Relime Vol. 2, Núm.3, noviembre, 1999 pp.5-17

Un ejemplo de aprendizaje en el sentido de Polya

Mercedes Anido de López[*]
Héctor E. Rubio Scola[*]

RESUMEN

Se trata de una experiencia de búsqueda y construcción de un conocimiento a partir de un problema utilizado como detonador. El campo de la investigación fue el conjunto de actitudes y capacidades demostradas por los alumnos de un curso de álgebra lineal preparatorio a un curso de teoría de control de la carrera de ingeniería de sistemas. Se trabajó el álgebra lineal con un enfoque geométrico y se utilizó la herramienta computacional para realizar sucesivas pruebas que llevaron al descubrimiento de propiedades. Se utilizó el sistema computacional Scilab. La rapidez de respuesta numérica de la herramienta computacional permitió un juego de búsqueda, acierto, error desarrollado por los alumnos, imposible de ser realizado, en ese nivel, por medios manuales.

RESUMO

O trabalho trata-se duma experiência da busca e contrução dum conhecimento, a partir dum problema utilizado como gatilho. O campo da investigaçâo foi o conjunto das atitudes e capacidades demonstradas pelos alunos dum curso da Algebra Lineal, preparatôrio a um curso de teoria do control, da carrera de Ingenheria dos Sistemas. Trabalhou-se a álgebra lineal com um enfoque geométrico, e se utilizou a ferramenta computacional para sucessivas provas que llevaram ao descobrimento das propriedades. Utilizou-se o sistema computacional Scilab. A rapidez da resposta numérica da ferramenta computacional permitiu um jogo da busca, acerto e erro, desenvolvida pelos alunos, impossivel de ser realizado nesse nivel pelos medios convencionais.

ABSTRACT

This paper describes how motivation can trigger the search for mathematical knowledge. The research field was the set of attitudes and abilities shown by students at a Linear Algebra course taken in preparation for a Control Theory course, a sub-part of the Systems Engineering program. A geometrical approach was used to discuss linear algebra. Thanks to Scilab, a computer-based application, successive trials led to the discovery of specific properties. The rapidity of Scilab's numeric response made it possible to use a search process of error and success which manual methods do not address at that level.

RÉSUMÉ

Cet article montre comment un problème de motivation peut servir de déclencheur à la recherche de la connaissance en mathématiques. Les acquis et les réactions d'un groupe d'étudiants d'un cours d'algèbre linéaire préparatoire au cours de Théorie de contrôle des études d'ingénierie de systèmes constituent le champ d'études. On a travaillé en algèbre linéaire de façon géométrique. L'utilisation du programme informatique Scilab a permis, après diverses tentatives, de dégager l'existence de certaines propriétés. Grâce à la vitesse de réponse numérique de l'outil informatique, les étudiants ont pu mettre en place leur propre programme de recherche et tester, par eux-mêmes, comment faire la différence entre les bonnes et les mauvaises démarches. À ce niveau d'études, le même objectif n'aurait pas pu être atteint à l'aide de méthodes de calcul manuel.

[*] FCEE-CIUNR-UNR-Argentina

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se registran los pasos que siguió un grupo de alumnos en una clase de operadores lineales desarrollada como módulo previo a un curso de sistemas dinámicos lineales.

Los resultados obtenidos en cuanto a la metodología de enseñanza-aprendizaje pueden ser transferidos a cursos de matemática aplicada en las áreas, sobre todo de ingeniería y ciencias económicas.

¿Cuál fue nuestro objetivo?

Se buscó apreciar el valor de la herramienta computacional, en cuanto a su rapidez de respuesta, en un proceso de construcción de conocimiento y realización de actividades imposibles de ejecutarse manualmente por el tiempo y esfuerzo que demandaría la operatoria matricial.

Con base en las observaciones, se volvieron a plantear preguntas, ya más focalizadas, redefiniendo y separando las hipótesis para un nuevo ciclo de investigación-acción más profundo, con sólidas hipótesis.

¿Qué herramienta computacional se eligió y por qué?

