Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 3, Núm. 3, noviembre, 2000, pp. 265-292

Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange, al diseño de una situación didáctica

Ricardo Cantoral Uriza[1]
Hugo Mirón Shac[2]

RESUMEN

Este estudio trata de un análisis de los efectos que la incorporación de la tecnología avanzada produce en el campo de la enseñanza de la teoría elemental del análisis matemático. Específicamente, el caso de las relaciones entre f y f', es decir entre una función y su derivada o la función y sus primitivas. Utilizamos para ello, un diseño experimental que incorpora intencional y sistemáticamente a las calculadoras con capacidad gráfica. Lejos de suponer como un a priori teórico, que tal incorporación tendría ventajas didácticas considerables, nos planteamos como pregunta de investigación el examen de la naturaleza del aprendizaje en ese ambiente tecnológico. En tal sentido, el estudio que ahora reportamos, permite asumir una postura racional y crítica frente a la existencia de recursos tecnológicos diseñados con fines de enseñanza.

ABSTRACT

This study is about an analysis of the effects that the incorporation of cutting-edge technology produces in the teaching field of the elementary theory of mathematical analysis. Specifically, the case of the relations between f and f', i.e. between a function and its derivative or the function and its primitives. For this, we use an experimental design which intentionally and systematically incorporates the calculators with graphical capacity. Far from assuming as a theoretical priori that such incorporation would have significant educational advantages, we approach the examination of the learning nature as an investigation matter in that technological area. In such sense, the study we are reporting now, allows to take a rational and critical attitude towards the existence of technological resources designed with teaching purposes

RÉSUMÉ

Cet étude fait allusion à l'analyse des effets que produit l'incorporation de la haute technologie produite dans le domaine de l'enseignement de la théorie élémentaire de l'analyse mathématique. Spécifiquement, le cas des relations entre f et f', c'est à dire, une fonction et sa derivée ou la fonction et ses primtives. Nous utilisons à cet effet une conception expérimentale, qui intègre de façon intentionnelle et systématique les calculatrices à capacité graphique. Loin de supposer comme un "a priori" théorique que telle incorporation aurait des avantages didactiques considérables, on se pose alors la question de recherche l'examen de la nature de l'apprentisage dans ce cadre technologique. Dans ce sens, l'étude qui est maintenant introduit, nous permet

[1] *Departemento de Matemática Educativa - Cinvestav IPN*
[2] *Colegio de Ciencias y Humanidades, - UNAM*

d'aquérir une attitude rationelle et critique face à l'éxistence des resources technologiques dessinées en vue de l'enseignement.

RESUMO

Este estudo é uma analise dos efeitos que a tecnologia avançada produz no campo do ensino da teoria elemental da analise matemática. Específicamente, o caso das relações entre f e f', ou seja, entre uma função e a sua derivada ou a função e as suas primitivas. Para a sua execuVão, usamos um desenho experimental que intencional e sistemáticamente incorpora capacidade gráfica às calculadoras. Longe de supor como um *a priori* teórico o fato de que tal incorporação teria vantagens didáticas consideráveis, a nossa pregunta de investigação é o exame da natureza da aprendizagem nesse ambiente tecnológico. Nesse sentido, o estudo que reportamos permite assumir uma postura racional e crítica frente à existência de recursos tecnológicos desenhados com a finalidade de ensinar.

ANTECEDENTES

Es sabido que las calculadoras hicieron su aparición hacia la década de los 70's, inicialmente con un fuerte sentido pragmático tendiente a minimizar los tiempos, quizá también los esfuerzos, de operación y liberar en consecuencia a los operarios y técnicos de la industria, el comercio y la administración de tareas consideradas engorrosas. Estos primeros diseños tecnológicos permitían solamente la realización de operaciones aritméticas básicas y el empleo de números con una cantidad de dígitos limitada casi a la usanza del intercambio monetario.

Este proceso se extendió rápidamente hacia la escuela y en muy poco tiempo, las calculadoras originalmente diseñadas para otros fines fueron considerablemente absorbidas por un novedoso mercado emergente: las escuelas y las universidades. Ello obligó a los productores a reconsiderar sus diseños, a elaborar nuevos dispositivos con características tecnológicas adecuadas al aula, atendiendo simultáneamente las exigencias del profesor y de sus alumnos. En los años ochenta aparecen las calculadoras con capacidad gráfica, o también llamadas supercalculadoras, las cuales contaban con una forma de escritura bastante cercana a la que emplea un estudiante en sus cuadernos escolares y una pantalla que simula una pequeña hoja de papel o una porción de pizarrón.

Es en este escenario que surgen y se desarrollan una serie de investigaciones tendientes a esclarecer el dilema del efecto en la formación de los alumnos cuando se dispone de dispositivos tecnológicos. Diversas cuestiones fueron planteadas en un amplio y enriquecedor debate, citemos como ejemplo cuestionamientos como los siguientes: ¿El uso de las calculadoras amenaza el desarrollo de las habilidades básicas de nuestros alumnos? ¿El uso de las calculadoras favorece el desarrollo mental de los alumnos? Como era de esperarse, este debate reavivó antiguos escenarios ideológicos que proporcionaban respuestas parciales, diversas y contradictorias entre sí.

En nuestra opinión, dicha polémica ha ido perdiendo, paulatinamente, el matiz ideológico que le caracterizó en sus inicios. Se perfilaron, por ejemplo, aproximaciones que expresaban la necesidad de la exploración de las supercalculadoras con fines específicos de investigación. Aunque cabe señalar que dichas investigaciones se limitaron a sustentar sus análisis sobre enfoques cuantitativos basados en la estadística inferencial. Estos enfoques intentaban establecer condiciones de comparación entre los resultados derivados del estudio que los efectos de un cierto diseño tendrían sobre un grupo experimental y otro de control.

En estos experimentos los resultados solían calificarse con la frase: "efectos de las calculadoras en el salón de clases". Estos acercamientos han cambiado paulatinamente y se han deslizado hasta desarrollar diversas aproximaciones cualitativas, en las que el centro del estudio no suele limitarse a la comparación entre los desempeños de grupos o alumnos, sino a un cierto análisis con detenimiento de las circunstancias en las que ocurre, como por ejemplo en un estudio de casos.

Como podremos notar en las dos siguientes opiniones respecto del uso y de los efectos de las calculadoras entre los alumnos en una situación de enseñanza, estas son tan variadas como excluyentes:

- Según (Dagher, 1994) aunque los estudiantes puedan usar regularmente las calculadoras con capacidad gráfica en su trabajo matemático, ello no es suficiente para garantizar la construcción de las articulaciones de los registros deseados. Pues aunque las calculadoras puedan quedar dentro del dominio privado de los alumnos, generalmente esto no es considerado como trabajo que sea tomado bajo el control del profesor.
- Contrario a la cita anterior, en (Ruthven, 1992) se señala que idealmente una herramienta cognitiva no sólo será suficiente para establecer modos de pensar sino que también será capaz de apoyar el desarrollo cognitivo y el cambio por parte del usuario. Pues una de las principales virtudes de la introducción de la calculadora al seno de una clase es que la responsabilidad es devuelta a los estudiantes para que ellos desempeñen una parte mas activa desarrollando y evaluando ideas matemáticas.

En esta investigación hemos procurado no apoyarnos en tales visiones antagónicas, sino más bien, en nuestra propia aproximación teórica dado que estamos interesados en tener un mejor control del efecto de nuestros diseños didácticos en los aprendizajes de los alumnos; sean o no concebidos con la intervención de las calculadoras con capacidad gráfica. Por esa razón es que optamos por diseñar una micro ingeniería didáctica con la intención de estudiar la naturaleza del aprendizaje al que, en el marco de un cierto diseño, es posible aspirar en el campo de relaciones que se establecen entre una función y su derivada, o una función y sus primitivas, al seno de un sistema educativo específico.

