Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 3, Núm. 1, marzo, 2000, pp. 5-31

La creación de exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis[Ψ]

David Dennis*
Jere Confrey*

Aprendí empíricamente que ésto surgió, que usualmente surge; pero, ¿lo dice la propuesta matemática? Aprendí empíricamente que éste es el camino por el que viajé. Pero, ¿es *ése* el de la propuesta matemática? ¿Qué es lo que dice? ¿Qué relación tiene con estas proposiciones empíricas? La propuesta matemática tiene la dignidad de una regla.

Ludwig Wittgenstein (1967, p. 47e)

RESUMEN

El siguiente es un trabajo de investigación histórica que se enfoca en momentos matemáticos específicos donde los métodos, conceptos y definiciones experimentaron profundos cambios. Hay dos metas principales. Primero, bosquejar la historia del desarrollo de un concepto de exponentes continuos y segundo, examinar cuidadosamente el escenario epistemológico en el que este desarrollo se llevo a cabo. Puesto de manera más simple, qué fue lo que convenció a ciertos matemáticos de que sus conceptos eran viables. No pretende ser una discusión histórica completa, sino más bien una serie de instantáneas. Los detalles matemáticos de estos momentos se dan en la medida en que sean necesarios para entender la epistemología.

ABSTRACT

Tbe following is a work of historical investigation that focuses on specific mathematical moments where methods, concepts, and definitions underwent profound changes. There are two main goals. First to sketch the history of the development of a continuous concept of exponents, and second to examine carefully he epistemological setting in which these developments took place. Put more simply, what was it that convinced certain mathematicians that their concepts were viable. It is not intended to be a complete historical discussion, but rather a series of illuminating snapshots. The mathematical details of these moments are provided to the extent necessary for an understanding of the epistemology.

RÉSUMÉ

Il s'agit ici d'un travail de recherche historique sur des périodes spécifiques de la recherche en mathématiques, au cours dequelles les méthodes, les concepts et les définitions ont connu de profonds changements. Nous avons fixé deux objectifs principaux. Premièrement, esquisser l'histoire du développement du concept continu des exposants et en deuxième lieu, examiner minutieusement le contexte épistémologique à l'intérieur duquel les développements en ques-

[Ψ]La publicación de este artículo es posible gracias al convenio entre Relime y CBMS (Conference Board of the Mathematical Science) Issues in Mathematics Education. Versión castellana de The Creation of Continuous Exponents: A Study of the Methods and Epistemology of John Wallis. Confrey, Dennis (1996). Vol 6, 33-60

*Cornell University, Ithaca, New York.

tion ont pu se produire. Autrement dit, qu'est-ce qui a pu convraincre un certain nombre de mathématiciens de la viabilité de leurs concepts? Il ne s'agit pas ici d'entamer une réflexion historique exhaustive, mais plutôt de présenter une série de photographies de certaines périodes. Nous n'indiquerons d'éléments mathématiques que lorsque ceuxci pourront permettre une meilleure compréhension de l'épistémologie.

RESUMO

Este é um trabalho de pesquisa histórica que é enfocado em momentos matemáticos específicos, onde os métodos, conceitos e definições passaram por profundas mudanças. Há duas principais metas: Primeiro, esboçar a história do desenvolvimento do conceito contínuo de expoentes e o segundo, examinar cuidadosamente o cenario epistemológico onde desenvolveuse o mesmo. Colocado de forma mais simple, que foi o que convenceu a alguns matemáticos de que seus conceitos eram viáveis. Não pretende ser uma discusão histórica completa, e sim uma serie de discusões instantâneas. Os detalhes matemáticos desses momentos ocurrem na medida que sejam necesarios para compreender a epistemologia.

INTRODUCCIÓN

Dentro de un marco constructivista, estudiamos las concepciones de los estudiantes para desarrollar aproximaciones a los conceptos que hagan uso de las invenciones y del uso creativo de recursos de los estudiantes. Nuestra meta es mejorar su entendimiento sobre las ideas matemáticas. Sin embargo, encontramos que investigadores educados de una manera tradicional en matemáticas, por lo general fallan al reconocer o legitimar los métodos de los estudiantes y necesitan ampliar el entendimiento de posibles rutas hacia el desarrollo de una idea (nos incluimos en esta descripción). La historia ha probado ser ideal para ésto, debido a que proporciona fuentes ricas para una conceptualización alternativa y rutas diversas hacia el desarrollo de una idea. Así, hemos encontrado que es una fuente provocativa y estimulante de preparación para "escuchar de cerca" la matemática del estudiante (Confrey, 1993).

Es más, la investigación histórica invariablemente va más allá de su descripción original. Nuestra investigación histórica nos guía en la construcción de tareas provocadoras para nuestra entrevistas. Nos lleva a formular propuestas alternativas para el desarrollo curricular e instruccional. Y nos da oportunidades para la formación del profesor: a través de la exploración de un ejemplo histórico, podemos ayudar al profesor a profundizar tanto su conocimiento del contenido como la perspectiva sobre el mismo. Pero, quizá, más que nada, nuestro trabajo histórico nos lleva a reconceptualizar nuestras creencias sobre la epistemología de las matemáticas. Nuestro trabajo histórico afecta nuestra perspectiva epistemológica, y ésta influye en la manera en la que nos involucramos e interpretamos la historia. Argumentaremos que lo cíclico en este argumento no es una debilidad sino una necesidad. El trabajo histórico sirve para informarnos sobre el presente, pues muchas de nuestras suposiciones actuales salen a la luz a través del trabajo histórico.

Reconocemos que no hay manera en la que el trabajo histórico pueda ser exacto cuando es reconstruido por los alumnos modernos. Sin embargo, utilizando los textos originales (cuando sea posible) y localizando el trabajo dentro de un contexto socio-cultural e histórico y asumiendo una historia pluralista, podemos intentar entenderla desde la perspectiva de sus creadores. Los estándares metodológicos aplicados se derivan de un conjunto de suposiciones epistemológicas que guían todo nuestro programa de investigación.

Las amplias suposiciones epistemológicas que subyacen en esta investigación histórica incluyen las siguientes:

1. Una visión Lakatosiana acerca de que el desarrollo de las ideas matemáticas se caracteriza como una serie de conjeturas y refutaciones. Lakatos documenta las limitaciones de una metodología formalista que esconde las conjeturas osadas y enmascara los debates y refutaciones para presentar sólo el producto final del trabajo. Tomamos la visión de que las matemáticas son el proceso de proponer, desarrollar, modificar y revisar las ideas propias y que la prueba, un criterio normativo que señala la aceptación comunitaria de una idea, representa sólo una parte de ese proceso. Cerca del final de su vida, Lakatos comienza a describir las matemáticas como cuasi-empíricas, con lo cual se refería a su progreso vía un conjunto de heurísticas. Al entender y concordar con la preocupación de Lakatos concerniente a que las matemáticas deben ser vistas como algo más que un conjunto de axiomas euclidianos, encontramos en el uso del término "cuasi-empíricas" algo irónico.

Muchas matemáticas se desarrollaron como un medio para describir lo que los científicos hacían y, como resultado, no es claro dónde dibujar la línea entre lo cuasi-empírico y lo empírico. El matemático moderno R. Courant (1888-1972) escribió acerca de C.F. Gauss que:

"*Él (Gauss) nunca se preocupó de ningún contraste, ni siquiera una línea delgada de demarcación, entre la teoría pura y las aplicaciones. Su mente iba de las aplicaciones prácticas, impávido por el compromiso requerido, a las abstracciones teóricas más puras, y de regreso, inspirando e inspirado en ambos fines. A la luz del ejemplo de Gauss, el abismo que se abre en el último periodo entre las matemáticas puras y las aplicadas, aparece como un símbolo de la limitada capacidad humana. Para nosotros, actualmente, a medida que nos sofocamos en la especialización, el fenómeno de Gauss sirve como una exhortación... resulta crítico para el futuro de nuestra ciencia que las matemáticas adopten este curso, tanto en la investigación como en la educación*" (Courant, 1984, p. 132).

2. Como una extensión de la visión de Lakatos, vemos la historia de las matemáticas como la coordinación y el contraste entre diversas formas de representación. En la historia, por lo general, uno ve una forma particular de representación como la primera para la exploración, mientras que otra puede formar la base de la comparación para decidir si el resultado es correcto. La representación que confirme debe ser relativamente independiente de, o contrastante con, la primera representación exploratoria. Debe mostrar contraste así como coordinación para la idea que se quiere. Por ejemplo, Descartes por lo general generó sus curvas como un lugar de puntos trazando ciertos movimientos en el plano. El álgebra fue utilizada como medio para describir la curva, y

como resultado, construyó los ejes de manera conveniente a su descripción. Los ejes podían ser perpendiculares u oblicuos dependiendo de la situación. Si se ideaba un argumento de similitud, el eje oblicuo por lo general era construido de forma paralela a alguna línea en la construcción: si se utilizaba el teorema Pitagórico, se construía un eje perpendicular (Smith, et. al.; 1992) (Dennis, 1995). Así, el plano cartesiano moderno no fue el punto de inicio para el plano de Descartes, sino que fue generado como una representación descriptiva alternativa. Este sentido se pierde y se distorsiona en nuestra currícula actual donde el plano Cartesiano es tratado predominantemente como un medio para exhibir ecuaciones algebraicas. Esta tergiversación histórica no es atípica. En contraste, proponemos el uso de la idea de una *epistemología de múltiples representaciones* (Confrey, 1992) (Confrey y Smith, en prensa). Esta aproximación nos lleva a examinar los registros históricos para documentar tales cuestiones; por ejemplo, qué formas de representación fueron más influyentes para un matemático, qué marcos se utilizaban para la confirmación, qué representaciones estaban disponibles como parte del "conocimiento estándar" por un periodo de tiempo y cómo el matemático se movía a lo largo de estas representaciones para crear, modificar y extender la actividad matemática. Al leer este trabajo, uno verá cómo el uso de las ideas geométricas sobre área y volumen informa acerca del razonamiento que involucra fórmulas algebraicas y cómo éstas son útiles para confirmar conjeturas audaces concernientes a patrones en tablas. Estos patrones posteriormente crean una transición importante que abre la puerta para admitir series infinitas en el razonamiento matemático. El tejer estas formas de representación crea el marco que permite un pensamiento matemático progresivo.