Se utilizó el paquete de programas Scilab (Basile) que desarrolla el grupo META2 en el Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA) de Francia. Este sistema se ha desarrollado con el objetivo de proveer a los expertos en matemática aplicada de una poderosa herramienta de cálculo matricial.

Scilab es un paquete CACSD de distribución gratuita por el INRIA. Es realmente un paquete de *software* científico para cálculo numérico en un entorno amigable.

Sus características son:

- Estructura de datos elaborados (matrices polinomiales, racionales y de caracteres, listas, sistemas multivariables lineales...).
- Intérprete sofisticado y lenguaje de programación con sintaxis parecida al Matlab.
- Graficación en dos y tres dimensiones. Animación.
- Estructura abierta (interface con Fortran y C vía *online* con *linkeado* dinámico).
- Bibliotecas de macros.
- Álgebra lineal (incluye matrices ralas, formas de Kronecker, Schur...).
- Control (Clásico, LQG, H-infinity...).
- Paquete para LMI (Inecuaciones Matriciales Lineales), optimización.
- Procesamiento de señales.
- Simulación (varios órdenes...).
- Optimización (diferenciable y no diferenciable, resolución LQ).
- Metanet (análisis de grafos y optimización).
- Capacidad simbólica a través de una interface con Maple.

Se puede obtener SCILAB por anonymous en:
ftp.inria.fr (internet # 192.93.2.54) Directorio:INRIA/Projects/Meta2/Scilab
ftp.unr.edu.ar (internet # 200.3.120.67) Directorio: pub/soft/scilab

¿Con qué concepción metodológica trabajamos?

Se utilizó una metodología de investigación-acción, la cual se fundamenta en una teoría interpretativa de la investigación. El docente actúa como observador participante en el contexto del proyecto de investigación-acción.

Se buscó la inmersión del investigador docente en el contexto que analiza a fin de captar el sentido de la acción de los participantes.

Para el propio docente el aula no fue un espacio físico, sino un laboratorio donde el mismo adquirió conocimiento y amplió su visión. Las preguntas, respuestas y propuestas de los estudiantes ofrecieron un campo de investigación activa no sólo en didáctica sino en la misma matemática como ciencia. La efectividad de los procesos de enseñanza-aprendizaje mejora cuando se hace del trabajo áulico un espacio de investigación. En esa línea es vigente el pensamiento de Kierkegaard cuando dice: "Ser un docente en el recto sentido, es ser un aprendiz. La investigación comienza cuando el docente aprende del alumno, poniéndose en su lugar de manera que pueda entender lo que el alumno entiende y la forma en que lo hace".

¿En que concepción epistemológica y didáctica nos basamos?

La estrategia pedagógica aplicada en este trabajo se sustenta en las ideas que diversos educadores introdujeron en las últimas décadas, a saber:

- La concepción del educando como sujeto activo de los procesos educativos.
- La concepción de la relación interactiva y dialógica entre el educador y el educando cuyo resultado es el cambio de actitudes, comportamientos y grado de conocimiento de ambos sujetos, sin que ello implique la pérdida de sus identidades y roles específicos.
- La valoración de la importancia de la motivación y la experiencia vivencial para obtener aprendizajes significativos y perdurables.
- La valoración de la relevancia de la interacción entre los aspectos cognitivos, psicomotrices y afectivos que intervienen en los procesos de aprendizaje.

¿Cuál fue el detonador para la acción?

El detonador para la acción fue el problema motivador resuelto con herramienta computacional. Cada problema fue preparado cuidadosamente, como unidad de aprendizaje. Se buscaron problemas aparentemente muy simples, pero que promovieron un intensivo trabajo de reflexión, sobre propiedades conocidas, en la búsqueda de soluciones.

¿Cuál fue el rol de la herramienta computacional? ¿Y en qué enfoque epistemológico?