NOTAS SOBRE UN PARADIGMA: PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO

Una revisión documental de las investigaciones sobre *pensamiento matemático avanzado*, exhibe la existencia de una gran cantidad de estudios que muestran las profundas dificultades de aprendizaje de parte de los alumnos cuando se quiere que ideas del análisis matemático sean adquiridas en una primera enseñanza (Artigue, 1998). Este vertiginoso crecimiento en la investigación contemporánea ha sido posible, en nuestra opinión, gracias a dos factores principales; el primero, debido al creciente interés de los matemáticos profesionales en los asuntos de la enseñanza y del aprendizaje, y el segundo, a causa de la estabilidad y madurez que han alcanzado comunidades de investigación que se organizan en torno de grupos académicos con paradigma propio, como es el caso del grupo internacional de Psychology of Mathematics Education (PME) o de la comunidad de investigadores del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame). Este doble proceso de desarrollo que se nutre, por una parte, de la reflexión matemática al seno de lo didáctico y de apoyar, por otra, la explicación didáctica con base en la construcción del conocimiento, ha sido en nuestra opinión, una de las principales y más recientes contribuciones de nuestra disciplina: La Matemática Educativa.

Como lo reportan las diversas revisiones que se han escrito recientemente, los estudios que tratan sobre la didáctica del análisis, se apoyan en distintas metáforas del aprendizaje que conservan, en algún sentido, elementos comunes como la persistencia de su tesis central que proviene de la epistemología genética y que es relativa al desarrollo del pensamiento, tesis que aunque no analizaremos en este escrito, no queremos dejar de señalar que se encuentra en la base de sus explicaciones. Sólo apuntamos el hecho de que esas investigaciones se han centrado en problemáticas que se ocupan de matemática relevante en la enseñanza superior, asumiendo que la matemática interviene en ese nivel casi exclusivamente como disciplina principal de enseñanza olvidando un hecho fundamental que caracteriza al sistema didáctico de la educación superior, también y quizá con mayor fuerza, la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación.

Como se puede advertir, el desarrollo de habilidades y destrezas entre los estudiantes precisa de procesos temporalmente prolongados a juzgar por los tiempos didácticos habituales. Supone, por ejemplo, del dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con estilos del pensamiento prevariacional, como el caso del pensamiento algebraico ampliamente documentado. Esa ruptura además, y esto es un punto de partida de nuestra línea de investigación, no puede ser sostenida exclusivamente al seno de lo educativo con base en un nuevo paradigma de rigor que se induce simplemente de la construcción de los números reales como base de la aritmetización del análisis, ni tampoco puede basarse sólo en la idea de aproximación; sino que debe ayudar también a la matematización de la predicción de los fenómenos de cambio.

Para acceder al estilo de pensamiento que se precisa en análisis matemático se requiere entre otras cosas, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende. El conocimiento elemental de la recta y la parábola no resultan suficientes para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de análisis. Desde el punto de vista del sistema de enseñanza, tradicionalmente el curso que antecede al análisis es un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes esencialmente del álgebra y de la geometría analítica, tocando con mayor o menor énfasis el estudio de función, habitualmente sobre la definición de Dirichlet-Bourbaki. La enseñanza tiende a sobrevalorar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado a los argumentos visuales, por no considerarlos como matemáticos, entre otras causas.

SOCIOEPISTEMOLOGÍA DEL PROBLEMA

En la perspectiva de la construcción social del conocimiento, diremos que la naturaleza del concepto de función es en extremo compleja, su desarrollo se ha hecho casi a la par del humano, es decir, encontramos vestigios del uso de correspondencias en la antigüedad, y actualmente se debate sobre la vigencia, en el ámbito de las matemáticas, del paradigma de la función como un objeto analítico. Empero, el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como una fórmula, es decir hasta que logró la integración de dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. La complejidad del concepto de función se refleja en las diversas concepciones y diversas representaciones con las que se enfrentan los estudiantes y profesores. Una lista exhaustiva de obstáculos epistemológicos del concepto de función se encuentra en (Sierpinska, 1992).

Desde el punto de vista de las funciones cognitivas, los objetos inmersos en el campo conceptual del análisis son particularmente complejos a este nivel pues, como en el caso que nos ocùpa, la presentación habitual de la noción de función se presenta como un procedimiento que se aplica a unos ciertos objetos llamados números; este mismo concepto, el de función, deviene en objeto al ser operado bajo otro proceso como la diferenciación ó la integración y así se sigue hasta nociones aun más avanzadas. De modo que al iniciar un curso de análisis el estudiante debe concebir a la función como un objeto, una deificación y por ende estará sujeto a las operaciones que otro procedimiento haga con él. De otro modo, ¿qué significa operar un proceso?

En nuestras experiencias con profesores en servicio en la educación media y superior y con sus estudiantes hemos constatado que en caso de que logren incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, entonces manejan a la funeión no sólo como objeto sino que además pueden transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal con cierta versatilidad, en otras palabras, en caso de tener un dominio del contexto geométrico/visual tanto en la algoritmia, la intuición, así como en la argumentación será posible el tránsito entre las diversas representaciones. El problema didáctico en consecuencia, estriba fundamentalmente en la dificultad cognitiva para adquirir maestría en el contexto geométrico, por ejemplo, en el plano de la argumentación es mucho más fácil mostrar la existencia de una raíz doble algebraicamente que geométricamente, razón por lo que en la enseñanza se acude al refugio algorítmico con facilidad.

Una de las hipótesis centrales entonces, después de un análisis socioepistemológico a profundidad como el que se desarrolla en (Farfán, 1997) consiste en asumir que previo al estudio del análisis se precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos, a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas, mejor aún, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico.

Esta revisión detallada de la literatura contemporánea nos permite reconocer que han sido explicadas, bajo diversos marcos teóricos, una gran cantidad de dislexias escolares. Una de ellas, señala que la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. De modo que aun siendo capaces de derivar una función, no puedan reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación. Así también, pueden encontrar una derivada sin asumir que el resultado obtenido mediante la derivación sea a su vez una nueva función susceptible de derivación. De modo que podemos encontrar entre los estudiantes consideraciones como las siguientes:

- Si $f(2)=0$, entonces $f'(2)=0$, pues f en 2 es constante. O bien, si $f(x) = x^2$, entonces $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ y *por último*, $f'''(x)=0$, pues "no existe" una cuarta derivada

- Sí $d^2y/dx^2 = x^2 + 1$ entonces $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{x^2+1}$

Por lo que respecta a la derivada, diremos que ésta se introduce en clase como una medida de la inclinación de la recta tangente a una curva. Es decir, el concepto de derivada se presenta mediante una explicación que utiliza a la pendiente de la recta tangente ante los estudiantes de entre 16 y 18 años de edad. Ello presupone que la noción de pendiente, que fue introducida a los estudiantes de entre 12 y 14 años de edad, haya adquirido una cierta estabilidad funcional.

Una vez definida la derivada como la operacionalización de la estrategia visual anterior, se suele iniciar su tratamiento mas bien algorítmico y teórico que consiste en enseñar a derivar diversas funciones y a demostrar algunos teoremas. Una pregunta que interesa a nuestra investigación consiste en cuestionar sobre las razones que hacen que una definición, por ejemplo que la derivada se puede interpretar como la recta tangente a la curva en un punto, se estabilice entre profesores y estudiantes con el paso del tiempo y se tome en creencia colectiva. A qué se debe que unas ideas, como la de D'Alambert (la tangente es el límite de las secantes) dominen el discurso educativo, se desarrollen y enriquezcan mientras que otras como la de L'Hôpital (la tangente es la prolongación del lado de una cierta poligonal) se debiliten y mueran.

Al respecto investigaciones recientes (García, 1998) reportan la existencia de robustas dificultades entre los estudiantes de diferentes edades para tratar con cuestiones que exigen algún tipo de estrategia variacional. En algunos casos, se ha encontrado que los estudiantes de ingeniería siguen, como aquellos reportados en la educación básica, sin asumir plenamente al objeto "pendiente de una recta" como una entidad, una totalidad que describe una propiedad de las rectas. En consecuencia la noción de derivada, cuyo tratamiento escolar se apoya en aquella de pendiente deviene frágil entre los estudiantes.

Dado pues que la presentación habitual de la derivada se apoya en la concepción de que la tangente es el resultado de un proceso al límite de una familia de rectas secantes, y que ello ha sido localizado como una gran dificultad didáctica (Dolores, 1989), debido a que los estudiantes conservan la idea de tangente que proporciona la matemática griega de la antigüedad clásica. Esta concepción asume que la recta es (toda ella) tangente a una curva si la toca, pero no la corta. Esta caracterización funciona adecuadamente para las cónicas, pero no para curvas como las cúbicas o muchas otras más. Esta concepción deviene obstáculo cuando se quiere tratar a la condición de tangencia localmente, así como la necesidad de mirar a la tangente dinámicamente y no estáticamente como en la geometría griega.