3. En contraste con lo que es explícitamente desarrollado por Lakatos, creemos que el periodo socio-cultural del trabajo ejerce una influencia significativa sobre su desarrollo matemático. Cuando sea posible, dentro de un registro histórico ligero, nos introduciremos en esa información.

Crear una reconstrucción del desarrollo histórico de los conceptos matemáticos es una tarea difícil por varias razones. Entre éstas se incluyen una relativa falta de acceso a los textos originales, la dificultad, en cuanto a notación, de interpretar el texto original tal y como aparece, la tendencia a encontrar fuentes secundarias que distorsionan el registro histórico convirtiéndolo indiscriminadamente a la notación o formas modernas (ver Unguru 1976 para tales críticas) y a una relativa insuficiencia de trabajo histórico en matemáticas[1].

Nuestra tarea, consiste en dar la descripción del desarrollo de exponentes racionales. Deseamos entender este desarrollo en un nivel más profundo que el de simplemente asumir que el desarrollo de exponentes racionales fue un problema de extender un patrón numérico y sus propiedades. Lo que encontramos fue que la historia revela diferencias en el uso de ideas sobre potencias, índices y exponentes. Para que un concepto generalizado de exponentes continuos fuera aceptado como matemática legítima, primero tuvo que validarse a través de diversas representaciones: tabla aritmética, geometría y álgebra. La historia de la creación de exponentes continuos está fuertemente ligada a la evolución de las nociones de área, límite de razones, razones con números

[1]Para un buen ejemplo del tipo de trabajo histórico que se requiere ver (Fowler, 1987).

negativos y funciones continuas en general. Sin este amplio contexto, sólo las potencias enteras positivas eran aceptadas por toda una generación de matemáticos.

4. Realizamos esta investigación histórica a la luz de la "conjetura de separación" (*splitting conjeture*) (Confrey, 1988) (Confrey, 1994). De acuerdo a esta conjetura, Confrey postula una diferente base cognitiva para separar *versus* contar. Sugiere que el fundamentar, en las escuelas, la multiplicación como una adición repetida, implica negar el desarrollo de una idea paralela pero relacionada acerca de reparto equitativo, de reproducción, magnificación, etc. Su mundo de la separación incluye el desarrollo interrelacionado de la razón, similitud, multiplicación, división, unidades multiplicativas, razones y funciones exponenciales. Bajo esta perspectiva, conducimos nuestra investigación histórica considerando cuidadosamente cómo el uso de la geometría y la razón ilumina el desarrollo del pensamiento matemático, buscando evitar enmascarar esas distinciones en una descripción algebraica genérica.

FUNDAMENTO HISTÓRICO

El siguiente es un trabajo de investigación histórica que se enfoca en momentos matemáticos específicos donde los métodos, conceptos y definiciones experimentaron profundos cambios. Hay dos metas principales. Primero, bosquejar la historia del desarrollo de un concepto de exponentes continuos y segundo, examinar cuidadosamente el escenario epistemológico en el que estos desarrollos se llevaron a cabo. Puesto de manera más simple, qué fue lo que convenció a ciertos matemáticos de que sus conceptos eran viables. No pretende ser una discusión histórica completa, sino más bien una serie de instantáneas. Los detalles matemáticos de estos momentos se dan en la medida en que sean necesarios para entender la epistemología.

El enfoque principal de este trabajo es sobre los métodos matemáticos de John Wallis (1606-1703) y en particular, su influyente trabajo, el *Arithmetica Infinitorum* (Wallis, 1972), publicado por primera vez en 1655. Aunque no fue la primera persona en sugerir el uso de exponentes fraccionarios, su trabajo da razones de peso para su adopción. Después de leer a Wallis, el joven Isaac Newton (1642-1722) se inspiró para derivar su serie binomial general (Whiteside, 1961). La serie binomial fue, a su vez, la herramienta principal utilizada por Leonard Euler (1707-1783) para explorar el mundo de las funciones continuas incluyendo las exponenciales con base natural y las logarítmicas (Euler, 1988). El trabajo de estos tres hombres se llevó a cabo en un escenario empírico sin recursos para pruebas lógicas formales. Revisaron y volvieron a revisar diferentes representaciones una contra otra hasta que se convencieron de la validez de sus resultados. Las pruebas formales del siglo XIX surgieron a partir de estos resultados pero, por lo general, ocultan los métodos.

Wallis abiertamente evoca una aproximación empírica o heurística a la verdad matemática. Él se convence de la validez de sus matemáticas a través de una serie de conjeturas y confirmaciones. Sus argumentos centrales dependen de una coordinación de múltiples representaciones. Estas incluyen tablas numéricas, álgebra y geometría. Para Wallis, una definición se vuelve razonable cuando emerge como un patrón en una representación pero que también puede confirmarse a través de estar de acuerdo con otra. El que una idea sea razonable en un escenario nunca fue suficiente para Wallis. Sus primeras investigaciones, por lo general, se llevaron a cabo en el escenario de sucesiones numéricas y tablas. Después, visualizaba una confirmación a través del álgebra y la geometría.

Wallis practicaba la inducción y, por esta palabra, no se refiere a la inducción matemática formal, sino a la inducción informal o científica. Esto es, él visualizaba un patrón, verificaba una serie de ejemplos y después asumía que su regla era válida en tanto "no encontrara una sospecha por la que podría fallar" (Nunn, 1909-1911, p. 385). Sus contemporáneos Fermat (1601- 1665) y Pascal (1623-1662) llevaron a cabo pruebas formales por medio de inducción matemática. Fermat criticó los métodos de Wallis como sugestivos pero incompletos. Wallis respondió diciendo que él estaba tratando de desarrollar una teoría de conocimiento que fuera superior al análisis lógico de resultados conocidos. Afirmó que Fermat "trató de manera totalmente errada ese tratado [es decir, el *Arithmetica Infinitorum*] el cual no era tanto para mostrar un método de Demostrar cosas ya conocidas, como para mostrar una manera de Investigación o hallazgo de cosas aún desconocidas" (citado en Nunn, 1909-1911, p. 385). Wallis sentía que los antiguos matemáticos estaban en posesión de un método así pero era "cuidadosamente escondido" (Nunn, 1909-1911, p. 385) y cubierto por medio del análisis lógico.

Wallis estaba preocupado por la acción en lugar de la justificación lógica. En esto, él era parte de un movimiento filosófico general lejos del pensamiento neoplatónico del Renacimiento basado en los griegos. En el siglo XVII, los textos romanos se volvieron más populares que los griegos. Los trabajos de Séneca y otros filósofos estoicos romanos fueron revividos. El pensamiento romano es, en forma general, mucho más práctico y empírico que el pensamiento griego. El lenguaje claro y directo es altamente valorado.

Wallis era un experto en muchos lenguajes. Entre otros, dominaba el latín, griego, hebreo y probablemente el árabe. Empezó a destacar durante las guerras civiles en Inglaterra. Ayudó al Partido Parlamentario a descifrar con rapidez los mensajes Reales codificados capturados en 1642 (Scott, 1981, p. 6). Este servicio le permitio conseguir un puesto en Oxford durante el mando de Oliver Cromwell. Un instinto para los patrones y el lenguaje marca todo su trabajo. Al leer el trabajo de Wallis se debe considerar cómo trabaja un criptógrafo. No necesita dar pruebas lógicas de que su interpretación sea correcta, más bien, cuando una interpretación tiene sentido, su trabajo ha finalizado.

Para entender las porciones del trabajo de Wallis que presentaremos es necesario conocer las fórmulas polinomiales para la suma de potencias enteras de los primeros *n* enteros. Estas fórmulas aparecen en el *Arithmetica Infinitorum* de Wallis (Wallis, 1972) sin hacer mención de dónde las obtuvo o de cómo las derivó. Los matemáticos del siglo XVII rara vez daban referencias y los historiadores han especulado sobre las diversas posibles fuentes de Wallis para estas fórmulas. Aparecen en varias fuentes francesas del siglo XVII incluyendo los trabajos de Fermat y Pascal (Boyer, 1943). Otra posible fuente interesante para Wallis pudo haber sido su lectura de textos árabes. Wallis leía árabe y estas fórmulas aparecen en el trabajo de Abu Ali al-Hasan ibn al-Haitham (965-1039) conocido en occidente como Alhazen. Wallis definitivamente tuvo acceso a algunos de los trabajos matemáticos de Alhazen, pero los historiadores no han sido capaces de verificar de manera directa y exacta qué texto leyó[2].