En ese contexto la herramienta computacional jugó un rol determinado en relación con el enfoque epistemológico de la matemática. Nos adherimos a lo expresado por G.Polya cuando afirma que:

> *Las matemáticas son consideradas como una ciencia demostrativa, éste es sólo uno de sus aspectos. La obra matemática se nos presenta, una vez terminada, como puramente demostrativa, consistente en pruebas solamente. No obstante, esta ciencia se asemeja en su desarrollo al de cualquier otro conocimiento humano. Hay que intuir un teorema matemático antes de probarlo. Así como la idea de la prueba antes de llevar a cabo los detalles. Hay que combinar observaciones, seguir analogías y probar una y otra vez. El resultado de la labor demostrativa del matemático es el razonamiento demostrativo, la prueba; pero ésta, a su vez, es construida mediante el razonamiento plausible, mediante la intuición. Si el aprendizaje de las matemáticas refleja en algún grado la invención de esta ciencia, debe haber en él lugar para la intuición, para la inferencia plausible.*

También seguimos en nuestra metodología de enseñanza las ideas expuestas en el documento de trabajo "Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century" ICMI-STUDY, expuesto en el 8 ICMI, Sevilla, 1996, en el cual se dice que en la Universidad, aun en los cursos de nivel avanzado, la geometría debería establecer sistemáticos lazos entre teorías generales abstractas y su intuitiva y visual interpretación.

La resolución de problemas se concibe como un acto generador de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar una solución a una situación nueva.

Se admite que las matemáticas son tanto un producto como un proceso; tanto un cuerpo organizado de conocimientos como una actividad creativa en la que participa el que aprende.

En realidad, puede afirmarse que el propósito auténtico del aprendizaje de reglas, técnicas y contenido es generalmente permitir al que aprende, operar en matemáticas y, desde luego, resolver problemas. Así, la resolución de problemas puede considerarse como la verdadera esencia de las matemáticas.

¿Cuál fue nuestro problema de investigación?

Se trató de una situación didáctica que se presentó en clases de álgebra lineal consideradas como módulo previo a un curso de teoría de control.

Los sistemas dinámicos lineales son la base de la mayor parte de la modernización de sistemas utilizados en economía, ingeniería y ciencias aplicadas.

La simplificación de los mismos y partición en subsistemas más simples (desacoplamiento de sistemas) se apoya en el álgebra lineal y especialmente en los conceptos de diagonalización de una matriz y forma de Jordan. La enseñanza de la forma canónica de Jordan ha enfrentado siempre grandes dificultades por las siguientes razones:

1. La complejidad y profundidad de la teoría de fundamentos.
2. La dificultad de ejemplificación de conceptos, por medio de cálculos manuales (apenas se eleva a más de dos el orden de las matrices). Por ejemplo, la invariancia de un subespacio, el funcionamiento de una matriz en forma canónica aplicada a vectores de distintos subespacios, etcétera.
3. La falta de tiempo asignado en el currículum para aplicaciones que estimulen el interés del alumno en el aprendizaje.

Estas dificultadas generales se multiplican cuando se trata de enseñar a estudiantes que no cursan una licenciatura en matemática. Esto plantea un desafío que frecuentemente ha sido ignorado. Se trata de resistir la tentación de desarrollar los contenidos de la matemática como si los alumnos fueran potenciales matemáticos y en su lugar buscar metodologías alternativas. Aquí la herramienta computacional puede ser una importante ayuda.

Además, en los cursos de matemática especializada de las carreras profesionales se presenta una dificultad adicional: la lejanía cronológica del álgebra lineal básica trae aparejado el olvido de conceptos fundamentales para el tratamiento de los operadores lineales, como son las propiedades de los polinomios y los conceptos de espacios vectoriales y transformaciones lineales.

En este trabajo de investigación se evalúa el rol de la herramienta computacional en la solución de la segunda dificultad planteada, en cuanto a la rapidez de respuesta de la computadora en la búsqueda de ejemplificación de conceptos y verificación de propiedades.

Este proceso es a su vez fundamental para la construcción de un conocimiento significativo.

¿Cuál fue la situación áulica?