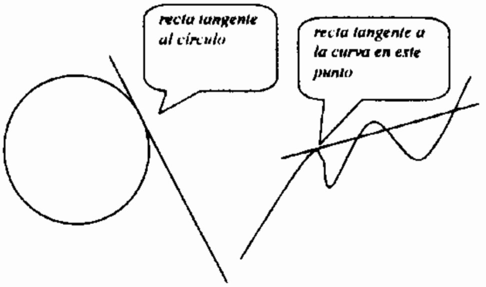


Figura 1

Nuestro acercamiento didáctico utiliza, aunque sea sólo parcialmente, la concepción griega de recta tangente para favorecer la significación del concepto de derivada en el sentido de Lagrange y no en el sentido de Cauchy. Este cambio de perspectiva lo aconsejó un análisis a profundidad de naturaleza socioepistemológica, que puede consultarse en (Cantoral, 1990). Diremos en forma sucinta que por cuanto toca exclusivamente al aspecto formal, mientras que la derivada en el sentido de Cauchy es entendida como el limite del cociente incremental, la derivada lagrangiana es, en cambio, entendida como el coeficiente lineal del desarrollo en serie de potencias de una función entorno de un punto dado.

Esta doble apariencia de un objeto matemático, no debe entenderse como una forma de escribir de dos maneras distintas una misma idea matemática, como con frecuencia suelen creer los autores de manuales escolares. Sino por el contrario, como la expresión de epistemologías radicalmente distintas que pueden dotar a los objetos matemáticos, incluso, de significaciones diversas: El uso hace al objeto. Un análisis en detalle puede consultarse en (Cantoral, 1995).

Desarrollando a f entorno del punto x con un incremento h, obtenemos:

$$f(x+h) = a(x) + b(x)h + c(x)h^2/2! + \ldots$$

si escribimos los coeficientes en términos de las derivadas de f, tendremos,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)h^2/2! + \ldots$$

Si ahora desarrollamos esta serie en torno del número $x = a$, tendremos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2/2! + \ldots$$

Ahora bien, si desarrollamos a la función f en torno de un valor numérico particular, por ejemplo en el cero, tendremos:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\,x^2/2! + \ldots$$

De manera que una forma de encontrar la derivada de una función en un punto, consiste en desarrollarla en serie de potencias en torno del punto en cuestión. Veamos mediante un ejemplo cómo es que operan estas ideas. Consideremos la función dada por la expresión $f(x)=x^3$, de la cual se quiere conocer la derivada en x. Si seguimos la estrategia de Cauchy tendremos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

Si seguimos en cambio la estrategia de Lagrange, tendremos que: $f(x+h)=(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$, así que la derivada de f es el coeficiente de h en la expansión anterior, es decir, $3x^2$.

Esta segunda presentación, fue usada con frecuencia en la base del diseño de la secuencia didáctica que ahora reportamos, iniciando siempre con una exploración de la noción de tangente en el sentido de la geometría griega. Consideramos que este enfoque permite una cierta naturalidad entre los razonamientos de los estudiantes y daba, a la vez, una forma de control que se apoyaba en el álgebra y la geometría analítica en vez de sostenerse en procesos infinitos y situaciones límites.

Derivada de Cauchy
límite de un cociente

$$\frac{df(a)}{dx} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivada de Lagrange
coeficiente de un desarrollo

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+ f''(a)(x - a)^2/2! + \ldots$$

Cabe aclarar que el acercamiento elegido para el diseño de la secuencia, usaría la idea de tangente como una particular forma del contacto entre una recta y una curva. Este enfoque de la derivada es claramente diferente de la presentación habitual, en tanto que esta pone a la tangente como el resultado de un particular proceso al límite. De modo que en la presentación usual, la explicación de la naturaleza de la tangente descansa mas bien en el proceso de obtención que en la propia propiedad de tangencia. Esto es, la tangente es el resultado del proceso.

ALGUNOS ANTECEDENTES DEL DISEÑO DIDÁCTICO

Como señalamos anteriormente, en el diseño de la secuencia didáctica se plantea incorporar, en la ingeniería didáctica, cuatro componentes decisivos, las habituales componentes epistemológica, cognitiva, y didáctica, e incorporamos una componente más, la sociológica. Esta incorporación, no sólo agrega una mirada mas de la dimensión humana, sino que modifica sustancialmente la concepción de las otras tres. En este escrito, no desarrollaremos esta aportación metodológica desde un punto de vista teórico. Se trata pues de dotar al concepto de derivada de un campo de problemas y de situaciones en donde su significación provenga de los hallazgos logrados en la socioepistemología y en esa medida, la intervención del recurso tecnológico estará siempre supeditado al conjunto solidario de relaciones entre las cuatro componentes.

Respecto de la componente epistemológica, diremos que los resultados preliminares de nuestros estudios señalaban la plausibilidad de cambiar el status de la noción de derivada al seno del cuerpo teórico, si le acompañábamos de una reconstrucción racional apoyada en un paradigma distinto al que domina en la enseñanza contemporánea. Esto se lograría, abandonando el paradigma cauchiano que consiste en asumir a los objetos matemáticos centrales del cálculo, la derivada y la integral, como el resultado de una operación de límite aplicada a una cierta clase de funciones.

Por cuanto toca a la componente cognitiva, los estudios realizados sobre concepciones y construcciones mentales, señala la imposibilidad, en tiempos escolares, de lograr la interiorización de la noción de derivada y de su «encapsulación» como objeto matemático.

En relación con la componente didáctica habíamos visto que la introducción de la noción de derivada se apoya en una explicación que deviene frágil al juzgar los resultados reportados sobre la noción de pendiente y del límite de las secantes. Este consenso sobre un objeto matemático imposibilita la exploración espontánea de los fenómenos didácticos que de él emergen y manifiesta claramente la necesidad de realizar estudios robustos de ingeniería didáctica.

Finalmente, desde el punto de vista de la sociología, la razón de ser de la noción de derivada no reposa en su estructura teórica habitual, sino en la posibilidad de movilizarle y en esa medida significarle y resignificarle progresivamente, en contextos que requieran de la predicción de fenómenos de cambio. En las prácticas humanas, en las disciplinas de referencia, la derivada no se entiende exclusivamente como el límite del cociente incremental, sino como una forma de estudiar la evolución de un proceso de cambio, de crecimiento o de decrecimiento. Esta tesis ha sido parcialmente expuesta en diversos trabajos de investigación, citamos por ejemplo (Azcárate, 1990 y Cantoral & Farfán, 1998).

Estos elementos, aunque sólo hayan sido descritos escasamente en este escrito, constituyeron la plataforma preliminar sobre la que se elaboró el diseño de la ingeniería.

DISEÑO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Durante tres años escolares (95-96, 96-97, 97-98) elegimos tres grupos de estudiantes, uno por año, del bachillerato universitario. La edad usual de los alumnos oscilaba entre 15-18 años de edad. La única condición que pusimos para su elección, consistió en restringir su conocimiento del análisis como disciplina escolar en tanto que no hubiesen tenido ningún contacto previo con la enseñanza explícita del análisis matemático.

La experiencia contó con una serie de tres fases. Las fases de preparación, de desarrollo y de institucionalización. La fase de preparación estuvo básicamente destinada al desarrollo de competencias en la mayoría de los alumnos (esto era una condición sin la cual no podía llevarse a efecto la segunda fase) en el manejo de la calculadora con capacidad gráfica y a su utilización en tareas que requerían del desplazamiento a voluntad de rectas y parábolas mediante la manipulación de los parámetros de las fórmulas generales $f(x) = ax + b$ y $f(x) = ax^2 + bx + c$. La fase de desarrollo de la experiencia estuvo dedicada al desarrollo de los diseños de ingeniería. Las sesiones de esta primera parte contenían una sección de trabajo individual ante una serie de tareas y la otra de discusión y acuerdo sobre respuestas conjuntas a las mismas tareas realizadas individualmente, para lo cual se dispuso de la formación de pequeños equipos de tres alumnos. Finalmente, la tercera fase llamada de institucionalización, en el sentido de la teoría de situaciones, se consagraba a la discusión en grupo con la participación activa y coordinada por el maestro de la clase y los alumnos. En términos generales se buscaba el establecimiento de un cierto acuerdo general sobre los conocimientos generados por ellos en las distintas fases de la experiencia.