Debido a que el punto central de este trabajo es el uso de material histórico para propósitos educativos, comenzaremos con una de-

[2]Recientemente Victor Katz ha investigado esta cuestión en detalle.

ducción de las fórmulas de suma basada en el texto de Alhazen (Baron, 1969; Edwards, 1979). Este método para derivarlas encaja muy bien con los conceptos que aparecen en el *Arithmetica Infinitorum*, aunque sólo exista evidencia circunstancial sobre qué fuente Wallis realmente leyó[3]. Al discutir el trabajo de Wallis, nos mantendremos muy de cerca a la forma y notación de los trabajos originales. El trabajo de Alhazen, sin embargo, no se discutirá en su forma original. Los matemáticos árabes no desarrollaron el álgebra simbólica, por lo que las fórmulas de Alhazen se escribieron con palabras. Para abreviar, a las derivaciones de Alhazen se les da una forma algebraica moderna.

Debe hacerse notar aquí que incluso nuestra presentación de las derivaciones de Alhazen son de alguna manera controversiales. Las figuras geométricas que presentaremos en la siguiente sección, no aparecen en los textos arábicos de Alhazen. Algunos historiadores (Katz, 1993) han interpretado esta porción de un trabajo de Alhazen como puramente aritmético, mientras otros (Baron, 1969) han interpretado este trabajo geométricamente, como lo haremos nosotros. En la era de los manuscritos escritos a mano, muchos trabajos geométricos (incluyendo a Euclides) por lo general carecían de figuras; contenían en su lugar, instrucciones para la construcción de figuras. Uno no puede simplemente confiar en los escritos para reproducir acertadamente las figuras. Estas fórmulas para las sumas son deducidas al comienzo de un trabajo de Alhazen que es puramente geométrico (concerniente a los volúmenes de los paraboloides) y, en general, el trabajo de Alhazen es mucho más geométrico que el de otros matemáticos árabes de su tiempo. Por estas razones, nos parece que la interpretación geométrica que hace Baron de estas fórmulas es razonable.

Poniendo de lado estas cuestiones sobre autenticidad histórica, la principal razón de haber elegido comenzar con estas derivaciones surge de nuestro enfoque educativo. Si los estudiantes están por entrar a las interpolaciones de tablas de John Wallis y realmente entienden su significado, deben ser capaces de entender y aceptar las fórmulas para las sumas que él da por sentadas. De todas las maneras que conocemos para derivar estas fórmulas, esta interpretación libre del trabajo de Alhazen parece ser la más apropiada para nuestros propósitos educativos, debido a que produce estas fórmulas algebraica enlazándolas con una representación geométrica.

FÓRMULAS DE SUMA DE ALHAZEN Y POTENCIAS MAYORES QUE TRES

Alhazen era tanto físico como matemático. Su trabajo estaba basado en la tradición geométrica griega, pero también trató de obtener resultado empíricos prácticos en óptica y astronomía. Los matemáticos griegos (con la excepción de Diofanto y Herón) no mencionaron potencias mayores que tres debido a que no podían ser interpretadas directamente en geometría, es decir, como longitudes, áreas o volúmenes. Alhazen quería calcular nuevos resultados concernientes a áreas y volúmenes los cuales involucraban la suma de potencias mayores que tres. Por ejemplo, calculó el volumen generado al rotar una parábola sobre una línea perpendicular a su eje de simetría (ver figura 1). Para un estudiante moderno, esto involucraría integrar un polinomio de cuarto grado. Alhazen estableció que el volumen es 8/15 del volumen del cilindro circunscrito. En la tradición de Eudoxo, él estableció las sumas superiores e inferiores de los cortes cilíndricos y después los afinó cada vez más. Debido a que el radio de cada

[3]Victor Katz, por ejemplo, se inclina a creer que Wallis obtuvo estas fórmulas a partir del trabajo de Faulhaber, pero entonces la pregunta surge en la forma de qué fuente utilizó Faulhaber.

corte cilíndrico cumple con una función cuadrática, las áreas forman una potencia cuarta. La suma de las áreas de estas rebanadas involucra la suma de potencias cuartas (Edwards, 1979, p. 85).

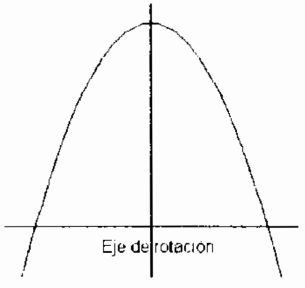

FIGURA 1

Alhazen derivó las fórmulas para las sumas de potencias mayores coordinando una interpretación geométrica con una representación numérica. El uso que le dio a las áreas para representar potencias terceras y cuartas, rompió con las estrictas interpretaciones geométricas de la matemática griega. Su método puede utilizarse para hallar una fórmula para la suma de potencias de los primeros n enteros para cualquier potencia entera positiva. Su extensión del concepto de potencias tenía sentido aritméticamente, pero fue validada a través de sus derivaciones de nuevos resultados geométricos.

Alhazen derivó sus fórmulas colocando primero una sucesión de rectángulos cuyas áreas repre-sentan los términos de la suma (Edwards, 1979, p. 84) . Un rectángulo de área a^k se forma utilizando lados de longitud a^{k-1} y a. Después, llena el rectángulo con una serie de tiras entrelazadas (ver figuras 2, 3 y 4 que están a escala). Alhazen estableció a continuación, el producto de las dimensiones del rectángulo como igual a la suma de sus partes rectangulares. Cada una de las fórmulas puede deducirse de la anterior. Las tiras de la parte superior, sin embargo, involucran una doble sumatoria salvo en la primera deducción.

Para obtener una fórmula para la suma de los primeros n enteros, ver figura 2.

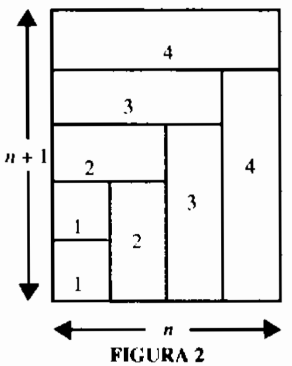

FIGURA 2

$$n(n+1)=\sum_{i=1}^{n} i+\sum_{i=1}^{n} i$$

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\sum_{i=1}^{n} i=1+2+3+\ldots+n$$

Para obtener una fórmula para la suma de cuadrados de los primeros n enteros, ver Figura 3.

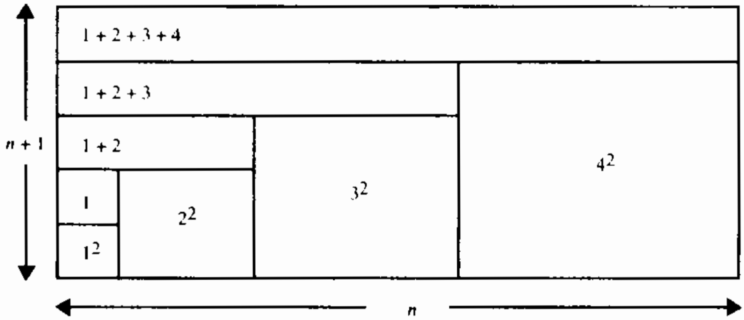

FIGURA 3

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)(n+1)=\sum_{i=1}^{n} i^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i} k\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right)(n+1)=\sum_{i=1}^{n} i^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}i^2+\frac{1}{2}i\right)$$

$$\frac{1}{2}n^3+n^2+\frac{1}{2}n=\sum_{i=1}^{n} i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right)$$

$$\frac{1}{2}n^3+\frac{3}{4}n^2+\frac{1}{4}n=\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

(2) $$\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n=\sum_{i=1}^{n} i^2=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

Notar que (1) se utilizó dos veces al obtener (2).

Para obtener una fórmula para la suma de cubos de los primeros n enteros, ver Figura 4.

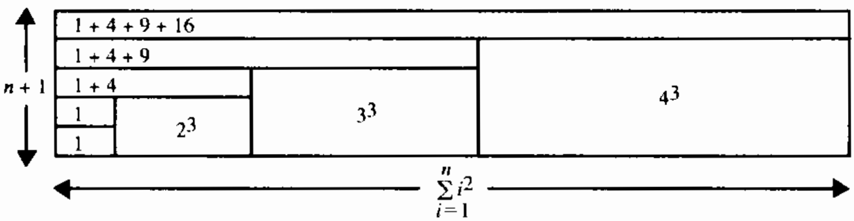

FIGURA 4

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)(n+1) = \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i} k^2\right)$$

$$\left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right)(n+1) = \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3}i^3 + \frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{6}i\right)$$

$$\frac{1}{3}n^4 + \frac{5}{6}n^3 + \frac{4}{6}n^2 + \frac{1}{6}n = \sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} i^3 +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right)$$

$$\frac{1}{3}n^4 + \frac{4}{6}n^3 + \frac{4}{12}n^2 = \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{n} i^3$$

(3) $$\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

Notar que aquí (2) se utilizó dos veces y (1) se utilizó una vez.

Una fórmula para la suma de las primeras n potencias cuartas puede derivarse continuando con este método. Primero hay que establecer una serie de rectángulos cuyos lados horizontales sean los cubos y cuyos lados verticales sean enteros sucesivos. Llenándolo de tiras y procediendo de la manera anterior se llega a la fórmula deseada, aunque el álgebra se vuelve más tediosa. Deben utilizarse las tres fórmulas anteriores. Esta derivación se deja como ejercicio para el lector. Este método puede extenderse para llegar a la fórmula de la suma de las primeras n potencias para cualquier potencia entera. Este es un esquema general recursivo para las formulas pero en cada etapa no sólo puede utilizarse una fórmula, sino varias.