Se trabajó conforme a los siguientes ejes:

- La metodología basada en la participación activa del estudiante como agente de su aprendizaje procuró habilitarlo con el uso de programas informáticos.
- Las pautas de trabajo fueron las siguientes:

1. Los alumnos trabajaron en un laboratorio de computación (dos o tres por máquina), en el tiempo asignado a clases prácticas.
2. En un comienzo se utilizó la computadora como una gran calculadora numérica, con funciones incorporadas de álgebra lineal (sistemas computacionales para el cálculo matricial).
3. Los alumnos no recibieron nociones específicas sobre sistemas operativos ni programación, ya que existen sobre estos temas espacios y tiempos previstos en el currículum.
4. Se realizaron trabajos prácticos para el repaso y manejo de los siguientes temas: operatoria matricial, sistema de ecuaciones lineales, espacios generados, dependencia e independencia lineal, base, dimensión, rango, imagen, bases ortogonales y transformaciones lineales.

¿Cuales fueron las estrategias didácticas?

Las tareas estuvieron orientadas a la construcción del conocimiento a partir de situaciones problemáticas y al afianzamiento de conceptos. La computadora permitió ganar tiempo en cálculos rutinarios, y en plantear y resolver problemas con datos reales.

El esquema metodológico se basó en la participación activa de los estudiantes usando el recurso de la discusión. Las actividades se organizaron con propuestas sucesivas emergentes de un problema inicial motivador utilizado como detonador. Se siguió una inducción natural por las preguntas de los propios alumnos. Se diseñaron problemas motivadores (a veces de ingenua simplicidad) en un verdadero trabajo de ingeniería didáctica.

¿Cómo se recogieron los datos?

Se observaron las actitudes y capacidades del estudiante frente a problemas que involucran conceptos del álgebra lineal y que pueden ser resueltos con apoyo computacional.

a) El alumno frente a la computadora.
Se trató de detectar y consignar:

- Capacidad de relación entre simbología matemática y lenguaje computacional.
- Grado de captación de la lógica del sistema.
- Reacciones frente a las respuestas imprevistas de la computadora.

b) El alumno frente al aprendizaje.
Se evaluó y consignó:

- Interpretación y uso de la notación y lenguaje simbólico del álgebra lineal.
- Capacidad de exploración de la validez de propiedades no conocidas por analogía o por intuición.
- Capacidad de inducción de nuevos conocimientos a partir del error.
- Capacidad de demostración en pequeños problemas teóricos.
- Capacidad de planteamiento y solución de un problema de álgebra lineal en situaciones

reales.
- Criterios para el análisis de soluciones.

¿Qué observaciones registramos especialmente?

Como observadores participantes describiremos los pasos que los mismos alumnos plantearon. El texto teórico del curso es el libro *Elementary Linear Algebra*, de Stanley I. Grossman.

El primer problema que se planteó fue: diagonalizar la matriz

Paso 1: ¿Cuáles fueron los autovalores que se obtuvieron?

Los alumnos procedieron a encontrar los autovalores de la matriz utilizando la función SPEC del sistema. El vector formado por los autovalores que se obtuvieron de la matriz A en el orden dado se designará en este trabajo con la siguiente notación (los autovalores son únicos pero no forman un conjunto ordenado):

L = SPEC(A)   L = [-1, -1,   -1]

Se observó que la multiplicidad algebraica del autovalor -1 es igual a 3.

Paso 2: Cuáles son los autovectores correspondientes a los autovalores obtenidos anteriormente?

Se procedió al cálculo de los autovectores correspondientes, utilizando ahora la función KER del sistema Scilab (Basile). Para ello se recordó la definición de autovalor y autovector:

En efecto, siendo A una matriz de n por n con componentes reales o complejas, el número L(i) (real o complejo) se llama autovalor de A si existe un vector diferente de cero U tal que

A U = L(i) U

Al vector U distinto del vector nulo lo llamaron autovector de A correspondiente al autovector L(i). Esta ecuación es equivalente a la ecuación matricial

(A - L(i) I) U = 0

Esta igualdad da lugar a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, con determinante nulo por definición de autovalor. Las soluciones de este sistema forman un espacio vectorial. Resolver este sistema es equivalente a encontrar el núcleo de la transformación (A-L(i) I).

La función KER aplicada a la matriz (A - L(i) I) de nuestro sistema computacional Scilab (Basile) les proporcionó una base de este subespacio.