Mas específicamente, en la fase de preparación, se buscó familiarizar a los estudiantes con cuatro aspectos necesarios en el diseño:

1. Tratamiento matemático de problemas que conducen al planteamiento de ecuaciones de primero, segundo y tercer grado para que las funciones lineales, cuadráticas y cúbicas pudiesen ser vistas como modelos de fenómenos «reales».

2. El conocimiento básico y el manejo de la supercalculadora a un nivel de competencias establecidos a la luz de la experiencia. Conocimiento de las funciones ZOOM, GRAPH, RANGE, TRACE, EVAL. Así como las operaciones elementales y el control de las memorias.

3. La posibilidad de discutir con sus compañeros de clase, en pequeños grupos de

tres alumnos, ideas matemáticas adecuadas a la experiencia considerando la intervención de recursos tecnológicos, como una grabadora de audio y las calculadoras con capacidad gráfica.

4. La familiarización con una serie de operaciones gráficas al nivel de automatismos de respuesta. De manera que desplazar vertical y horizontalmente la gráfica de una parábola representada sobre una pantalla fuese una tarea rutinaria.

Estos elementos nos permitieron aislar las variables de interés para la investigación y centrarnos en consecuencia en los aspectos de la naturaleza del aprendizaje en un ambiente especial. El recorte sobre las piezas de conocimiento fue hecho al momento de elegir trabajar sólo con funciones lineales, cuadráticas y eventualmente con cúbicas. Aunque no entraremos a discutir tales restricciones sólo diremos que ellas obedecen a razones de corte socioepistemológico.

Nuestra secuencia didáctica constó de cinco actividades con diversidad de secciones. Las tres primeras trataron específicamente con la propiedad de tangencia y las dos restantes con la función derivada, buscando con esta última establecer una relación con la función primitiva (f' es la derivada de f, pero f es también una primitiva de f'). Desde el punto de vista de la matemática de la situación pretendimos tratar sólo tres cuestiones principales:

1. Dada f de algún modo, se busca obtener f' mediante el acercamiento lagrangiano al que hemos aludido anteriormente.

2. Dotar a f' de un significado que le permita ser entendida a su vez como una nueva función.

3. Dada f' de algún modo, se busca construir f.

En términos generales, buscamos que las actividades plantearan la necesidad a los estudiantes del cambio coordinado de registros de representación matemática. Particularmente, tratamos con los registros gráficos, algebraicos y numéricos, aunque este último sólo de manera implícita.

ESTRUCTURA DE LA SECUENCIA

Actividad 12. Se les propone, en papel impreso, una imagen de la ventana de la supercalculadora que exhibe una recta. Como datos de la actividad, se les dan las coordenadas de un punto sobre el eje de las y's en el que se quiere se coloque a una parábola de modo que ésta tenga con la recta un punto de tangencia en el sitio indicado. Los estudiantes, primero de manera autónoma y luego en pequeños grupos de tres alumnos, tendrían entonces que «mover», a decir verdad tendrían que coordinar los movimientos de la parábola sobre la pantalla de cristal líquido de sus calculadoras mediante la asignación a voluntad de los parámetros a, b y c de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, hasta hacerla coincidir con la recta de manera, y en esto consistía el verdadero problema de la tarea, que el contacto fuese efectivamente tangencial.

Se repite después la actividad cambiando la posición de la recta y del punto de tangencia, conservando siempre la abscisa cero (esta variable didáctica cambiará su valor durante las siguientes tareas). Esta repetición de la tarea con nuevos datos tiene una doble finalidad, por un lado pretende garantizar que la tarea ha sido adecuadamente comprendida por los estudiantes y por otro, que efectivamente los estudiantes pueden poner en funcionamiento recursos y estrategias de partida. Finalmente en esta actividad se limita la movilidad en los parámetros pidiendo ya no una parábola en particular, sino una familia de parábolas que satisfagan las exigencias del problema. Este salto de la parábola en particular a la familia de parábolas en general, pretende favorecer estrategias de formulación y validación del saber matemático que se desea ver aparecer entre los estudiantes.

Con esta actividad se quiere que los estudiantes reconozcan la naturaleza del contacto entre una recta y una parábola, apoyándose en sus conocimientos formados durante sus prácticas escolares previas. La noción de referencia de lo que es una tangente, se refiere al caso específico de tangente a un círculo. Esta noción, al seno de la actividad será llevada hacia el caso de la parábola y más adelante se buscará la centración del contacto en una región de la parábola. Esto es, se buscará mediante las actividades propuestas, una cierta necesidad de considerar la propiedad de tangencia como una propiedad local.

En la siguiente actividad, como ya habíamos anticipado, usamos el mismo formato de preguntas y cambiamos el valor de una de las variables de control, al permitir que el punto de tangencia, estuviera fuera del eje de las y's. Como podrá anticiparse, ello tiene la intención de exigir un cambio de contexto y en consecuencia, satisfacer a una de las exigencias metodológicas: Reconocer que la regularidad lineal, aquella vinculada con la definición de Lagrange, es invariante respecto de la particular ubicación del punto de tangencia. De hecho, este hallazgo, de darse entre los estudiantes, sería el instrumento de control de parte del alumno, para verificar la certeza de sus predicciones.

Una vez que la articulación de movimientos de la parábola «pareciera dejarla en contacto tangencial con la recta», las y los estudiantes, tendrán bajo su control dos estrategias de verificación: una consiste en lograr, con los sucesivos acercamientos del punto de contacto mediante la tecla ZOOM, una cercanía entre las curvas de manera que sea plausible creer que la recta y la parábola son efectivamente tangentes. La otra puede no sólo reforzar a la anterior sino que se torna en un criterio de validez alternativo, si la recta y la parábola establecen entre sí un punto de tangencia, entonces sus ecuaciones exhibirán inevitablemente el siguiente aspecto:

$$Ax^2 + Bx + C \quad \& \quad Bx + C$$

Cuando tenemos el punto de contacto en (0, C), la función cuadrática tendrá la expresión $P(x) = Ax^2 + Bx + C$, mientras que la función lineal lucirá, inevitablemente como $R(x) = Bx + C$. La coincidencia en los dos últimos factores de la cuadrática con los factores de la lineal, tendrá según nuestra predicción en el diseño de la secuencia, que ser descubierta primero por ellos en sus actividades individuales; para que después en sus discusiones grupales, logren formularlo y validarlo como un resultado matemático fruto de sus acciones sobre las situaciones planteadas. Esta imbricación entre la parábola $P(x)$ y la recta $R(x)$, en el dominio de sus expresiones algebraicas (es decir, $P(x) = Ax^2 + R(x)$), dará entonces el segundo aspecto del control de la situación por parte del estudiante.

Cuando el punto de contacto está en la coordenada (p, C), la situación será equivalente, $P(x) = A(x - p)^2 + B(x - p) + C$, mientras que la función lineal lucirá, inevitablemente como $R(x) = B(x - p) + C$

Una tercera etapa en la experiencia consiste en plantear las mismas preguntas que empleamos respecto de la naturaleza del punto de contacto entre una recta y una parábola, pero ahora se tratará del contacto entre dos parábolas. Esta actividad está dirigida a fortalecer la autonomía de los hallazgos de los estudiantes respecto de la particularidad de las curvas tratadas, así como a utilizar a la recta como un intermediario en la solución. Los recortes efectuados al contenido, nos exigen no abandonar rápidamente el reducido universo de formas gráficas que hemos construido, a saber, recta y parábola y eventualmente cúbica. En esta situación, es posible esperar de parte de los estudiantes, que incorporen como elemento auxiliar una recta que sea tangente a ambas parábolas y de este modo, afianzar sus afirmaciones con elementos parcialmente conocidos, pero también es posible esperar que la estructura de la estrategia sea empleada sin atender a la naturaleza de las curvas. De manera que en este caso, tendrán que llevar sus estrategias previas - acercamientos sucesivos en la pantalla de la calculadora gráfica y el reconocimiento de la regularidad lineal a la nueva situación que se les ha planteado. Sugerimos sin embargo, auxiliarse de la recta.

Mas adelante proponemos una nueva situación, se trata de las actividades 15 y 16, con la que pretendemos plantear escenarios que precisen de un cierto tipo de anticipaciones causales y de inversión de los procedimientos. Claramente estas actividades tendrán una serie de dificultades adicionales a las actividades anteriores, pero resultarán fundamentales para emitir algún tipo de juicios que no se limite al juego del contrato didáctico. De algún modo, estas actividades buscan un cierto principio de reversibilidad en sus respuestas. Ello, como es de esperarse, fue logrado sólo por una parte del grupo de estudiantes. En esencia, las actividades proponían la construcción de una función derivada y la anticipación de una primitiva.