Para referencia futura, he aquí las Fórmulas de Alhazen:

(1) $$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

(2) $$1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$(3)\qquad 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$$

$$(4)\qquad 1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$$

Para calcular el volumen de la parábola rotada en la Figura 1, la sumatoria que se necesita es:

$$\sum_{i=1}^{n}(n^2-i^2)^2=\frac{8}{15}n^5-\frac{1}{2}n^4-\frac{1}{30}n$$

la cual se obtiene de (2) y (4) sustituyendo y organizando términos. La fórmula dentro de la sumatoria es el cuadrado del radio de cada rebanada (Edwards, 1979, p. 84).

Debe quedar claro que los resultados sobre áreas y volúmenes no fueron dados como fórmulas sino siempre como razones. Esto se cumple para casi todos los resultados matemáticos hasta el final del siglo XVII. Por ejemplo, el área de un triángulo es la mitad del área del paralelogramo que lo contiene. El volumen de una pirámide es un tercio del paralelepípedo que lo contiene. El área de un trozo de parábola es dos tercios del rectángulo que la contiene. El área de un círculo es $\pi/4$ del cuadrado que lo contiene. Estos ejemplos eran conocidos en el siglo II A.C. La razón de 8/15 de Alhazen es una continuación de esa tradición, pero tuvo que coordinar la geometría y la aritmética de una nueva manera para hallarla. En el trabajo de John Wallis veremos una consideración elaborada de las razones de las áreas utilizada para justificar su definición de exponentes fraccionarios y negativos. Él realizó un uso extensivo de esas sumas y, en la validación final de sus ideas, la razón 8/15 de Alhazen aparece en una de sus tablas.

EL ARITHMETICA INFINITORUM DE JOHN WALLIS

La yuxtaposición de las sucesiones aritméticas y geométricas se remonta al menos hasta Aristóteles. La idea de que uno pudiera insertar valores en una tabla así, utilizando medios aritméticos por un lado y medios geométricos por el otro, también es antigua. El concepto de exponentes fraccionarios es sugerido de varias maneras en los trabajos del siglo XIV de Oresme y en los trabajos de Girard y Stevin del siglo XVI. (Boyer, 1968, capítulos XIV y XV). La construcción de tablas de logaritmos por Napier y otros, a principios del siglo XVII, implica la posibilidad de calcular esas potencias aunque no fue esa la manera como el propio Napier interpretó su trabajo. Es importante notar que estas primeras discusiones se llevaron a cabo dentro del mundo de las tablas numéricas y no había una coordinación total con la geometría. Debido a que la geometría era entonces la forma dominante de las matemáticas, estos primeros trabajos nunca llevaron al desarrollo o aceptación de los exponentes fraccionarios.

La Geometría de René Descartes (Descartes, 1952), publicada primero en 1638, fue el primer tratado publicado que utiliza exponentes enteros positivos escritos como superíndices. Descartes vio a los exponentes como un índice para una multiplicación repetida. Esto es, él escribió x^3 en lugar de xxx. Wallis adoptó este uso de un índice y trató de extenderlo y probar su validez a través de múltiples representaciones.

Wallis tomó de Fermat la idea de utilizar una ecuación para generar una curva, lo cual contrastaba con el trabajo de Descartes, quien siempre comenzaba con una construcción geométrica. Descartes siempre construyó una curva primero geométricamente y después la analizaba para encontrar su ecuación (Smith, et. al.; 1992). Fermat independientemente desarrolló una geometría de coordenadas, pero su aproximación era más algebraica (Mahoney, 1973). Él comenzó con ecuaciones y después vio las curvas que generaban. Esta aproximación es tomada por Wallis. Su tratamiento de secciones cónicas, por ejemplo es muy similar a la de Fermat (Boyer, 1956).

Wallis propone la noción de índices fraccionarios (exponentes) y muestra cómo esta noción puede ser validada tanto en escenarios algebraicos como geométricos (Wallis, 1972). La consideración de áreas bajo curvas da a Wallis una representación alternativa para validar su definición aritmética propuesta sobre índices fraccionarios. Las definiciones de Wallis tienen un impacto duradero en las matemáticas debido a que él demuestra su viabilidad a través de múltiples representaciones. El encontrar estas áreas bajo curvas era un viejo problema que se remontaba a Arquímedes. Comenzando en el siglo XIV con Oresme, el problema sobre cómo hallar el área bajo una curva se volvió importante debido a que las curvas eran utilizadas para representar las magnitudes de velocidad en el tiempo. El área bajo una curva representaba, entonces, el cambio total en cuanto a posición. Este contexto fue establecido en el siglo XIV por Oresme en su *Latitud de las Formas* (Calinger, 1982, p. 224). A principios del siglo XVII, Galileo utilizó este concepto de manera extensa.

La geometría era considerada como la principal representación en matemáticas en el siglo XVII. Esto es evidente en el trabajo de Barrow y de otros en ese tiempo (Boyer, 1968). La aritmética y el álgebra eran consideradas, en el mejor de los casos, como las formas de lenguaje escrito para la discusión de la verdad geométrica. Algunos eruditos incluso dudaban si la aritmética y la geometría pudieran alguna vez hacerse consistentes. Wallis invierte este orden y considera la aritmética como su primera representación (Cajori, 1929). Para validar sus resultados aritméticos, tuvo que mostrar que se someten a las conclusiones geométricas aceptadas. Para hacer esto, primero obtuvo una serie de razones aritméticas y después dedujo a partir de ellas muchas de las razones conocidas de áreas y volúmenes.

El *Arithmetica Infinitorum* (Wallis, 1972) contiene una investigación detallada sobre el comportamiento de sucesiones y razones a partir de las cuales se obtienen una variedad de resultados geométricos. Veremos algunos de los ejemplos más importantes. Considérese la razón de la suma de una sucesión (de una potencia fija) con una serie de términos constantes todos iguales al valor más grande que aparece en la suma. Wallis considera razones de la forma:

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k} \tag{5}$$

Para cada valor entero fijo de k, Wallis investigó el comportamiento de estas razones cuando n se incrementa. Sus investigaciones son de carácter empírico. Por ejemplo, cuando $k = 1$, él calcula:

$$\frac{0+1+2}{2+2+2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{0+1+2+3}{3+3+3+3} = \frac{1}{2} \qquad \frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4} = \frac{1}{2} \quad \text{etc.}$$

Cuando n se incrementa, esta razón se mantiene fija en 1/2. Esto puede verse a partir de la bien conocida fórmula de suma (1) en una forma factorizada. El numerador es $\frac{n(n+1)}{2}$, mientras que el denominador es $n(n+1)$. Wallis llama al 1/2, la *razón característica* del índice $k = 1$.

Cuando $k = 2$, Wallis calcula las siguientes razones:

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2+4^2}{4^2+4^2+4^2+4^2+4^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5^2+5^2+5^2+5^2+5^2+5^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30}$$

Wallis establece que el lado derecho de las ecuaciones es siempre igual a

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$$

Para ver esto, él aplica otra fórmula de suma, (2), en una forma factorizada. El numerador es siempre igual a

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

mientras que el denominador es igual a $n^2(n+1)$. Cuando n se incrementa, esta razón se aproxima a 1/3, por lo que Wallis define entonces la razón característica del índice $k = 2$ como igual a 1/3. De manera similar, calcula las razones características de $k = 3$ como 1/4, y $k = 4$ como 1/5. Entonces hace una afirmación general en torno a que la razón característica del índice k es $\frac{1}{k+1}$ para todos los enteros positivos k.

En todos estos ejemplos, Wallis comienza con la sucesión {0, 1, 2, 3, 4, ...} y después eleva cada término al índice bajo consideración. Wallis asegura, sin embargo, que sus valores para las razones características están validados para cualquier sucesión aritmética que comience con cero. El cambiar la diferencia entre los términos sólo introduciría un múltiplo constante en todos los términos tanto en el numerador como en el denominador y así las razones permanecerían inalterables. Por ejemplo, la suma de los cuadrados de cualquier sucesión aritmética (que comience con cero) dividida entre un número igual de términos todos iguales al término más grande (ejemplo, $\frac{0^2+2^2+4^2+6^2}{6^2+6^2+6^2+6^2}$ se seguiría aproximando a 1/3 entre más términos se tomen).

Wallis prosiguió entonces a mostrar que estas razones características conducen a la mayoría de las razones conocidas en geometría sobre área y volumen. Aquí es donde muestra que su aritmética era consistente con las verdades aceptadas de la geometría. Sus suposiciones básicas sobre la naturaleza del área y volumen fueron tomadas del *Geometria Indivisibilibus Continuorum* (1635) de Cavalieri. El asumió que un área es la suma de un número infinito de segmentos de líneas paralelas[4] y que un volumen es una suma de un número infinito de áreas paralelas. Wallis primero consideró el área bajo la curva $y = x^k$ (ver figura 5). Quería calcular la razón del área sombreada con respecto al área del rectángulo que la encierra.

[4]Esta concepción de curva como una serie de segmentos de línea erigidos a lo largo de una línea hace surgir los términos "abscisa" y "ordenada". Abscisa en latín significa "lo que se corta" y contiene la misma raíz que nuestra palabra "tijeras". Las Ordenadas son las series ordenadas de segmentos de línea que se erigen a partir de lo que se corta (abscisa). Estos términos fueron inventados por Leibniz.