Sea R = KER(A-L(i) I)

Se obtuvo pues una matriz cuyas columnas son los autovalores buscados

Encontrándose que el subespacio característico asociado al autovalor -1 es de dimensión dos.

Paso 3: Buscaron respuesta natural a las preguntas:

- ¿Qué es multiplicidad geométrica?
- ¿Qué relación existe entre la multiplicidad geométrica y la algebraica?

Si L(i) es un autovalor de la matriz A, entonces la multiplicidad geométrica de L(i) es la dimensión del subespacio KER (A-L(i) I).

Los alumnos notaron que la multiplicidad geométrica es menor que la multiplicidad algebraica; por lo tanto, la matriz A no es diagonalizable. En ese caso es posible encontrar una matriz semejante a la dada, más sencilla aunque no diagonalizable.

Se propuso entonces una transformación que llevase a la matriz dada a una forma "parecida" a la forma de Jordan J.

El principal problema es encontrar una matriz que permita la transformación semejante, es decir una matriz M tal que A M = M J, donde J es la matriz de Jordan. Las columnas de M serán vectores de una base que contiene a los autovectores ya hallados. Surge un problema parecido al primero.

Paso 4: Cómo obtener vectores que constituyen una base del espacio de dimensión 3 que contiene a los autovectores calculados y cuyas columnas formen una matriz M adecuada.

En *Elementary Linear Algebra*, Stanley I. Grossman propone la utilización de las fórmulas de Filippov para calcular los llamados autovectores generalizados que nos permiten completar una base del espacio en cuestión y se justifica la fórmula para una matriz de segundo orden. Los alumnos aplicaron esa fórmula a la matriz de orden tres de nuestro problema (A+I) V=U, donde U es uno de los autovectores obtenidos y V es un autovector generalizado que se trata de encontrar.

Al tratar de resolver la ecuación con cualquiera de los dos autovectores, o sea remplazando U por cualquiera de los obtenidos se presenta una situación de incompatibilidad.

El cálculo realizado por los alumnos es el que sigue:
Matriz del sistema:

Para calcular el rango de la matriz usamos la función RANK, luego tenemos:
RANK(A+I) = 1. La matriz ampliada con la primera columna de R cuyas columnas son los autovectores de A, la notamos [A + I, R(:,1)],
Donde con R(:,i) en el sistema Scilab indicamos la columna iésima de la matriz R.

Luego

RANK([A+I, R(:,1)] = 2

La matriz ampliada con la segunda columna de R resultará

y también RANK([A+I, R(:,2)] = 2.

Se observó que la matriz de este último sistema tiene rango 1 mientras que la matriz ampliada con cualquiera de los dos autovectores tiene rango mayor. Esta situación provocó sorpresa en los alumnos ya que en el curso de álgebra lineal previo habían seguido el citado libro de Stanley I. Grossman, en el que se demuestra que para matrices de segundo orden, a partir de un autovector U existe un autovector generalizado V que satisface la ecuación (A+I) V=U

Pero la fórmula no funcionaba en este ejemplo.

¿Qué había ocurrido?

Los alumnos habían realizado una falsa inducción generalizando la proposición anterior para órdenes mayor a dos. Para estas órdenes siempre existe un autovector generalizado a partir de un vector que pertenezca al espacio característico. No obstante, el vector del cual se parte para la aplicación del algoritmo no es cualquier vector del espacio de autovectores (o autoespacio).

Es aquí donde se hace evidente la importancia de la computadora para la construcción del conocimiento mediante razonamientos plausibles, intuitivos al comienzo, con la realización de pruebas y más pruebas que estimulen una abstracción reflexiva y la búsqueda de una teoría de fundamento.

En efecto, para nuestros alumnos este ejemplo había trascendido la teoría conocida. Surge así del trabajo en clase un **segundo problema**: Encontrar un vector del espacio de autovectores que remplazado en la fórmula de Filippov nos produzca una solución.

Este problema fue atacado con distintos criterios, según los grupos de alumnos, en búsqueda intuitiva de un algoritmo teórico demostrable, o sea un teorema constructivo. Muchos grupos comenzaron a proponer vectores (sin criterio determinado) y a probar con la computadora la posibilidad de obtener rango mayores.