En el primer caso, toda vez que las acciones que realizan los estudiantes al estudiar las tangentes les permiten pasar de una fórmula a una gráfica y viceversa, ahora queremos que su atención se centre sólo en la pendiente de la recta, ya no en la recta en sí. Estas actividades se abordan casi exclusivamente con el empleo de la fórmula de la pendiente y de los acercamientos sucesivos que pueden realizar a la parábola en distintos puntos.

La última de las actividades se centró, como recién dijimos, en el problema inverso. Se les da una línea recta y se les pide que encuentren una parábola de la cual aquella sea su derivada. De nuevo, el manejo con la intervención de la calculadora gráfica permite una cierta autonomía de los estudiantes, al menos al nivel de sus exploraciones individuales y al nivel de su discusión en grupos.

RESULTADOS DE LA FASE EXPERIMENTAL

Para el desarrollo de la secuencia didáctica se dividió el grupo en nueve equipos de tres o cuatro alumnos. Durante esta fase el profesor responde solamente a preguntas relativas a la calculadora y su participación es más activa en la institucionalización, preguntando, aclarando y especificando el resultado principal de la actividad.

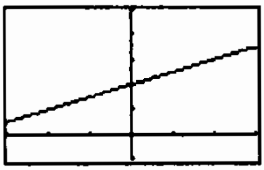
Los datos recolectados fueron: hojas de trabajo por equipo, audiograbación por equipo, filmación y observaciones del desarrollo por un colega del área de psicopedagogía, todo esto para cada una de las actividades de la secuencia didáctica. Con base en los resultados de los reportes escritos de cada sesión (ver cuadros siguientes) transcribimos las audiograbaciones de los equipos VI, III y IX por las razones siguientes. El primero de estos equipos obtuvo respuestas correctas en todas las actividades, el segundo inicia con dificultades en las dos primeras y concluye las demás en forma brillante y el tercer equipo tiene dificultades prácticamente en toda la secuencia.

Mostraremos fragmentos de los reportes de trabajo y algunos episodios de aprendizaje extraídos de las transcripciones, que nos permiten identificar elementos utilizados por los alumnos en la construcción de conocimientos, así como algunas dificultades, por medio de lo cual describimos la naturaleza del aprendizaje en este ambiente tecnológico. Dentro de la teoría de las situaciones, se dice que un alumno ha aprendido un cierto conocimiento matemático, si se ha adaptado a las situaciones adidácticas que constituyen una situación fundamental, esta adaptación se manifiesta mediante un cambio de estrategia del estudiante que le lleva a poner en práctica la estrategia óptima de solución.

Damos inicio a nuestra descripción con las actividades 12, 13 y 14 de la secuencia didáctica relativas a la propiedad de tangencia y la regularidad lineal, éstas se enumeraron así por razones de continuidad con la fase de preparación.

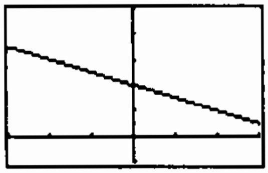
ACTIVIDAD 12

En ésta se presentan las imágenes de ventanas de la calculadora en la que se exhibe una recta:



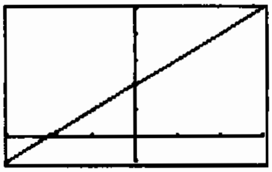
$y = x + 2$

(0, 2)



$y = -x + 2$

(0, 2)



$y = 2x + 2$

(0, 2)

Y se pide exploren con la calculadora qué valores deben asignar a los parámetros A, B, C para que la gráfica de la función cuadrática $y = Ax^2 + Bx + C$ sea tangente a la recta en el punto indicado.

Las situaciones 5 y 6 plantean respectivamente: ¿Cuál es la familia de cuadráticas $y = Ax^2 + Bx + C$ cuyas gráficas son tangentes a la recta $y = 3x - 2$ en el punto (0, -2)? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función cuadrática $y = x^2 - 4x + 6$ en el punto de intersección de ésta con el eje y? sugerimos usar la ventana estándar.

La mayoría de los equipos inician con la cuadrática $y = x^2 + 2$ pero al "comprobar con el ZOOM" observan que la recta corta a la parábola, entonces intentan cerrar la parábola asignando valores grandes al parámetro A, su estrategia de verificación con los acercamientos del ZOOM les mostraba el corte de la recta. Los equipos que cambiaron a la estrategia de fijar los parámetros A, C y ensayar con B lograron obtener una parábola tangente: $y = x^2 + x + 2$.

Veamos cómo interactúan Martín, Alfonso, Iván y Pedro en el equipo V. En la primera pregunta escriben $y = x^2 + x + 2$ y explican: "porque sabemos que C corta a Y y se le da el valor de 2 a C".

Para la segunda pregunta obtienen $y = x^2 - x + 2$ y justifican: "Por ser similar a la anterior, sólo se mueve el parámetro B haciéndolo negativo". Describimos algunos episodios de aprendizaje localizados en la transcripción:

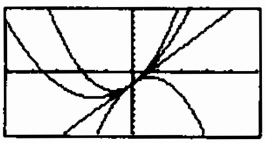
I. ¿Cómo, pero cómo quedó la ecuación?
P. $x^2 - x + 2$
A. Lo mueve un poco, ¿no?
M. ¿A ver cuál es...?
A. El que te acabo de enseñar y no me haces caso
P. Sí, sí está bien
I. Ya te salió, ya hiciste el..., te salió así
A. ¡Ay! todas son iguales
P. Todas cortan en cero
M. Sí, entonces nada más
I. Nada más hay que variar la x (el parámetro B)
:
A. ¿Cuál es la siguiente ecuación?
P. Será que aquí le ponemos dos
I. ¿A ver?
M. ¿Teníamos cual? x al cuadrado
I.A. $+2x$, hay $2x + 2$
:
A. Sí sale ¿verdad?
I. Yo creo
A. ¿A ver? ¡fíjate!
I. Sí, sí sale
P. Sí, si sale, chéquense
I. Chéquense
M. $2x$, digo $x^2 + 2x + 2$

Esto último les permite dar respuesta a la tercera pregunta. Para los dos últimos incisos los estudiantes discuten como sigue:

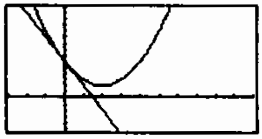
M. ¿Cuál es la que sigue?
A. ¿Cuál es la familia de cuadráticas cuyas gráficas son tangentes a la recta, a ver, cuál es este, $3x + 2$?
P. Yo ya sé cuál es el patrón
A. ¡El parámetro! ¿cuál patrón?
M. Han cambiado varias veces, ¿cómo quedó el final?
I. Dos, aquí está, 1, -2
A. 2, -2, 1, -2 y 1
P. Así
A. Si
P. Temo desilusionarte, no es ese, en serio le cambia A
:
M. Es que aquí le puse $3x + 2$, es $3x - 2$
P. Si
I. Y ponemos, ¿dibujamos también la gráfica?
A. ¿En cuál?
M. En la cuadrática o en la recta
P. En la recta
A. A ver déjame probar esto
I. Dibujamos también las gráficas en la cinco
M. Si, ¿no?
:
I. Pusimos $x^2 + 3x + 2$. Y además son los valores
M. Sí
:
M. Ya está el primer y segundo intento
A. Ya grafícalo
M. Ya, pero
I. ¡Ah!, ya también resolví este (inciso 12.6)
M. ¿Eh?
A. Ah, espérate Iván no te aloques, no te aloques
I. Ya lo logré, ya lo logré
A. Espérate, de perdida déjame ver qué es
M. A ver, déjame ver la pregunta Iván
A. Ecuación de la recta tangente
P. Es una grosería, ...
A. Ah, ya se cual es, donde va la segunda ¿no?

M. Es así mira, es $x^2 - 4x$ ¿+6? ¿no?
I. Quedaría
M. $-4x$, $-4x + 6$, a ver, sí, si es cierto
A. Si
:
P. La seis está aquí
A. Salió al primer intento
M. Pero ponle porqué
P. Ah, todo, todo es nada mas porque esta última parte tiene que ser la ecuación de la recta
A. Exactamente

En la pregunta 5 Pedro reconoce un patrón (la regularidad lineal) lo que permite formular la familia de cuadráticas $y = Ax^2 + 3x - 2$ tangentes a la recta $y = 3x - 2$ en el punto (0, -2) especificando A = *variable*, B = 3, C = 2 y proporcionando las gráficas de la recta y de las cuadráticas para los valores de A = 2, 1, -2.