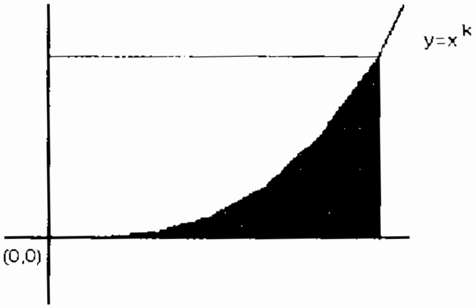

FIGURA 5

Wallis estableció que el problema geométrico es un ejemplo de la razón característica de la sucesión con índice k. Los términos en el numerador son las longitudes de los segmentos de línea que forman el área sombreada mientras que los términos en el denominador son las longitudes de los segmentos de línea que forman el rectángulo (por consiguiente, constantes). Debido a que estos cocientes son válidos para cualquier sucesión aritmética, él imaginó el incremento o escala como muy pequeño cuando el número de términos es muy grande. Así, por ejemplo, el área bajo una parábola es 1/3 del área de un rectángulo[5]. Esta razón geométrica es exactamente 1/3 debido a que el área se forma a partir de un número infinito de segmentos de línea. Debe hacerse notar que esta razón característica de 1/3 se mantiene para todas las parábolas, no sólo para $y = x^2$. Por ejemplo, si vemos el cálculo de la razón para $y = 5x^2$, tanto el área bajo la curva como el área del rectángulo están multiplicadas por 5 y, entonces, la razón característica de 1/3 se mantiene igual. La razón característica depende sólo del exponente y no del coeficiente. Esto es, *la razón característica no es lineal.*

Esta razón característica de x^2 también muestra que el volumen de una pirámide es 1/3 del paralelepípedo que lo contiene (ver figura 6). La pirámide es la suma de una serie de

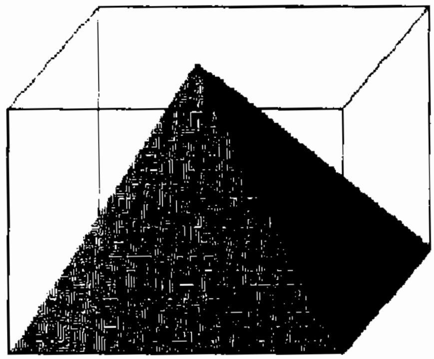

FIGURA 6

cuadrados cuyos lados se están incrementado de forma aritmética. El paralelepípedo es una serie de cuadrados cuyos lados son constantes y siempre iguales al cuadrado más grande. Así, Wallis ve éste como otro ejemplo del cálculo de la razón característica para el índice $k = 2$. Lo mismo es cierto para la razón de un cono con respecto al cilindro que lo contiene. Aquí todos los términos, tanto del numerador como del denominador son multiplicados por π.

Estos resultados geométricos no eran nuevos. Fermat, Roberval, Cavalieri y Pascal, habían hecho esta declaración acerca de que cuando k es un entero positivo, el área bajo la curva $y = x^k$ guardaba una proporción de $\frac{1}{k+1}$ respecto al rectángulo que lo contiene (Edwards, 1979, capítulo 4). Pascal había dado una prueba de inducción formal para este resultado. Wallis,

[5] El lector escéptico puede fijar el intervalo de 0 a M y después hacer que n+1 sea el número de subintervalos de igual tamaño. Se establece la suma inferior de Riemann dividida por el área del rectángulo. Cancelando lo factores comunes se llega a (5). Las sumas de Riemann, sin embargo, se basan en sumas de áreas de rectángulos y esta no era la concepción de Wallis sobre área.

sin embargo, asegura que si definimos el índice de $\sqrt{x}$ como 1/2, la afirmación sigue siendo verdadera. Debido a que el área bajo la curva $y = \sqrt{x}$ es el complemento del área bajo $y = x^2$ (es decir, el área no sombreada de la figura 5), debe tener una razón característica de

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1}$$

Lo mismo puede verse para $y = \sqrt[3]{x}$, cuya razón característica debe ser

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{\frac{1}{3} + 1}$$

Fue esta coordinación de dos representaciones separadas lo que dio a Wallis la confianza de afirmar que el índice apropiado de $y = \sqrt[q]{x^p}$ debe ser p/q y que la razón característica debe ser

$$\frac{1}{\frac{p}{q} + 1}$$

Wallis continuó afirmando que esto era cierto incluso cuando el índice es irracional. Analizó un ejemplo así, cuando el índice es igual a $\sqrt{3}$.

En muchos casos, Wallis no tenía manera de verificar directamente la razón característica de un índice, por ejemplo: $y = \sqrt[3]{x^2}$. Aquí, invoca el principio de "interpolación". Él acuñó este término de la raíz latina "pulir". Afirmó que cuando uno puede discernir un patrón de cualquier tipo en una sucesión de ejemplos, uno tiene el derecho de aplicar ese patrón para cualesquiera valores intermedios, si es posible. Esto es decir que uno puede intentar siempre pulir en medio. Nunn (1909-1911) llama a esto el principio de continuidad, y establece que este es un gran paso hacia el desarrollo de la teoría de funciones continuas. Su influencia en Newton fue profunda.

Wallis fue algo audaz con este principio de interpolación, pero siempre buscó alguna manera de verificar de dos modos sus conjeturas de patrones a través de una interpretación fuera de su representación original. Esta confirmación a través y a lo largo de representaciones es lo que hace que sus interpolaciones sean tan imponentes. Él trató de construir una teoría continua que conectara las tres pequeñas islas de verdad aceptadas. Con esto en mente, veamos una sección subsecuente del *Arithmetica Infinitorum*, que contiene su interpolación más famosa.

¿Cómo podemos determinar la razón característica del círculo?. Esta es la pregunta que motivó a Wallis a estudiar una familia particular de curvas a partir de la cual pudiera interpolarse el valor para el círculo. Escribió la ecuación del círculo de radio r como $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y la consideró en el primer cuadrante. Él quería determinar la proporción de esta área con el del cuadrado de r por r que la contiene. Por supuesto, sabía que esta razón es $\pi/4$, a partir de varias construcciones geométricas que se remontan a Arquímedes, pero él quería probar su teoría del índice, razón característica e interpolación llegando a este resultado de una nueva manera. Esto daría una comprobación de la teoría a través de la coordinación de representaciones.

La ecuación del círculo no se somete a los métodos que él había desarrollado hasta aquí. Cualquier estudiante de cálculo confronta esto cuando encuentra que la regla general de potencia no integra el círculo. Wallis buscó una familia de ecuaciones en la que pudiera incluir la ecuación del círculo. Consideró la familia de curvas definidas por las ecuaciones $y = \left({}^{q}\ r - {}^{q}\ x\right)^{p}$

Esta familia es binomial, simétrica e incluye la ecuación de un círculo como un caso especial $(p = q = \frac{1}{2})$ [6].

La figura 7 muestra las gráficas de las ecuaciones de Wallis en el cuadrado unitario (r = 1) para $p = \frac{1}{2}$, $q = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots, 5$ y para $q = \frac{1}{2}$, $p = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots, 5$. La línea $y = x$ se ha añadido para desplegar la simetría.

Si p y q son enteros, él sabía que expandiendo $y = \left(\sqrt[q]{r} - \sqrt[q]{x}\right)^{p}$ y utilizando su regla para razones características, podría determinar la razón para estas curvas. La figura 8 muestra esto como la proporción del área sombreada con el rectángulo que la encierra,

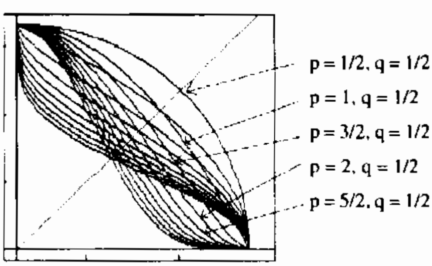

FIGURA 7

todas estas curvas pasan por (r, 0) y que la altura del rectángulo es $\sqrt[q]{r^{p}}$

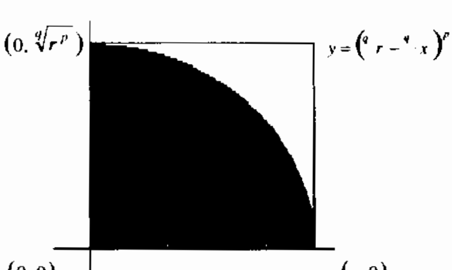

FIGURA 8

El círculo puede verse como el caso cuando $p = \frac{1}{2}$ y $q = \frac{1}{2}$. Nótese que Wallis está interpretando $\sqrt[2]{x}$ como $x^{\frac{1}{2}}$. Él también permite que p ó q sean cero. Interpreta x^{0} como 1 basandose en su regla de razón característica. Debido a que $y = x^{0}$ debe tener una razón característica de 1, debe ser una línea horizontal. Debido a que 1 elevado a cualquier potencia es 1, esta línea horizontal debe estar a la altura de 1.