En todo momento el docente como observador participante trató de estimular los razonamientos geométricos.

A continuación mostraremos la propuesta particularmente interesante de un grupo de alumnos. El razonamiento que siguieron fue el siguiente: En lugar de tratar de acertar a ciegas por sucesivas pruebas (como lo hacía la mayoría de los grupos) con un vector del subespacio columna asociado a la matriz R para aplicar la fórmula de Filippov, ellos eligieron un camino distinto.

Buscaron un "pseudo vector generalizado que les permita completar una base" con cierto criterio geométrico. Este vector lo tomaron del espacio ortogonal al autoespacio utilizando la función ORT.

En efecto, se recordó que dados dos vectores linealmente independientes en el plano, una forma de obtener un vector que no pertenezca al subespacio generado por ellos es elegir un vector ortogonal al subespacio generado.

Aquí los alumnos usaron el criterio geométrico encontrando un vector que con seguridad estuviera fuera del subespacio invariante que generan los dos autovectores hallados correspondientes al autovalor (-1).

Sea V=ORT(KER(A-I))

Consideraron luego la matriz M constituida por los dos autovectores y el vector ortogonal al autoespacio: a este vector lo llamamos "pseudo vector generalizado".

M= [R, V]

Donde

Con criterio totalmente intuitivo, audaz y con la rapidez de trabajo de prueba y error que permite la computadora, aplicaron la fórmula transformación de semejanza (cambio de base) que hubieran usado con un verdadero autovector generalizado. Procedieron a realizar el producto de matrices

¿Qué resultados obtuvieron?

Obtuvieron una cierta matriz parecida a Jordan, pero no la forma canónica propiamente dicha. No se amilanaron y por eso comenzaron una nueva estrategia.

¿Qué nuevo paso dieron?

Siguieron una idea intuitiva. Utilizaron el pseudo autovector generalizado [1 ,2, -1] colocándolo en la fórmula de Filippov, en el lugar que ocuparía un verdadero vector generalizado en el primer miembro. Hicieron el producto indicado en dicho primer miembro de la fórmula y obtuvieron ahora un vector que intuían podría pertenecer al espacio generado por los autovectores obtenidos, es decir utilizaron la filosofía de la fórmula de Filippov en el sentido inverso.

En este momento se observa claramente que los alumnos siguen el proceso de "probar una y otra vez" que indica Polya y donde la rapidez de respuesta de la computadora permite efectivamente una exploración en la búsqueda de propiedades generalizables.

Haciendo el producto obtuvieron el vector:

Construyeron ahora una base formada por:

Primera columna: uno de los autovectores obtenidos.
Segunda columna: el vector resultado del primer miembro de la fórmula de Filippov (A+I) V.
Tercera columna: el vector que llamamos pseudovector generalizado (el ortogonal).

M1 = [R(:,1),(A+I) V,V]

Se hace lo mismo con el otro autovector:

M2 = [R(:,2),(A+I) V,V]

Esta matriz así construida se tomó como matriz de cambio de base de Jordan y el producto INV(M1) A1 M1. Y, oh sorpresa, el resultado obtenido por intuición fue satisfactorio. En efecto:

Es una matriz de Jordan. Sin embargo, esto no quiere decir que los pasos seguidos constituyen un algoritmo generalizable. Y ahí es donde el docente marcó la línea divisoria de las aguas e incitó a la fundamentación teórica para obtener un teorema constructivo.

¿Cuál es la fundamentación teórica de este caso?

Vamos a probar que U pertenece al espacio generado por los autovectores. Si llamamos:

L = vector formado por los autovalores obtenidos de la matriz A;
R = matriz cuyas columnas son los autovalores;
V = ORT (R), vector ortogonal al espacio generado por las columnas de R;
U = (A - L(i) I) V

Vamos a probar que U (obtenido de las fórmulas de Filippov) es una autovalor. En efecto, la matriz formada por el conjunto de vectores columnas linealmente independiente R completado con su ortogonal constituye una base del espacio.
M = [R,U]

Luego el vector A V puede descomponerse de manera única en dicha base:
A V = a V + R B, con a escalar y B vector.