Al responder la pregunta seis en la hoja de trabajo especifican la regularidad lineal: "La ecuación es $y = -4x + 6$ porque los parámetros B y C de la parábola es la ecuación de la recta tangente y el punto de tangencia es (0, 6). Observándolo de los ejercicios anteriores, B y C de $y = Ax^2 + Bx + C$ son la ecuación de la recta tangente si el punto es $x = 0$". Presentan la gráfica de la cuadrática y la recta:

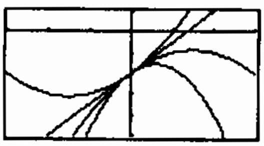


Vemos que a partir de la acción y discusión de las primeras preguntas, en estas dos últimas los estudiantes formulan y validan la "regularidad lineal", esto es, dada la recta $R(x)= Bx+C$ y el punto de contacto en (0, C), la función cuadrática solicitada tendrá la expresión $P(x) = Ax^2 + R(x)$. Mostramos a continuación otras formas en que se presentaron estrategias de formulación y validación:

Equipo IV: Martín, Isaac, Bárbara y Jorge.

12.5 $y = Ax^2 + 3x - 2$

Gráfica con diferentes valores de A; A<0, A>0



12.6 $y = -4x + 6$

Gráfica con la recta y la parábola. Conclusión: De la recta $y = x + 2$ en el punto (0, 2) a la parábola tangente Sólo se le agrega el término cuadrático, con cualquier valor de A.

$y = x + 2 \rightarrow y = 100x^2 + x + 2$

Equipo VI: Carlos, Josunee, José y Omar.

12.5 A 1
B 3
C 2
$y = \pm Ax^2 + 3x - 2$

12.6 $y = -4x + 6$

Punto de intersección con el eje y
(0, 6)

Como afecta $y = Ax^2 + Bx + C$ para encontrar la ecuación de la recta $y = Ax + B$. Descubrimos que modificando A le damos sentido a la ecuación de la recta. Para encontrar Ax de la ecuación de la recta hay que modificar B de la función cuadrática y si se quiere encontrar B de la función cuadrática hay que modificar Ax de la ecuación de la recta. C indica el punto de intersección con el eje Y.

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

$$y = Ax + B$$

Equipo VII: Cristina, Alma, Rocío y Rodrigo

12.1 A 1 -1 A cualquier número
B 1 1 1
C 2 2 2 se fijan

12.1 A 1 -1 A cualquier número
B -1 -1 -1
C -2 -2 -2 se fijan

12.1 A 1 1 -1 A puede ser cualquier número
B 1.5 2 2 B=2
C 2 2 2 se fijan C= 2

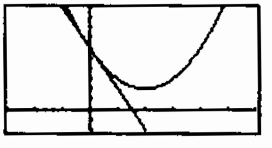
12.1 A 1 1 A puede ser cualquier número
B -2 -2 B=2
C 2 2 C=2 se fijan

12.5 $y = Ax^2 + 3x - 2$

12.5 Ecuación de la recta
$y = -4x + 6$

El punto de intersección es:
(0, 6)

Gráfica de la recta y la parábola.



Encontramos que los equipos que cambian de estrategia, observan similitudes, patrones y discuten sus hallazgos logran los objetivos de esta actividad. Observamos también que la estrategia de ensayo - error se convierte en un obstáculo para algunos equipos, en la medida que logran obtener una cuadrática que es tangente mediante ensayos; continúan con esta estrategia y creemos que ello les impide conseguir los objetivos deseados.

En general podemos decir que se cumplieron las expectativas de nuestro análisis a priori, como se puede del *Cuadro 1*:

	Equipos								
Act.	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**IX**
12.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12.2	1	1	1	1	1	1	1	1	0
12.3	1	0	1	1	1	1	1	1	0
12.4	1	0	0	1	1	1	1	1	0
12.5	1	NR	1	1	1	1	1	1	1
12.6	NR	NR	NR	1	1	1	1	1	NR
13.1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
13.2	1	0	1	1	1	1	NR	1	1
13.3	0	0	1	NR	1	1	NR	0	NR
13.4a	NR	NR	0	NR	1	1	NR	NR	NR
13.4b	NR	NR	1	NR	1	1	0	1	NR
14	1	0	1	1	1	1	1	1	1

Cuadro 1

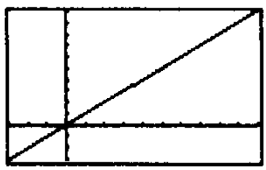
1, Respuesta correcta; **0**, Respuesta incorrecta; **NR**, No respondió

Aprovechamos la potencialidad de graficación de las calculadoras, a efecto de manejar como una variable didáctica el "movimiento" de la cuadrática $y = Ax^2 + Bx + C$ hasta hacerla tangente a la recta en un punto indicado, esto es totalmente distinto de aquella forma que ha sido usual en los cursos de cálculo, dada la cuadrática se pide la recta tangente en un punto, desde luego, después de haber introducido la noción de derivada.

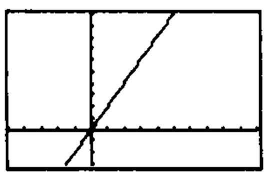
Hasta este momento hemos cambiado la posición de la recta y el punto de tangencia, aunque hemos conservado siempre la abscisa cero, en la siguiente actividad cambiamos el valor de esta variable didáctica, permitiendo que el punto de tangencia estuviera fuera del eje de las y's. Este cambio en la variable de control, como habíamos previsto, produjo dificultades en los resultados de la actividad como se puede ver en el *cuadro 1*. Veamos las situaciones planteadas usando el mismo formato de preguntas.

ACTIVIDAD 13

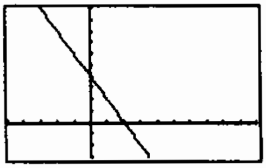
¿Qué valores se deben asignar a los parámetros A, B y C para que la gráfica de la función cuadrática $y = A x^2 + B x + C$ sea tangente a la recta en el punto que se te indica para cada uno de los incisos de esta actividad?



$y = x$, $(2, 2)$



$y = 2x$, $(1, 2)$



$y = -2x + 2$ (1, 0)

4. ¿Qué regularidades puedes constatar de esta actividad? Describe detalladamente tus observaciones.

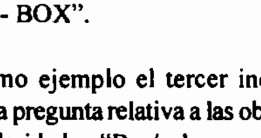
¿Cúal es la familia de parábolas cuyas gráficas se abren hacia abajo y son tangentes a la recta $y = -2x + 4$ en el punto (-1, 6)? (usa la ventana estándar).

Todos los equipos inician con la estrategia ensayo - error, solamente los que cambian de estrategia logran los objetivos, mostramos a continuación las reflexiones del equipo V:

I. ¿Es esta la forma?, ¿es la de $x+b$, $x+a$, $x+c$?
M. ¿$x + a$?
P. Es $x - 2$
A. Oye es $(x + a)^2 + (x - b) + 2$
M. ¿Cómo, cómo lo vas a cambiar?
I. No se como puedes
P. Tú dices esta, $(x + a)(x + b)$
A. Es que en esa forma, en esa forma los...
M. Se tiene que hacer esta forma
A. El quiere saber qué forma es
P. Es $(x - 2)^2$
M. ¿Ah si?, ajá
I. Sí te da
M. Sí, pero no nos sale, pero sí sabemos qué es, qué hay que desplazar
P. Tienes la forma $x - 2$
A. Si que nos fijamos en la pasada...
P. Mas x
A. Ajá, +2. A ver préstamela, es que debe haber una forma de... tendría que quedar esto así ¿no?
I. Entonces no se cómo justificarlo
A. Si fuera en el cero
I. (0, 2) sería nada mas $x^2 + x + 2$
A. Sí, entonces hay que desplazarla dos a la derecha

En la explicación en su hoja de trabajo se nota la ruptura con la actividad anterior: "Encontramos la función, pero en otra forma (diferente de la solicitada $y = Ax^2 + Bx + C$), $y = (x - 2)^2 + (x - 2) + 2$, lo que se hizo fue desplazar la ecuación dos lugares a la derecha y dos lugares arriba, llevándola después a la forma $y = x^2 - 3x + 4$. Para comprobar hicimos un ZOOM - BOX".