Wallis calculó entonces la razón característica cuando p y q son ambos enteros. Por ejemplo, si $p = q = 2$, entonces:

$$y = \left(r - \ x \right)^{2} = r - 2\ r\ \ x + x$$

y debe tener también la razón característica de

$$1 - 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Pueden notarse varias cosas acerca de este cálculo. Primero, Wallis utilizó la sucesión de valores de x : {0, 1, 2, 3, ..., r}y después permitió que r se incrementara. Asumió que el cálculo era válido para cualquier sucesión aritmética. Así, su razón característica es independiente del valor de r [7]. Esto lo confirmó empíricamente calculando numerosos ejemplos. Segundo, al observar el término de enmedio, puede parecer a primera vista que debido a que la razón característica de $\sqrt{x}$ es 2/3, el -2 aparece para seguir en un modo lineal. Pero, como hemos dicho anteriormente, las razones características no son lineales. La razón característica de $2\sqrt{x}$ sigue siendo 2/3. Sin embargo, en este caso el cálculo es válido debido a que el máximo valor de la curva total está determinado por el término constante r. Debido a que todos

[6] La simetría de esta familia de curvas puede verse reescribiendo las ecuaciones en la forma $x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}} = r^{\frac{1}{p}}$. El invertir x & y tiene un efecto similar al de invertir p y q. Esta forma también despliega su relación con la ecuación del círculo en la forma $x^{2} + y^{2} = r^{2}$.

[7] Uno puede considerar a "r" como el factor de escala para el sistema de coordenadas que ba sido impuesto según una curva preexistente.

los valores en el denominador son r, el coeficiente del término de enmedio no se factoriza en el denominador y por lo tanto, no se cancela.

Después de calcular las razones características cuando p y q son enteros, Wallis notó que todas eran fracciones unitarias y que los denominadores eran los números binomiales. Estos números han sido conocidos desde tiempos remotos y recién fueron sido discutidos por Pascal y otros en el siglo XVII. Wallis invirtió después estas razones para que se convirtieran en enteros e hizo una tabla con ellos. La Tabla 1 registra la razón del rectángulo con respecto al área sombreada (ver figura 8) para cada una de las curvas $y = \left(\sqrt[q]{r} - \sqrt[q]{x}\right)^p$.

En este punto, Wallis abandonó temporalmente tanto las representaciones geométricas como algebraicas y comenzó a trabajar solamente en la representación en tabla. La pregunta se convirtió entonces en, ¿cómo uno interpola los valores faltantes en esta tabla? [8]

Wallis prosiguió de la siguiente manera. Primero trabajó sobre las filas con valores enteros de q. Cuando $q = 0$, vemos el valor constante 1, por lo que la llenamos con unos. Cuando $q = 1$, vemos una progresión aritmética, por lo que la llenamos con medias aritméticas. En la fila $q = 2$ tenemos números triangulares que son la suma de los enteros de la fila $q = 1$. Así, podemos utilizar la fórmula de la suma de enteros consecutivos, $\frac{s^2 + s}{2}$

p =	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
q = 0	1		1		1		1		1
$\frac{1}{2}$									
1	1		2		3		4		5
$\frac{3}{2}$									
2	1		3		6		10		15
$\frac{5}{2}$									
3	1		4		10		20		35
$\frac{7}{2}$									
4	1		5		15		35		70

TABLA 1

[8] En este punto, el lector quizá desee intentar sus propios cálculos para completar la tabla. Si estas ideas se van a utilizar con estudiantes, esto puede generar una discusión fascinante.

donde $s = p + 1$. Esta fórmula aparece en el margen de su tabla. El poner los valores intermedios en esta fórmula, nos permite completar la fila $q = 2$. Por ejemplo, haciendo $s = \frac{3}{2}$ con esta fórmula se obtiene 15/8, la cual se convierte en la entrada donde $p = \frac{1}{2}$ y $q = 2$.

Los números en la fila $q = 3$ son los números piramidales, cada uno de los cuales es la suma de los enteros en la fila $q = 2$. Así, la fórmula apropiada se encuentra sumando la fórmula de la fila $q = 2$. Aplicando las primeras dos fórmulas de Alhazen y después acomodando los términos, Wallis obtuvo

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{s}\left(i^2+i\right)=\frac{s^3+3s^2+2s}{6}$$

la cual aparece en el margen de su fila $q = 3$. Haciendo $s = \frac{3}{2}$, por ejemplo, se obtiene 105/48 que es la entrada de la tabla donde $p = \frac{1}{2}$ y $q = 3$ (de nuevo $s = p + 1$).

De manera similar, Wallis sumó la fórmula cúbica anterior para obtener una fórmula para la fila $q = 4$. Utilizando las primeras tres fórmulas de Alhazen y después organizando términos, obtenemos:

$$\frac{s^4+6s^3+11s^2+6s}{24}$$

Este procedimiento completa las filas donde q es un entero, aplicando las fórmulas a los valores intermedios. Debido a que la tabla es simétrica, esto también nos permite llenarla con las columnas correspondientes cuando p sea un entero. Wallis creó posteriormente una tabla con sus fórmulas para interpolación escritas al margen (ver Tabla 2)[9].

q= \ p=	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	
0	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
$\frac{1}{2}$	1		$\frac{3}{2}$		$\frac{15}{8}$		$\frac{105}{48}$		$\frac{945}{384}$	
1	**1**	$\frac{3}{2}$	**2**	$\frac{5}{2}$	**3**	$\frac{7}{2}$	**4**	$\frac{9}{2}$	**5**	s
$\frac{3}{2}$	1		$\frac{5}{2}$		$\frac{35}{8}$		$\frac{315}{48}$		$\frac{3465}{384}$	
2	**1**	$\frac{15}{8}$	**3**	$\frac{35}{8}$	**6**	$\frac{63}{8}$	**10**	$\frac{99}{8}$	**15**	$\frac{s^2+s}{2}$
$\frac{5}{2}$	1		$\frac{7}{2}$		$\frac{63}{8}$		$\frac{693}{48}$		$\frac{9009}{384}$	
3	**1**	$\frac{105}{48}$	**4**	$\frac{315}{48}$	**10**	$\frac{693}{48}$	**20**	$\frac{1287}{48}$	**35**	$\frac{s^3+3s^2+2s}{6}$
$\frac{7}{2}$	1		$\frac{9}{2}$		$\frac{99}{8}$		$\frac{1287}{48}$		$\frac{19305}{384}$	
4	**1**	$\frac{945}{384}$	**5**	$\frac{3465}{384}$	**15**	$\frac{9009}{384}$	**35**	$\frac{19305}{384}$	**70**	$\frac{s^4+6s^3+11s^2+6s}{24}$

TABLA 2

[9]Para ver la tabla original de Wallis, ver Wallis (1972, p. 458) ó Struik (1969, p. 252).

La regla más familiar para la formación de una tabla binomial nos dice que cada entrada debe ser la suma de otros dos, una de las cuales aparece dos espacios arriba y la otra, dos espacios a la izquierda. Uno puede verificar ahora que los nuevos valores interpolados también siguen esta regla de formación. Nótese que el 15/8 ocurre en el lugar $p = 2$, $q = \frac{1}{2}$. El área bajo esta curva envuelve exactamente la misma suma que aparece en el cálculo del volumen del paraboloide de Alhazen y la interpolación es consistente con el resultado de Alhazen.

Con estas entradas ahora en su lugar, Wallis vuelve su atención a la fila $q = \frac{1}{2}$. Cada una de las entradas que ahora aparecen son calculadas utilizando cada una de las fórmulas sucesivas de interpolación que aparecen en los márgenes. Cada una de estas fórmulas tiene un grado algebraico más alto. ¿Qué patrones existen en la formación de estos números que nos permitan interpolar entre ellos para hallar las entradas faltantes?[10] Recuérdese que la primera entrada faltante es $q = p = \frac{1}{2}$ (es decir, la proporción del cuadrado con el área del cuarto de círculo) y también, si nuestras manipulaciones de la tabla tienen que ser validadas de nuevo en la representación geométrica, este valor debe ser $4/\pi$.

$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{105}{48}$	$\frac{945}{384}$

Al principio, Wallis intentó llenar esta fila con promedios aritméticos. El promedio de 1 y 3/2 es 5/4. Pero si $4/\pi$ es igual a 5/4, entonces $\pi = 3.2$ lo cual no es muy correcto. Si se intenta un promedio geométrico, el valor para se hace más grande (aproximadamente 3.266)

Wallis observó ahora que cada uno de los numeradores en estas fracciones es el producto de enteros impares consecutivos, mientras que cada uno de los denominadores, es el producto de enteros consecutivos pares. Esto es,

$$\frac{15}{8} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \qquad \frac{105}{48} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

y
$$\frac{945}{384} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$$

Aquí, para mover dos entradas hacia la derecha en esta fila, uno multiplica por $\frac{n}{n-1}$. Para las entradas hasta aquí, n siempre es impar. Por lo que Wallis asumió que para ir de una entrada faltante a la siguiente, uno debía seguir multiplicando por $\frac{n}{n-1}$, pero esta vez, n tendría que ser un número par intermedio. Denotando la primera entrada faltante por Ω [11], entonces la siguiente entrada faltante sería $\frac{4}{3}\Omega$, y la siguiente sería

$\frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5}\Omega = \frac{8}{5}\Omega$, y la que sigue, $\frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7}\Omega = \frac{64}{35}\Omega$,

etc. La fila $q = \frac{1}{2}$ sería:

$\frac{1}{2}$	1	Ω	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}\Omega$	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{5}\Omega$	$\frac{105}{48}$	$\frac{64}{35}\Omega$	$\frac{945}{384}$

[10] De nuevo, retamos al lector a detenerse y tratar por sí mismo de llenar las entradas faltantes.
[11] Wallis utilizó un pequeño cuadrado para denotar la entrada faltante.