Con a, b1, b2 no todos nulos. Como V no pertenece al subespacio generado por los autovectores, V no es invariante por A; por lo tanto, b1 y b2 no pueden ser ambos nulos.

Por la definición del vector U podemos despejar A V = L(i) V + U.

Luego, en virtud de la unicidad de la expresión de un vector en una base, tenemos:
L(i) = a y U = R B,
Se ve que U es combinación lineal de las columnas de R, luego pertenece al autoespacio, es decir es un autovector.

CONCLUSIONES

Las observaciones realizadas muestran la coincidencia del proceso de aprendizaje por parte de un grupo de alumnos con la concepción de aprendizaje de la matemática de Polya. En efecto, el trabajo intuitivo de pruebas sucesivas condujo a un razonamiento geométrico plausible y, una vez intuido el algoritmo, a la demostración de una propiedad.

Las herramientas computacionales proveyeron un ambiente de trabajo intelectivo y generaron "ideas" que sería imposible llevar al juego de la prueba y error, sin el apoyo de la computadora.

Si bien el trabajo descrito y consignado fue realizado por un grupo de alumnos, todos los restantes grupos mostraron gran interés en el tema tratado computacionalmente.

Generalmente el tema es tratado en las clases de álgebra lineal en niveles exclusivamente teóricos. No se llega a un manejo y afianzamiento por medio de ejemplos.

Aunque no en todos los grupos se consignaron resultados tan sorprendentemente creativos, como en el grupo de referencia, el trabajo de todos los alumnos fue intenso en la comprensión y manejo de los conceptos teóricos. Recordemos que es un tema cuya teoría, aun en las licenciaturas, se considera para "memorización de teoremas".

El álgebra lineal fue tratada por todos los alumnos como asignatura propicia para de exploración de propiedades más que una teoría impuesta previamente a toda ejemplificación.

En la experiencia descrita los alumnos llegaron a niveles de aplicación no habituales. Se apreció un crecimiento cognitivo en cuanto a la formación de conceptos y procesos.

BIBLIOGRAFÍA

Aebli, H.(1958), *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*, Editorial Kapeluz, Buenos Aires.

Anido de López, M., Bortolato, G. (1987), *Matemática e ingeniería: Bases para un diseño curricular con proyección de postgrado*, Publicación U.N.R.

Anido de López, M., Villalonga, M. (1984), "La computacion grafica", en *La Didactica de La Matematica*, Fifth International Congress on Mathematical Education, I.C.M.E.

Anido de López, M., Medina, M., Rubio Scola, H. (1995), *Laboratorio de análisis numérico matricial. Sistema Basile. Módulo I*, libro publicado por la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario.

Bitter, G.G. (1987), "Educational technology and the future of mathematics education", *School Science and Mathematics*, 87, pp. 454-465.

Bruner, J.S., Goodnow, J.J. y Austin, G.A. (1978), *El proceso mental en el aprendizaje*, Narcea, Madrid.

Bunge, M. (1980), *Epitemología*, Ariel, Barcelona.

---------- (1976), *La investigación científica*, Ariel, Barcelona.

Courant, R., Robbins, H. (1962), *¿Qué es la matemática?*, Editorial Aguilar.

Delebecque, F., Kliman, C., et Steer, S. (1989), *BASILE. TOME 1. Guide del útilisateur* (version 3.0), INRIA. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Francia. Traducido al español por Rubio Scola, H.

Freudenthal, H. (1981), "Major problems of mathematics education", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, pp. 133-150.

---------- (1982), "Fiabilité, validité et pertinence - critères de la recherche sur l'enseignement de la matthématique", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 13, pp. 395-408.

---------- (1991), *Revisiting mathematics education: China lectures*, Dorcrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gantmacher, F. R. (1959), *The Theory of Matrices*, vols. 1 y 2, Chelsea Pub. Co., Nueva York.

Hoffman, K. and Kunze,R (1961), *Linear Algebra*, Prentice-Hall.