Toman como ejemplo el tercer inciso para responder la pregunta relativa a las observaciones de regularidades: "Basándonos en la actividad anterior y_r=$-2x+2$ $\rightarrow$ y_p=x^2-2x+2, luego se tendrá que desplazar hacia el punto de tangencia. Tomando en cuenta que en y_p (ver gráfica siguiente) el punto de tangencia está en $x = 0$. Luego para desplazarla al punto de tangencia en (1, 0) $y = (x - 1)^2 - 2(x - 1) + 0$. C será el punto Y (ordenada) del punto de tangencia. Se puede trasladar a la forma $y = Ax^2 + Bx + C$ para saber los valores (de los parámetros), en este caso queda $y = x^2 - 4x + 3$".



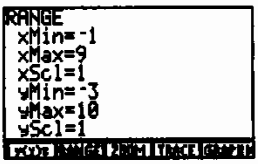
Lo anterior les permite obtener la familia de parábolas que se abren hacia abajo y son tangentes a la recta $y = -2x + 4$ en (-1, 6), respondiendo en una forma algebraica:

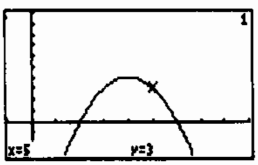
$y_1 = -x^2 - 2x + 4$
$y_2 = -(x + 1)^2 - 2(x + 1) + 6$
$y = -A(x + 1)^2 - 2(x + 1) + 6$

Los equipos III y VI logran también la regularidad lineal $y = A(x - e)^2 + B(x - e) + C$. En todos ellos encontramos que se hacen preguntas muy semejantes: ¿Es esta la forma?, ¿es la de $x + b, x + a, x + c$?; Pero si sabemos qué es, qué hay que desplazar; Si fuera en el cero; Ah, pues si $x^2 + 2x$, creo que hay que afectar a las x´s; ¿Cuál es, qué hace que se mueva la... a la derecha?; ¿Cómo podemos afectar a las [x] de A y B?

La discusión grupal en la institucionalización de los conocimientos matemáticos adquiridos en esta actividad fue muy participativa, esto fue probablemente un factor determinante para que los objetivos de la siguiente actividad fueran conseguidos por la mayoría de los equipos, como se puede ver en el *cuadro 1*.

ACTIVIDAD 14





Explora con tu calculadora una estrategia para asignar valores a los parámetros de la cuadrática $y = Ax^2 + Bx + C$ que se abra hacia arriba y sea tangente a la gráfica de la parábola $y = -x^2 + 8x - 12$ en el punto (5, 3).

Sugerencia: Auxíliate con la recta tangente a la parábola en el punto indicado.

El equipo V al igual que otros, inicia con la estrategia de invertir la parábola e intentan desplazarla hasta hacerla tangente a la otra, al no tener éxito, su interacción nos muestra lo siguiente:

I. Oye, y si agarramos y primero encontramos la recta tangente a ese punto, y teniendo la recta le encontramos la parábola a la recta ¿qué dicen? (regularidad lineal)
M. ¿Qué?
P. La recta tangente
I. Ajá
P. Entonces, aquí es -2
I. La hiciste
P. Es $8x$ - 12 ¿no?
I. Sí
P. No, ahí sería $8x$, a ver pruébalo. ¿tampoco? ¡Ay! No le hagas, ¿por qué, eh?
I. Pues, porque acuérdate que así era, pero cuando $x = 0$
P. Ah, es cierto, no lo hemos...
I. Nada mas desplázala

Extraemos un segmento de la transcripción que nos deja ver cierta desconfianza de los alumnos al trabajo algebraico realizado para la solución:

I. Hacemos un ZOOM-BOX para ver si es. Por que estamos bien seguros que si es (algebraicamente) y que tal si no es. (requieren la comprobación visual)
P. Sí tontín, casi se confunde
I. Ah, es que estamos bien seguros que si, y al llegar...
P. ¡Ay, que sí!
M. ¿A ver...?
:
I. A fuerzas que es tangente y las tres, la recta y las dos parábolas
M. Se confunden en la misma

En la hoja de trabajo este equipo presenta su trabajo en forma resumida:

Obtener la recta tangente en el punto (5, 3) con el método de ZOOM-IN

$(4.9953, 3.0092)$ - (x_1, y_1)
$(5.0054, 2.98911)$ - (x_2, y_2)
$m=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)=-0.02009/0.0101=-1.9891$
$m = -2$
$y - 3 = -2(x - 5)$
$y = -2x + 13$ recta tangente en el punto (5, 3) de la parábola $y = -x^2 + 8x - 12$

Después de obtener la ecuación de la recta se obtiene la cuadrática desplazándola. Por lo tanto:

$y_1 = -x^2 + 8x - 12$
$y = x^2 - 2x + 13 \rightarrow (0, 13)$
$y_2 = (x - 5)^2 - 2(x - 5) + 3$
Familia $y = A(x - 5)^2 - 2(x - 5) + 3$

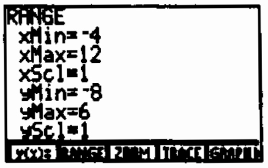
El cambio de estrategia consiste en tomar a la recta como intermediario para aplicar la regularidad lineal, lo que nos enseña un tránsito constante entre las representaciones algebraicas, gráficas y numéricas, utilizando una verificación en principio algebraica, pero básicamente visual - gráfica.

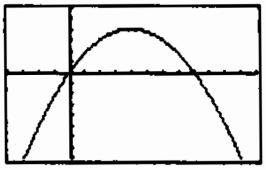
Un análisis global de estas actividades nos permite enunciar algunos hechos didácticos, así como regularidades y obstáculos:

- Los alumnos hacen suyos los problemas y se responsabilizan de sus respuestas por medio de una justificación.
- La discusión de sus primeras acciones les permite cuestionarse, observar similitudes y patrones que los conducen a un cambio de estrategia.
- En estas actividades la estrategia ensayo-error se convierte en un obstáculo epistemológico para algunos equipos.

En la descripción de la estructura de la secuencia didáctica se especificó que las dos últimas actividades contienen situaciones relativas a la construcción de la función derivada y la anticipación de una primitiva. Veamos estas situaciones y algunos resultados.

ACTIVIDAD 15





En los ejes coordenados se muestra la gráfica de la función cuadrática $f(x) = -.25x^2 + 2x$,y en la siguiente página una amplificación de ella. Usa tu calculadora para encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la parábola en los puntos que se te indique. Si la aproximación para la pendiente es muy cercana a un número entero redondéala a ese entero.

Traza las rectas verticales y marca los puntos sobre ellas en la gráfica amplificada de la cuadrática.

1. Recta vertical en $x_1 = -2$, (-2, -5)
2. Recta vertical en $x_2 = 2$, (2, 3)
3. Recta vertical en $x_3 = 4$, (4, 4)
4. Recta vertical en $x_4 = 6$, (6, 3)
5. Al unir los puntos marcados se obtiene una recta, encuentra una expresión algebraica de esta función lineal.
6. A la función que encontraste en (5) le llamaremos función **derivada** de la función cuadrática $f(x) = -.25x^2 + 2x$. ¿Qué información sobre la parábola puedes inferir de esta función derivada?

	Equipos								
Act.	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**IX**
15.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15.2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15.3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15.4	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15.6a	NR	0	1	0	1	0	0	0	0
15.6b	1	1	1	1	1	NR	0	1	NR
15.7a	0	1	1	1	1	NR	1	NR	0
15.7b	0	0	1	1	1	NR	1	0	0
15.7c	0	0	1	1	1	NR	0	0	0
16.1a	0	0	1		1	1	0	0	0
16.1b	0	NR	1		1	1	0	0	0
16.1c	0	0	1		1	1	0	NR	0
16.2a	0	0	1		1	1	0	NR	NR
16.2b	0	NR	1		1	1	0	0	NR
16.2c	0	0	1		1	1	0	0	NR

Cuadro 2

1, Respuesta correcta; **0**, Respuesta incorrecta; **NR**, No respondió

A través de un trabajo gráfico - numérico todos los equipos logran construir la gráfica de la función derivada y su expresión algebraica correspondiente, esto se puede ver en el *cuadro 2*, que además concuerda con nuestras expectativas del análisis a priori. La obtención de un primer significado para la función derivada fue difícil para los estudiantes, solo dos equipos logran una formulación, por ejemplo, el equipo III constituido por Diana, Lilly, Iraís y J. Carlos respecto a la información sobre la parábola que se puede inferir de su función derivada, presentan:

- Es una secante de la parábola con pendiente negativa.
- La intersección de la gráfica de la ecuación lineal en el eje de las x's nos da el valor de x en el vértice de la parábola.
- Toda ordenada de la ecuación lineal en el eje "y" es el valor de una pendiente de alguna de las rectas tangentes a la parábola.

