2/4 y 2/3	3/4 y 2/4	3/4 y 2/3	4/3 y 4/2	5/2 y 3/2	4/3 y 3/2
Guillermo	2º	III.1 ✉	III.2 ❿	III.2 ✉	III.2 ❿	III.2 ✉	III.2 ❿	III.2 ✉
Karen	3º	III.3 ❿	III.2 ❿	III.2 ❿	III.2 ❿	III.4 ❿	III.4 ❿	III.2 ✉
Diana	4º				III.4 ✉	III.4 ❿	III.4 ❿	III.4 ❿
Tania	4º	III.3 ❿	III.3 ✉	III.3 ✉	III.4 ❿	III.4 ❿	III.4 ❿	III.4 ❿
Dirak	4º		III.4 ❿	III.4 ❿	III.4 ❿	III.4 ❿	III.4 ❿	III.4 ✉
Pablo	4º	III.3 ❿						
Marlene	5º	III.3 ❿		III.4 ❿	III.4 ❿	III.4 ❿	III.4 ❿	III.4 ❿
Berenice	5º	III.1 ✉				III.4 ❿	III.4 ❿	III.4 ✉
Rubén	5º	III.3 ❿	III.3 ✉	III.1 ❿		III.1 ✉		III.4 ❿
Armando	5º		III.2 ✉	III.4 ❿	III.4 ❿	III.4 ❿	III.2 ❿	III.2 ✉
Ireri	6	III.3 ❿				III.4 ❿	III.4 ❿	III.4 ❿
León	6º	III.3 ❿	III.4 ❿		III.4 ❿	III.4 ❿	III.4 ❿	III.4 ❿
Eduardo	6º	III.3 ❿	III.4 ✉	III.4 ❿		III.4 ❿	III.4 ❿	III.4 ❿
Jesús	6º	III.3 ❿	III.3 ❿	III.4 ❿		III.4 ❿	III.4 ❿	III.4 ❿

Éxito: ❿   Fracaso: ✉

Frecuencias:

III.1 = 4: (3 fracasos, 1 éxito)   III.3 = 13: (3 fracasos y 10 éxitos)

III.2 = 12: (6 fracasos, 6 éxitos)   III.4 = 43: (4 fracasos y 39 éxitos)

Analizando el cuadro encontramos las siguientes regularidades:

- El procedimiento III.1 está casi siempre vinculado al fracaso, de 4 veces que se utiliza 3 veces se equivocan los alumnos
- El procedimiento III.2 conduce tanto al éxito como al fracaso
- El procedimiento III.3 está relacionado con el éxito siempre que se aplica en las situaciones de equivalencia, lo anterior se explica por las características de la situación, donde el fraccionamiento resultante del reparto coincide con la parte que les toca a los niños, al contrario cuando este no se cumple el procedimiento fracasa en la comparación
- El procedimiento III.4 está vinculado al éxito, pues de 43 veces que se aplica se acierta en 39 veces. Además los éxitos no se circunscriben a una o dos situaciones como los demás procedimientos, sino que se encuentran funcionando en todos los tipos de comparaciones. Por lo anterior podemos afirmar que este procedimiento es el que mejor se adapta para resolver las situaciones de comparación de resultados de reparto

- Por lo que respecta a los errores en que incurren los alumnos identificamos los siguientes:

- Transforman el problema en una comparación entre números enteros
- Deforman las relaciones fraccionarias, en las situaciones dónde no hay igualdad de chocolates o de niños, en relaciones directa e inversamente

proporcionales

- Cuando reparten llegan a asimilar los pedazos a números enteros
- No realizan los repartos de manera exhaustiva y pierden la homogeneidad en la comparación
- Confunden la fracción unitaria con la parte que toca en el reparto
- Cuando realizan exhaustiva y equitativamente los repartos se equivocan en la relación de orden entre las fracciones

CONCLUSIONES GENERALES

En cada una de las situaciones identificamos tres formas de organización de los procedimientos de solución, a saber:

I.1 FORMAS DE ORGANIZACIÓN DE LAS SITUACIONES DE REPARTO

Los resultados, surgidos de un estudio de corte transversal, ponen de manifiesto tres formas o niveles de organizar las situaciones de reparto:

a) En la primera forma, los niños organizan las situaciones a partir de ciertas hipótesis sobre la igualdad y la relación lógica parte-todo. Sobre la relación lógica parte-todo, los niños no comprenden la conexión necesaria entre ambos aspectos, conciben a las partes de manera aislada y sin vinculación con el todo, de lo anterior se entiende que no lleguen a considerar la invariancia o conservación del todo. Para estos niños un todo que es dividido deja de ser el mismo todo. En relación a la igualdad, ésta se concibe en el contexto de los números enteros, o sea que en un reparto equitativo a los niños les debe tocar el mismo número de partes, independientemente de su forma o tamaño.

Las anteriores concepciones son un obstáculo para lograr la coordinación de la exhaustividad y las partes iguales. Daniela (primer grado; 6;05) es un ejemplo, ya que en la situación (3/4), parte en 5, 6 y 9 pedazos respectivamente cada uno de los chocolates y al repartir los pedazos se cuida de que a cada niño le toque el mismo número de pedazos, al final, a cada niño le tocan 5 pedazos pero de diferente tamaño.

b) En la segunda forma, los niños llegan a comprender la relación lógica entre el todo y las partes. Por otro lado entienden a la equivalencia de las partes como la igualdad en tamaño y no como el mismo número de partes. La adquisición de estos conocimientos posibilita que coordinen la exhaustividad y la equitatividad en el reparto, pero mediante procedimientos de ensayo y error. No existe una anticipación del reparto, los procedimientos consisten en considerar los chocolates uno a uno, y en lo inmediato de las particiones se van haciendo los ajustes para poder cumplir con las exigencias de la exhaustividad y la equitatividad. Guillermo (segundo grado; 7;10) es un ejemplo de lo anterior, en 2/3 corta un chocolate en cuartos, reparte 1/4 a cada niño, le sobra 1/4 y se lo da a uno de los niños, al segundo chocolate le parte 2/4 y distribuye 1/4 a los niños restantes, ahora todos tienen 2/4, pero hay un sobrante de 1/2, lo que hace el niño es partir en tres el residuo, logra la exhaustividad y la equitatividad pero la fracción 2/4 + 1/6 que le toco a cada niño no lo tenía planeado, sino que resultó de los ajustes inmediatos al momento de partir los chocolates.

c) En la tercera forma los niños han realizado una doble construcción: por un lado han organizado en una estructura operatoria las siete características que Piaget atribuye como necesarias para la adquisición del número fraccionario; dicha estructura coordina las acciones directas e inversas implicadas en las acciones de reparto o sea las acciones de partir o separar las partes del todo y las de juntar mentalmente las partes para volver a construir el todo. Esta organización de acciones posibilita comprender la relación lógica entre la parte y el todo y coordinar la exhaustividad y la equitatividad en el reparto. Lo anterior implica un manejo implícito de la fracción en el contexto de reparto. Además algunos niños, principalmente de quinto y sexto, llegan a relacionar los datos del reparto con la medida fraccionaria resultante de un reparto, éste conocimiento les permite anticipar la fracción que toca a cada quién en el reparto. León (sexto grado; 11;11) es un ejemplo de este nivel, en el problema de 3/4 antes de hacer el reparto anticipa que a cada niño le tocará 3/4, al hacer el reparto estima 3/4 de cada chocolate, corta y entrega a 3 niños un pedazo de 3/4, le sobran 1/4 +1/4+1/4 y entrega los tres al cuarto niño.

Podemos decir que en los niños del primer momento y en los del tercero hay diferencias conceptuales; los primeros no son conservadores y su concepción de equivalencia se limita a la igualdad entre el número de pedazos; en cambio los niños más avanzados son conservadores, o sea que comprenden la relación de igualdad entre el total de pedazos de un reparto y el todo que se repartió; y la equivalencia de las partes la entienden tanto como la misma forma y longitud; además algunos niños comprenden el significado del par de números a/b en el contexto de reparto.