Kilpatrick, J. (1982).Research on mathematical learning and thinking in the United States,*Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 2.3, 393-379.

Kilpatrick, J.(1993), "Beyond face value: Assessing Research in Mathematics Education", in Nissen, G. and Blomhoj, M. (eds), *Critica for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics*, Roskilde University Denmark, pp. 15,34.

Lakatos, I. (1975), *La falsación y la metodología de los programas de investigación científica. La Crítica y el Desarrollo de l conocimiento*, Grijalbo, Barcelona.

Lascoux, P., Theodor, R. (1986), *Analyse numerique matricielle apliquee a l'art de l'ingenieur*, Editorial Masson.

Laub, A., Little (1997), *J. PC-MATLAB. User's Guide*.

Lawson, M.J. (1990), "The case for instruction in the use of general problem-solving strategies in mathematics teaching: A comment on Owen and Sweller", en *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, pp. 401-410.

Lesh, R. Landau, M. (1983), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. Academic Press*, Nueva York.

Mascó de Nasini, A., López, R., *Lecciones de álgebra y geometría analítica*, Editorial Universitaria Cultura Argentina.

Méndez, R. y otros, *El protocolo de investigación, lineamiento para su elaboración y análisis*, Ed. Trillas.

Piaget, J.(1972), *Lógica y psicología*.

--------- (1971), *Seis estudios de psicología*. Editorial Barral.

---------, *Psicología de la inteligencia*, Editorial Psique.

Polya G. (1981), *Matemática y razonamiento plausible*, Editorial Tecnos, Madrid.

---------, *Cómo plantear y resolver problemas*, Editorial Trillas, México.

Popper, K. (1977), *La lógica de la investigación científica*, Tecnos, Madrid.

Rubio Scola, H. (1993), "Implementación del sistema BASILE en DOS", *IV Encuentro Académico Tecnológico, Universidad Nacional del Noreste*, Resistencia, Argentina.

Schuman, L. S. (1989), "Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: una perspectiva contemporánea", en Wittrock (1989), *La investigación de la enseñanza I: enfoques, teorías y métodos*, Paidós, MEC, Barcelona.

Sierpinska, A. (1993), "Critica for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics", in Nissen, G. and Blomhoj, M. (eds.), *Critica for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics*, Roskilde University Denmark, pp. 35-74.

Stenhouse (1987), *La investigación como base de la enseñanza*, Morata, Madrid.

Strang, G., *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, Fondo Educativo Interamericano.

The Student Edition of Matlab (1992), *The problem-solving Tool for Engineers, Mathematicians and Scientists*, The Matlab Curricum Series Prentice-Hall.

Wittmann, E. Ch. (1984), "Teaching Units as the Integrating Core of Mathematics Education", *Educational Studies in Mathematics* 15, pp. 25-36.

Wittmann, E. Ch. (1995), "Mathematics Education as Design Science", *Educational Studies in Mathematics*, 29(4), pp. 355-374.

Wolfram, S., *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*, Secon Edition, Addison-Wesley Publishin Company.

Datos de los autores:

Mercedes Anido de López es profesora y directora del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadísticas, Universidad Nacional de Rosario (UNR), Argentina. Es también profesora de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA), UNR y Facultad Regional Rosario de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN).
Ha escrito tres libros y numerosos artículos sobre metodología de la enseñanza y computación gráfica.

Dirección profesional: Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadísticas, Universidad Nacional de Rosario (UNR), Bulevar Oroño 1261, 2000, Rosario, Argentina.

FAX = 54 341 4802654
E-mail:anidom@fceia.unr.edu.ar

Héctor E. Rubio Scola es profesor del Departamento de Electrónica de la FCEIA, UNR y investigador del Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Rosario (CIUNR). Ha sido profesor de diversas Facultades de la UTN y ha escrito dos libros y numerosos artículos sobre metodología de la enseñanza, optimización lineal y teoría de control.

Dirección profesional: Departamento de Electrónica de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (UNR), Río Bamba 245 bis, 2000 Rosario, Argentina.

E-mail:erubio@fceia.unr.edu.ar
FAX = 54 341 4802654