La columna $p=\frac{1}{2}$ puede ahora llenarse por simetría. La fila $q=\frac{3}{2}$ tiene un patrón similar (esto es, productos de impares consecutivos sobre pares consecutivos) pero ahí las entradas a dos espacios hacia la derecha están siempre multiplicadas por $\frac{n}{n-3}$. Uno puede verificar de dos maneras, como Wallis lo hizo, que esta ley de formación concuerda con la ley usual para la formación de binomiales, esto es, cada entrada es la suma de las entradas dos arriba y dos a la izquierda. Llenando el resto de las entradas de esta manera, resulta la Tabla 3.

p=	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	
q= 0	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
$\frac{1}{2}$	1	Ω	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}\Omega$	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{5}\Omega$	$\frac{105}{48}$	$\frac{64}{35}\Omega$	$\frac{945}{384}$	
1	**1**	$\frac{3}{2}$	**2**	$\frac{5}{2}$	**3**	$\frac{7}{2}$	**4**	$\frac{9}{2}$	**5**	s
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{4}{3}\Omega$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}\Omega$	$\frac{35}{8}$	$\frac{64}{15}\Omega$	$\frac{315}{48}$	$\frac{128}{21}\Omega$	$\frac{3465}{384}$	
2	**1**	$\frac{15}{8}$	**3**	$\frac{35}{8}$	**6**	$\frac{63}{8}$	**10**	$\frac{99}{8}$	**15**	$\frac{s^2+s}{2}$
$\frac{5}{2}$	1	$\frac{8}{5}\Omega$	$\frac{7}{2}$	$\frac{64}{15}\Omega$	$\frac{63}{8}$	$\frac{128}{15}\Omega$	$\frac{693}{48}$	$\frac{512}{35}\Omega$	$\frac{9009}{384}$	
3	**1**	$\frac{105}{48}$	**4**	$\frac{315}{48}$	**10**	$\frac{693}{48}$	**20**	$\frac{1287}{48}$	**35**	$\frac{s^3+3s^2+2s}{6}$
$\frac{7}{2}$	1	$\frac{64}{35}\Omega$	$\frac{9}{2}$	$\frac{128}{21}\Omega$	$\frac{99}{8}$	$\frac{512}{35}\Omega$	$\frac{1287}{48}$	$\frac{1024}{35}\Omega$	$\frac{19305}{384}$	
4	**1**	$\frac{945}{384}$	**5**	$\frac{3465}{384}$	**15**	$\frac{9009}{384}$	**35**	$\frac{19305}{384}$	**70**	$\frac{s^4+6s^3+11s^2+6s}{24}$

TABLA 3

La tabla está ahora completa excepto por la determinación del valor de Ω. Uno puede intentar pensar que ya está, debido a que conocemos a partir de consideraciones geométricas que Ω debe ser igual a $4/\pi$. Wallis ya sabía de Arquímedes una manera para evaluar π inscribiendo polígonos en el círculo. Este antiguo método para calcular π lleva, algebraicamente, a la serie de raíces cuadradas anidadas, obtenida cada una duplicando el número de lados en el polígono. Utilizar este resultado geométrico en este punto, sin embargo, podría violar todo el programa de Wallis. Él tenía que hallar una manera para calcular Ω utilizando el principio de interpolación para que pudiera verificar este valor con el conocido a partir de la geometría. Sólo de esta manera podría crear un experimento crítico capaz de probar y validar su método de interpolación[12].

[12]El filósofo Thomas Hobbes llama al trabajo de Wallis como una "picardía de símbolos". Hobbes no ve razón por la cual los resultado del álgebra tengan que ser consistentes con los de la geometría. La respuesta de Wallis a estos comentarios fue desconcertante para el filósofo Hobbes (Cajori, 1913).

Así que, se regresa de nuevo a la fila $q = \frac{1}{2}$ donde, moviendo dos espacios hacia la derecha a partir de la n-ésima entrada, se multiplica esa entrada por $\frac{n}{n-1}$. Wallis notó que, a medida que n se incrementa, la fracción $\frac{n}{n-1}$ se acerca cada vez más a 1.

Así, el número, dos espacios a la derecha, debe cambiar muy poco cuando continuamos con la sucesión. Esto es cierto en las fracciones calculadas así como en los múltiplos de Ω Wallis argumentó que dado que toda la sucesión es monótona creciente, entonces los términos consecutivos deben también acercarse uno al otro a medida que avanzamos. Así, cuando al construir estos términos, deberíamos tener que:

$$\Omega \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot ...}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot ...} \approx \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot ....}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot ...}$$

$$\Omega \approx \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9....}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10...}$$

Debido a que Ω debe ser igual a $4/\pi$, las interpolaciones de Wallis se justifican dado que:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot ...}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot ...}$$

Si uno calcula este producto infinito, converge a π. Esto es, concuerda con los resultados de Arquímedes y otros que anteriormente habían calculado π mediante una representación geométrica. Esta última coordinación de representaciones múltiples fue lo que le confirmó a Wallis la viabilidad de su principio de interpolación. Esta fue una manera totalmente nueva para calcular y se volvió famosa. Se menciona con regularidad en libros modernos de análisis y se discuten sus conexiones con otros tópicos, pero rara vez alguien menciona su significado epistemológico. Este cálculo es un experimento empírico crítico que confirma la consistencia de la geometría y la aritmética. Esto, como Wallis diría, ha sido "estudiosamente conciliado" por medio del análisis lógico. Wallis quería que su trabajo transmitiera la utilidad de métodos empíricos en la investigación dentro de las matemáticas. Ver este resultado sólo como una nueva manera para calcular π es "errar totalmente el diseño del tratado" (Nunn, 1909-1911, p. 385).

Los métodos empíricos de Wallis llevaron al joven Isaac Newton a su primera creación matemática profunda: la expansión de las funciones en series binomiales (Whiteside, 1961). El lector interesado deberá leer las anotaciones de Newton a Wallis contenidas en sus primeras notas para ver qué tanto este método de interpolación se convierte para Newton en la base de su noción de continuidad (Newton, 1967). Newton generaliza los métodos de Wallis, pero por varias generaciones, la epistemología utilizada por Wallis permanece siendo la fuerza dominante en matemáticas. Las investigaciones elaboradas por Euler en el siglo XVIII, las cuales incluyen expansiones de series sobre números complejos y la solución de muchas ecuaciones diferenciales, permanecen, sin embargo, enraizadas en una epistemología empírica de representaciones múltiples (Euler, 1988).

CONCLUSIONES

Los métodos de investigaciones bosquejados en este trabajo han sido bastante depurados en nuestro curriculum matemático. Estos resultados matemáticos son ahora presentados a los estudiantes en un escenario lógico formal que surgió en los siglos XIX y XX. Son presentados como algo hecho, un objeto terminado. Prácticamente no queda ningún sentido de la actividad de investigación. Tanto para los especialistas en matemáticas como para los no especialistas, este tipo de presentación es la dominante en nuestros salones de clase.

La práctica de la conjetura por analogía y el uso de la inducción informal, combinada con la coordinación de representaciones múltiples, vigorizará nuestras prácticas de enseñanza. Para los no especialistas, muchos métodos prácticos de razonamiento matemático son totalmente encubiertos. Así que, muchos resultados en matemáticas pueden ser presentados mucho antes y en un contexto mucho más simple si los métodos empíricos fueran fomentados. Incluso para el estudiante que elige especializarse en matemáticas, la mayor parte del proceso de invención nunca se destaca, aunque mucho del trabajo de un matemático profesional se lleva a cabo de esta manera.

La disponibilidad de calculadoras y computadoras hacen posible, para muchos, ocuparse de especulaciones empíricas. Más aún, mucho de lo más interesante del área de la investigación moderna en matemáticas se lleva a cabo como experimentos de computadora. La geometría fractal desarrollada por Mandelbrot y otros es un buen ejemplo. Han sido construidas nuevas imágenes sorprendentes que involucran poco análisis formal. Estos métodos empíricos han sido ahora aplicados profundamente en biología. Recientemente, algo de la investigación matemática más original ha provenido del exterior a los departamentos de matemáticas.

En resumen, diremos que es más bien la acción matemática que el resultado lo que conlleva de manera más profunda al significado. En la construcción de un escenario matemático es donde estas acciones pueden verificarse a través de diferentes representaciones que producen confianza en la viabilidad de un método. El entendimiento del método es lo que fortalece a los estudiantes. El análisis lógico puede ser muy bonito y satisfactorio a su manera, pero es como una araña tejiendo su telaraña en el castillo de las matemáticas. El peligro es que después de un tiempo, uno comience a creer que las telarañas sostendrán el castillo[13]. Los estudiantes expuestos sólo a una currícula tradicional, sobretodo formal, están especialmente propensos a este peligro. ❏

[13] "Los desarrollos en este siglo orientados hacia las bases de las matemáticas se sintetizan mejor en una historia." En la ribera del Rhin, se erigía un hermoso castillo desde hacía siglos. En el sótano del castillo, una intricada red de telarañas había sido construida por dos arañas trabajadoras que vivían ahí. Un día, un fuerte viento comenzó a soplar y derribó la telaraña. Las arañas frenéticamente trabajaron en la reparación del daño. Pensaron que era su telaraña lo que sostenía al castillo" (de Morris Kline en Mathematics, la Pérdida de la Certeza, p. 277)

BIBLIOGRAFÍA

Baron, M.(1969). *The Origins of Infinitesimal Calculus*, Pergamon. London.

Boyer, C.B. (1968). *A History of Mathematics,* Willey, New York.

Boyer, C.B. (1956). *History of Analytic Geometry*, Chapters III-V. Scripta Mathematica, New York.

Boyer, C.B. (1943). Pascal´s formula for the sums of powers of integers, en: *Scripta Mathematica* 9, 237-244.