Los niños del tercer momento apoyados en su reestructuración conceptual toman en cuenta de manera global a todos los chocolates, ello les permite anticipar y coordinar la exhaustividad y las partes iguales. En cambio los niños del primero y el segundo momento se enfrentan a los chocolates de uno en uno y en lo inmediato de las particiones van haciendo los ajustes necesarios; cuando llegan al éxito en los repartos es por ensayo y error y no por un plan de acción previo como los niños del tercer momento.
Los resultados indican que el desarrollo de la coordinación entre la equitatividad y la exhaustividad no es lineal, sino que se presentan desfases dependiendo de las dificultades del contexto en que se pidan los repartos; en los resultados encontramos que la situación más sencilla para los niños fue el reparto de 3/2 y la más compleja la de 2/3.

En síntesis encontramos que los niños de primero y segundo se caracterizan por tener dificultades en la coordinación de la exahustividad y la equitatividad y en interpretar los resultados de las particiones desde el esquema de los números enteros. Lo anterior implica un obstáculo para la comprensión de las fracciones y de su escritura convencional en el par de números *a*/*b*. Estos resultados apoyan las nuevas orientaciones curriculares de trasladar a tercer grado la introducción de las fracciones.

Por lo que respecta a la comprensión del significado de cociente, ninguno de los niños de la muestra explicita que 3 ÷ 4 es igual a la fracción 3/4, o que el número que multiplicado por 4 da 3 es el cociente 3/4. Sin embargo consideramos que en los procedimientos III y IV hay un manejo de relaciones que pueden convertirse en una base para la posterior comprensión del significado de cociente. Por ejemplo en el procedimiento III los niños llegan al resultado de 3/4 al repartir 3 chocolates entre 4, pero este resultado lo obtienen sin una anticipación de por medio y por procedimientos aditivos al fraccionar a las unidades de manera sucesiva. Por su parte en el procedimiento IV, algunos niños llegan a establecer la relación de los datos (3/4 por ejemplo) con la fracción resultante 3/4. Con respecto a ello Block (1995) afirma que establecer la relación entre los datos del reparto y la fracción que resulta de dicho reparto no significa que se funcionaliza de manera explícita el significado de cociente, lo fundamenta en el hecho de que a los mismos niños que descubren la fracción resultante de un reparto a partir de analizar los datos del mismo, se les pone un problema de cociente de fracciones en otros contextos, por ejemplo en una recta numérica se divide entre el cero y el 5 en tres partes, y se pregunta a que número corresponde cada división y los niños no son capaces de identificar que la división 5 ÷ 3 nos da el número 5/3 y que dicho número corresponde a cada una de las tres divisiones que hay entre el cero y el 5. De la afirmación de Block se nos ocurren las siguientes reflexiones: ¿El procedimiento IV de nuestro estudio no significará un manejo implícito de la idea de cociente? Por otra parte considerando que al principio los niños llegan al resultado de un reparto recurriendo al fraccionamiento de la unidad de manera sucesiva y no como resultado de aplicar una división de manera directa ¿ello no implicará que las situaciones de reparto, a pesar de ser susceptibles de ser organizadas por el significado de cociente, no son las más propicias para introducir dicho significado?

I.2 Formas de organización en selección del pedazo

En la situación de selección del pedazo identificamos tres formas de organizar la relación de conmensuración.