Cajori, F. (1913). History of exponential and logarithmic concepts, en: *American Mathematical Monthly* 20.

Cajori, F. (1929). Controverses on mathematics between Wallis. Hobbes, and Barrow, en: *The Mathematics Teacher* XXII(3), 146-151.

Calinger, R. (1982). *Classics of Mathematics*. Moore, Oak Park. IL.

Confrey, J. (1988). Multiplication and splitting: their role in understandig exponential functions. en: *Proceedings of the Tenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA)*, DeKalb. IL.

Confrey, J. (1992). Using computers to promote students´ inventions on the function concept. This Year in School Science 1991. en: Malcom, Roberts & Sheingold, (Eds.). *American Association for the Advancement of Science*. Washington DC, 131-161.

Confrey, J. (1993). Learning to see children´s mathematics: crucial challenges in constructivist reform. The Practice of Constructivism in Science Education. Tobin, K. (Ed.), en: *American Association for the Advancement of Science*. Washington DC, 299-321.

Confrey, J. (1994). Splitting, similarity, and range of change: New aproaches to multiplication and exponential functions. en: *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (Harel. G. And Confrey,J., eds.), State University of New York Press, Albany NY, 293-332.

Confrey, J. & Smith, E. (en prensa). *Applying and epistemology of multiple representations to histoical analysis: A review of "democratizing the access to calculus: New routes to old roots"* by James Kaput, Mathematical Thinking and Problem Solving (Schoenfeld, A., ed.), Lawrence Erlbaum Assoc. Inc., Hillsdale NJ.

Courant, R. (1984). Gauss and the present situation of the exact sciences, en: *Mathematics: People, Problems, Results* (Campbell,D. And Higgins,J., ed.), vol.I, Wadsworth International, Belmont CA, 125-133.

Dennis, D. (1995). *Historical perspectives for the reform of mathematics curriculum: geometric curve drawing devices and their role in the tansition to an algebraic description of functions* (unpublished doctoral dissertartation), Cornell University, Ithaca, NY.

Descartes, R. (1952). *The Geometry*, (Translated by D.E. Smith and M.L. Latham), Open Court, LaSalle, IL.

Edwards, C.H. (1979). *The Historical Developtment of Calculus*, Springer-Verlag, New York.

Euler, L. (1988). *Introduction to Analisys of the Infinite*, (Translated by J.D. Blanton), Springer-Verlag, New York.

Fowler, D. H. (1987). *The Mathematics of Plato´s Academy: A New Reconstruction*, Clarendon Press, Oxford.

Katz,V. (1993). *A History of Mathematics; An Introduction*, Harper Collins, New York.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations, The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, New York.

Mahoney, M.S. (1973). *The Mathematical Career of Pierre de Fermat*, Princetown University Press, Princeton NJ.

Newton,I. (1967). *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Volume I: 1664-1666, Cambridge University Press, Cambridge.

Nunn, T.P. (1909-1911). The arithmetic of infinites, en: *Mathematics Gazete* 5, 345-356 y 377-386.

Scott, J.F. (1981). *The Mathematical Work of John Wallis*, Chelsea Publishing Co., New York.

Smith, E., Dennis, D. & Confrey, J. (1992). Rethinking functions, cartesian constructions, en: *The History and Philosophy of Science in Science Education, Proceedings of the Second International Conference on the History and Philosophy of Science and Science Education* (S.Hills,ed.). The Mathematics, Science, Technology and Teacher Education Group; Queens University, Kingston, Ontario.

Struik, D.J. (1969). *A Source Book in Mathematics: 1200-1800*, Harvard University Press, Cambridge MA.

Unguru, S. (1976). On the need to rewrite the history of Greek mathematics, en: *Archive for History of Exact Sciences* 15(2), 67-114.

Wallis, J. (1972). *Arithmetica Infinitorum*, Opera Mathematica, vol.I, Georg Olms Verlag, New York, 355-478.

Wittgestein, L. (1967). *Remarks on the Foundations of Mathematics*, (translated by G.E.M. Anscombe). MIT Press,Cambridge MA.

Whiteside, D.T. (1961). Newton and discovery of the general binomial theorem, en: *Mathematics Gazette* 45, 175-180.

Whiteside, D.T. (1960-1962). Patterns of mathematical thought in the later 17th century, en: *Archive for History of Exact Sciences*, vol. I, 179-388.

APÉNDICE

Exponentes Negativos y Razones

Por lo general, hallamos interesante examinar algunas de la ideas en matemáticas que no han obtenido aceptación general. La consideración seria de estas concepciones alternativas puede enriquecer nuestro pensamiento y nuestra práctica educativa al tratar de entender las concepciones de los estudiantes. La siguiente revisión del uso que da Wallis a los valores negativos dentro de su teoría de índice y razón es un buen ejemplo.

Wallis interpreta a los números negativos como exponentes de la misma manera que lo hacemos nosotros. Esto es, define el índice de $\frac{1}{x}$ como -1, el índice de $\frac{1}{x^2}$ como -2, etc. También extiende esta definición a las fracciones: por ejemplo, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tiene un índice de $-\frac{1}{2}$. Después establece que la relación entre el índice y la razón característica sigue siendo válida para esos índices negativos. Esto es, si k es un índice entonces $\frac{1}{k+1}$ es la razón del área sombreada bajo la curva hasta el rectángulo (ver figura 9). En el caso de un índice negativo, esta área sombreada no es acotada. Esto no impide que Wallis generalice su afirmación.

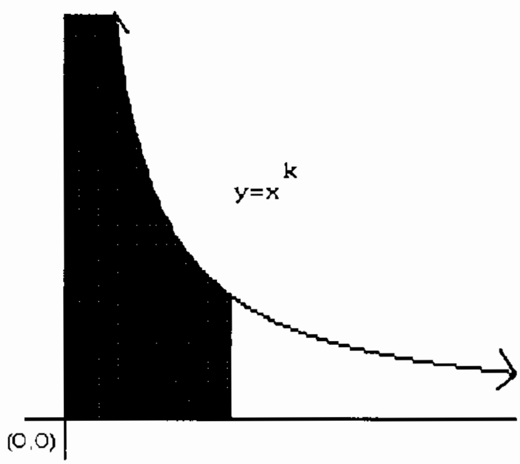

FIGURA 9

Cuando $k = -\frac{1}{2}$, la razón característica debe ser

$$\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} = 2$$

Este valor es indudablemente correcto debido a que el área no acotada bajo la curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ converge al doble del área del rectángulo. Esto es cierto no importa qué punto final a la derecha se elija.

Cuando $k = -1$, la razón característica debe ser

$$\frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0} = \infty$$

(Wallis introdujo este símbolo para infinito en las matemáticas). Wallis aceptó este cociente como razonable debido a que el área bajo la curva $y = \frac{1}{x}$ diverge. Esto puede verse a partir de la divergencia de las series armónicas

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

que han sido conocidas al menos desde el siglo XIV (Boyer, 1968, capítulo XIV)

Cuando $k = -2$, la razón característica debe ser

$$\frac{1}{-2+1} = \frac{1}{-1}$$

Aquí, la concepción de Wallis sobre la razón difiere de nuestra aritmética moderna de números negativos. El no cree que $\frac{1}{-1} = -1$. Más bien, él se queda con su epistemología de representaciones múltiples. Debido a que el área sombreada bajo la curva $y = 1/x^2$ es más grande que el área bajo la curva $y = \frac{1}{x}$, coneluye que la razón $\frac{1}{-1}$ es mayor que infinito ("ratio plusquam infinita"). (Nunn, 1909-1911, p. 355). Prosigue concluyendo que $\frac{1}{-2}$ es incluso más grande. Esto explica el plural en el título de su tratado *Arithmetica Infinitorum*. La traducción más adecuada sería La Aritmética de los Infinitos.

La mayoría de los historiadores sobre matemáticas pasan ligeramente sobre este concepto si es que acaso lo llegan a mencionar. Aquéllos que sí lo hacen rápidamente, citan los comentarios del matemático francés Varignon (1654-1722) quien señaló que si se introduce el signo menos en la razón, entonces se obtiene la razón correcta del área no sombreada bajo la curva con respecto al área del rectángulo. Esto fue el comienzo de la idea de que los números negativos pueden ser vistos como complementos o inversión de la de dirección.

Nosotros, sin embargo, encontramos que vale la pena ponderar la concepción original de Wallis. ¿De qué manera tiene sentido considerar la razón de un número positivo con respecto a uno negativo como mayor a infinito? En la interpretación del área de la figura 9, podemos ver estos diferentes infinitos como tasas cada vez mayores de divergencia. Tales visiones por lo general son las que se toman en matemáticas. El área bajo $y = \frac{1}{x^3}$ diverge más rápido que el área bajo $y = \frac{1}{x^2}$.

Consideremos una situación incluso más simple. Si yo tengo un dólar y tu tienes 50 centavos, entonces decimos que yo tengo el doble de dinero que tú. Si yo tengo un dólar y tú tienes 10 centavos, entonces decimos que yo tengo diez veces el dinero que tienes tú. Si yo tengo un dólar y tu no tienes nada, entonces podemos decir que yo tengo infinitamente más dinero que tú. Muchos matemáticos aceptan este enunciado. Ahora, si yo tengo un dólar y tu estás en deuda, ¿no diríamos que la razón de mi dinero con respecto al tuyo es incluso más grande que el infinito? Esto nos parece una cuestión digna de tomarse en cuenta.