a) En la primera forma los niños no funcionalizan la relación, ni de manera implícita ni explícita. Ante la ausencia de esta relación los niños transforman el problema en uno de reparto sin partición, es decir solo distribuyen pedazos a “los niños” (muñecos). O eligen cualquier pedazo y cuando se les pide que comprueben se limitan a decir que ése es el pedazo porque es menor que el chocolate, sustentan su afirmación en una experiencia cotidiana, cuando se “reparte algo” a uno le toca “un pedazo de ese algo”. Quiénes utilizan estos procedimientos fracasan en elegir el pedazo correcto. Todos los niños de primero se caracterizan por esta manera de resolver la situación.
b) La segunda forma de funcionalizar la relación “el total de pedazos de un reparto es igual al total de enteros que se repartieron” aparece en los niños que la han construido implícitamente en el contexto de reparto. En la situación de selección del pedazo la utilizan midiendo un chocolate con un pedazo como unidad de medida. Este procedimiento conduce al éxito en la situación (1/3), pero al fracaso en la situación de (3/4). Esto es, la relación de conmensuración está construida para los casos particulares en los que “el todo” está representado por una unidad.
c) La tercera forma de utilizar la relación es ponerla en juego tanto en la situación de (1/3) y de (3/4). En este tercer nivel hay que distinguir tres subgrupos:

- En el primer subgrupo están quienes recurren a la conmensuración pero no cuentan con una anticipación de la relación entre el número de chocolates y el número de pedazos y fracasan en la elección del pedazo
- En el segundo subgrupo están los niños que tampoco anticipan la relación 3 chocolates igual a 4 pedazos, pero en sus ensayos y errores llegan a conmensurar los 3 chocolates y los 4 pedazos y esto les permite seleccionar correctamente
- En el tercer subgrupo se ubican los niños que recurren a la conmensuración y anticipan la relación de igualdad que debe darse entre 3 chocolates y 4 pedazos

En general, encontramos que la mayoría de los niños tienen dificultades para resolver el problema de la selección del pedazo. Los niños de los primeros grados no han construido en el plano de la acción implícita la relación de igualdad entre el total de enteros de un reparto y el total de pedazos del mismo reparto, y los niños de tercero a sexto que tienen dicha relación de manera implícita no logran funcionalizarla con anticipación en el contexto de la selección del pedazo.

I.3 Formas de organización de la situación de comparación de resultados de repartos

En comparación de resultados de un reparto, también se encuentran tres formas de organización en los procedimientos:

1. Comparación en base a datos aislados de las situaciones. Esta primera forma, cuya estructura es $a>c \Rightarrow a/b>c/d$, responde a una comparación de números naturales, por ello los “éxitos” se circunscriben a los casos en los que la cantidad de niños en las situaciones de reparto es la misma.
2. Comparación en base al establecimiento de relaciones recíprocas entre los chocolates y los niños (si hay igualdad de niños, toca más dónde hay mayor cantidad de chocolates; si hay igualdad de chocolates, el reparto es mayor dónde hay menos niños). Esta segunda forma, se adapta a las comparaciones entre (2/4 y 2/3); (3/4 y 2/4); (4/3 y 4/2) y (5/2 y 3/2), o sea aquellas comparaciones donde son iguales los numeradores o los denominadores; pero se fracasa cuando se generaliza el procedimiento a las comparaciones de fracciones equivalentes y a las comparaciones entre (3/4 y 2/3) y (4/3 y 3/2).
3. Comparación a partir de resultados de reparto. En esta forma encontramos dos variantes: la primera corresponde a los procedimientos III.1, III.2 y III.3, en estos procedimientos los alumnos incurren en una serie de confusiones sobre la relaciones fraccionarias involucradas en las situaciones. La segunda variante es el procedimiento III.4, que en la

mayoría de los casos permite resolver con éxito las comparaciones.

A continuación se mencionan las confusiones y dificultades que aparecen al utilizar los procedimientos III.1, III.2 y III.3:

a) Comparación de pedazos como si fueran números enteros (procedimiento III.1). En este procedimiento los alumnos asimilan los pedazos a los números enteros y además no diferencían el total de pedazos de la parte que toca a cada niño en el reparto. Por ejemplo en la comparación (1/3 y 2/6) algunos niños dicen que tocará más en 2/6, porque hay 6 pedazos y en la situación (1/3) tan solo hay 3.
b) Comparación de residuos (procedimiento III.2). En este procedimiento el error o las contradicciones se presentan cuando las particiones de los enteros no son exhaustivas o no se parten en el mismo número de partes, por ejemplo Guillermo (segundo grado; 7;10) en la comparación entre (2/4 y 2/3) en la situación (2/4) parte los chocolates en medios, de manera exhaustiva y en la situación (2/3) parte un solo chocolate en tercios y deja un chocolate sin repartir, al comparar los repartos se centra en los residuos y de la verificación de que uno es mayor que cero deduce de manera errónea que 2/4 > 2/3.
c) Comparación de fracciones unitarias con fracciones unitarias (procedimiento III.3). Aquí el error consiste en confundir la fracción unitaria con la parte que toca a cada niño en el reparto, esta confusión lleva a los niños a equivocarse en las comparaciones, por ejemplo Tania (cuarto grado; 9;04) en la comparación entre (2/4 y 2/3). En la situación (2/4) parte en medios los chocolates y le toca un medio de chocolate a cada niño y en la situación (2/3) parte los chocolates en tercios y le toca a cada niño dos tercios, pero para decidir en qué reparto toca más chocolate a los niños compara 1/2 (la parte que toca a cada niño) con 1/3 (una parte de lo que toca a cada niño).

Podemos destacar que los niños antes de considerar la relación fraccionaria asimilan la situación al esquema de los números naturales. Otro aspecto a resaltar es que los errores y contradicciones que se presentan en las etapas iniciales de la construcción de las fracciones en el contexto de reparto se debe tanto a una falta de coordinación de los esquemas con que cuentan los niños como a una ausencia de diferenciaciones de las relaciones que caracterizan a la situación problemática. Las diferenciaciones o negaciones no son relaciones dadas sino que tienen que construirse, específicamente en el contexto de reparto y comparación de repartos las diferenciaciones implican la construcción de las siguientes relaciones:

1. La diferenciación entre el número de chocolates y el número de niños y su relación por medio de la operación de división o reparto
2. La relación cociente entre el número de chocolates y número de niños y su diferenciación del número o medida que resulta de la anterior operación
3. La relación entre el chocolate y el número de partes en que se divide y su diferenciación del total de pedazos y el número de pedazos que toca a cada quién en el reparto

La integración de éstas relaciones contribuye a la construcción del significado de las fracciones en el contexto de reparto.

Este panorama general de los procedimientos da una idea de las principales dificultades de los niños al resolver problemas de reparto; se pueden caracterizar dichas dificultades si se recurre al concepto de obstáculo epistemológico. Este concepto lo retoma Brousseau (1976) de Bachelard, y al adaptarlo al campo de la Didáctica lo entiende como: "un conocimiento que se constituye en relación a un objeto, que implica ciertas anticipaciones y consecuencias, es un conocimiento que se resiste a ser rechazado y a modificarse en lo más mínimo". Un obstáculo epistemológico es siempre resultado de una interacción del niño con un cierto contexto cultural.

Podemos identificar en los niños dos tipos de obstáculos:

a) Los obstáculos que se relacionan con las limitaciones propias del desarrollo conceptual. En este caso están los niños que no han construido la relación parte-todo, ni siquiera en las situaciones de reparto, o que la interpretan desde el esquema de los números enteros. Lo anterior representa un obstáculo e impide que los niños puedan interactuar con la situación para resolverla.
b) Los obstáculos epistemológicos de origen didáctico. Estos obstáculos se derivan de las prácticas escolares. Los concepciones de los niños, que recurren al significado de la fracción como fraccionamiento de la unidad en el contexto de fracciones unitarias, son un ejemplo de este tipo de obstáculo. También se puede hablar de obstáculo didáctico en aquellos niños que no anticipan la relación de igualdad entre el total de chocolates y de pedazos en un reparto. En el primer caso el obstáculo se propicia desde la práctica de enseñanza dominante, respecto a las fracciones y su significado; en el segundo caso, se trata más bien de una ausencia de trabajo didáctico correspondiente.

En resumen, este trabajo muestra que hay ciertas regularidades en las vicisitudes que pasan los niños para apropiarse del significado de las fracciones en el contexto de reparto: al principio los niños ignoran las relaciones fraccionarias involucradas en las situaciones problemáticas; en un segundo momento los niños incorporan de manera implícita las relaciones fraccionarias, en este momento se depende de uso del material y se incurren en una serie de confusiones y errores y finalmente los niños llegan a construir a las fracciones como mediaciones o herramientas que les permiten anticipar la solución a las situaciones problemáticas de reparto. En este recorrido los niños construyen modelos implícitos sobre la relación parte-todo, la equivalencia y el aspecto ordinal de los números fraccionarios, los cuáles son necesarios para aproximarse al significado del par de números *a/b*, en un sentido restringido.

BIBLIOGRAFÍA

Block, David (1995) *Las fracciones en problemas multiplicativos.* Documento interno. México, DIE-CINVESTAV.

Brousseau, Guy (1983). “Les obstacles épistémologiques et les problémes mathématiques” en *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 2(3), pp 303-346, Francia: Pensé Sauvage Editions.

Brousseau, Guy (1987). “Fondementes et méthodes de la didadactique” en *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7(2), pp 33-115, Francia: Pensé Sauvage Editions.

Castorina, José Antonio (1994) “*Problemas epistemológicos de las teorías del aprendizaje en su transferencia a la educación*” en Perfiles Educativos, num. 65, pp. 3-16, México, DF: CISE/UNAM.

Chevallard, Yves (1985) *La transposition didactique,* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Douady, Regine (1995) “La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento”. En *Ingeniería didáctica en educación matemática,* P. Gómez (Ed.). Bogotá: Grupo
Editorial Iberoamérica.

Halbawachs, F.; Rouchier, A.; Vergnaud, G. (1981). “*Estructura de la materia enseñada, historia de la ciencias y desarrollo conceptual de los alumnos*”, en Psicología Genética y Educación, Barcelona: Oikos-Tau.

Fuenlabrada, Irma; Galvez, Grecia; Saiz, Irma(1978-1984). “*Un programa experimental de matemática en la escuela primaria*” (Documento interno), México: DIE-CINVESTAV.

Fuenlabrada, Irma; Block, David (1985). “*Alternativas curriculares para la enseñanza de la matemática en la escuela primaria*” (Documento interno), México: DIE-CINVESTAV.

Fuenlabrada, Irma (1991). “La investigación en didáctica de la matemática. Un problema actual”, en *Avance y perspectiva*, Vol. 10, Julio-septiembre pp. 226-230, México, DF.
Freudenthal, Hans (1994). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* (Textos seleccionados). México, D.F.: Matemática Educativa, CINVESTAV-UPN: Traducció y notas de Luis Puig.

Kieren, Thomas (1980) “The Rational Number Construct-Its Elements and Mechanisms”. En (Ed.),
Recent Research on Number Learning, Columbus, Ohio ERIC/ SMEC.

Kieren, Thomas (1983) “La partición, la equivalencia y la construcción de ideas relacionadas con los números racionales”, En *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*. Edit. by M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick. Estados Unidos. pp. 506-508. Traducido al español por O. Figueras, Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV. 1989.

Piaget, Jean (1960) “*Subdivisión de áreas y el concepto de fracciones*”. En: The child's conception of geometry. Routledge and Reagan Paul London. Traducción de Irma Velázquez de la Dirección General de Educación Especial 1990.

Piaget, Jean (1978). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema Central del desarrollo*, Madrid: Ed. Siglo XXI.

Piaget, Jean (1984). *La representación del mundo en el niño*. Madrid: De. Morata.
SEP, (1993). *Plan y programas de estudio 1993*. Educación Básica. Primaria, México, DF: SEP.

Vergnaud, Gerard (1983) “Actividad y conocimiento operatorio”. En *Psicología Genética y aprendizajes escolares*, C. Coll (Comp.). Madrid: Siglo XXI.

Vergnaud, Gerard (1991a). *El Niño, Las Matemáticas y La Realidad*, México: Editorial Trillas.

Vergnaud, Gerard (1991b). “La théorie des champs conceptuels” en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2,3) pp 133-170, Francia: Pensé Sauvage Editions.