¿Cómo interactúan y qué elementos les permiten hacer estas formulaciones? Veamos:

L. ¿Qué información sobre la parábola puedes inferir de esta función derivada?
J.C. ¡Ah, mira!, si te fijas aquí, qué punto cruza, ah pues puedes obtener el vértice
D. No, o sea, a partir del punto tangente de la parábola si ¿no? a partir de un punto de tangencia de la parábola podemos obtener la ecuación
J.C. Fíjate como nos hizo llegar a la derivada
D. Qué información sobre la parábola ¿qué es inferir?

J.C. Deducir ¿no?
L. Tienes que decir algo
D. Cómo lo sacaste
J.C. No, o sea eso que hace ver qué punto es importante como dice él. Y aquí vemos que en el punto de intersección con x es la proyección del punto máximo.
D. Del punto máximo en la parábola
J.C. Sobre el eje de las x´s, y de ahí ya si quieres la proyección hacia aquí
L. ¿Qué dijiste?
J.C. Que a partir de la intersección de la ecuación lineal con el eje de las x´s se puede decir que es la proyección del vértice
D. Del punto máximo de la parábola
J.C. Ah si, ¿punto máximo? o vértice
D. O del vértice de la parábola
J.C. En el eje de las x´s, claro
:
D. Es que ve cómo le pusimos, la intersección de la ecuación lineal con el eje de las x´s es la proyección del punto máximo de la parábola, se supone que estás diciendo que el eje de las x´s es éste ¿no?
J.C. Si
D. Pues ya, ahí a la intersección se supone que trazas una recta vertical, das el punto máximo
L. De ahí ya te da el punto máximo
D. Si, que va a ser (4, 4)
:
L. Ya se otra cosa, que por ejemplo la derivada puede ser una secante de la parábola, porque si encontramos mas puntos esta línea....
D. Ya se va a proyectar y la va a cortar en otro punto
L. Mas bien si haces esta ecuación la corta en dos puntos
D. Entonces es una secante
L. Con pendiente negativa

Podemos ver que algunas observaciones visual - gráfico y reflexiones sobre éstas los conducen a formular algunos significados de la función derivada, la aplicación de ésta para obtener algunas pendientes los hace reflexionar nuevamente para proponer un significado geométrico de la derivada.

D. A ver qué dice, utiliza la función para obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la parábola
J.C. Lo que pasa es que ya encontramos la derivada, ahora vamos a utilizar la derivada.
I. ¿Esta es la derivada?
D. Sí, vamos a utilizar esa
L. No, ¿apoco con esa vamos a encontrar nuestra pendiente?
I. ¿Con la lineal?
:
D. Porque dice utilice esta función para obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la parábola
J.C. ¡Ah! ya se cómo, ¿no será sustituyendo, si aquí x vale 1.5?
D. A lo mejor sí ¿la hacemos?
J.C. Sí
D. ¿Dónde está?
J.C. Sustituyamos ahí y encontramos cuanto vale. A ver 1.5(-.5)
D. No
J.C. -.75+2=1.25, supongamos que tenemos $y = 1.25$
D. A ver que te salió
J.C. 1.25
L. ¿Qué hiciste?
J.C. No se, estoy haciendo experimentos
D. Cuando está multiplicando pasa dividiendo, verdad
I. Sí
J.C. Si le pones $1.25x$, si es así, mira cómo experimenté. Sustituyes aquí x y haces toda la ecuación, te sale igual a 1.25 después de hacer todo, luego ese 1.25

sabes que aquí ese 1.25 lo tomas como pendiente y le pones cuanto vale y en 1.5, entonces me da que vale 2.4375, entonces ya tengo el valor de la pendiente, si tomamos esto como pendiente. Entonces ya puedo sustituir en $y = m(x-x_1) + y_1$, sustituimos $y=1.25(x-1.5) + 2.43$ que fué lo que hice acá, luego hago toda la operación y lo que me queda es esta, $1.25x + .5625$ y lo grafiqué y me salió eso y sí es tangente. Y ahora me supongo que sería lo mismo en la otra, sustituir x con el valor de 8, hacer todo igual, esa es la pendiente, nada mas pidió la pendiente ponle 1.25. Pero por que "y" en ésta es lo mismo que la pendiente en la recta tangente. Exacto a ver ponle 1.25

D. ¿Es 1.25?

En la explicación que hace Juan Carlos de sus "experimentos", de hecho hace una comprobación algebraica - visual - gráfica pues sustituye $x = 1.5$ en la función derivada, obtiene el punto (1.5, 2.4375) sobre la parábola y luego encuentra la ecuación de la recta tangente y la gráfica en la calculadora, observando en la pantalla la posible tangencia de la recta con la parábola, todavía más, conjetura entonces que con un trabajo semejante responde la otra pregunta planteada. Veamos cómo continúa la interacción hasta formular un significado más concreto de la función derivada:

D. Está bien lo que hiciste Juan Carlos, se supone que el punto que utiliza esta función para obtener la pendiente de la recta tangente a la parábola, entonces x vale 1.5, "y" vale 2.4375 y ya con eso lo puedes hacer con el método de aproximación

L. ¿También se puede hacer con el método de aproximación?

D. Sí, porque si ya tienes que (1.5, 2.4375) es un punto, es como si te diera (-2, -5) como sacas la pendiente de ese punto

J.C. Sí, por aproximación, a ver sácala por aproximación, a ver si sale 1.25, ponle Z-IN. Es algo que tiene que haber ahí

:

J.C. Pon el punto, o sea este punto está formado por la coordenada x y la coordenada "y" que es la pendiente

D. Que es la ordenada y

J.C. Entonces lógico que si nos da aquí la coordenada que va a darte esta recta en "y" va a ser la pendiente, no se si me entiendan

L. No

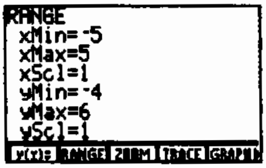
I. Yo no entendí lo último

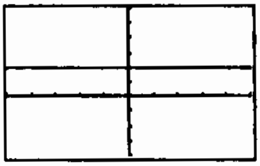
J.C. Mira, aquí nos daba el punto $x = -2$, y hacemos todo lo que quiera aquí es -2, sacamos la pendiente de la recta tangente aquí, pero la pendiente era 3, entonces nos decían sustituye y traza un punto que sea (-2, 3) que utiliza la pendiente 3 aquí, y ya venía la recta. Entonces todos los puntos de esta recta son pendientes en "y", o sea todas las ordenadas de "y" en esta recta son las pendientes de las tangentes de la parábola

En la última actividad, como era previsto, la anticipación de una función primitiva resultó más compleja, los tres equipos que lograron intuir la necesidad de una especie de proceso inverso respecto del que usaron en la actividad anterior alcanzaron los objetivos de la actividad. Mostramos a continuación las situaciones planteadas y los razonamientos que muestra el equipo III.

ACTIVIDAD 16

En los ejes coordenados de la siguiente figura se muestra la gráfica de la función constante $y = 2$.





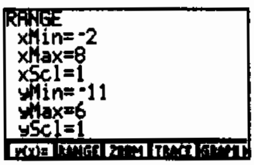
a) Construye una función tal que la gráfica de su derivada sea la función constante de la figura.

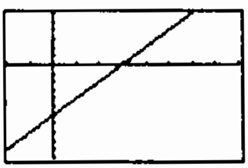
b) Indica gráficamente una familia de funciones que cumpla con lo requerido en el inciso (a).

c) Encuentra una expresión algebraica para la familia de funciones del inciso (b).

En la segunda situación solamente se cambia la función lineal, las preguntas son las mismas.

En los ejes coordenados de la siguiente figura se muestra la gráfica de la función y=2x-6.





La recta horizontal proporcionada no concuerda con su experiencia anterior, esto se puede ver en su interacción:

I. ¿Cuál es la derivada de 2?
J.C. No, no la derivada, aquí tienes que sacar o sea el paso contrario, te están dándo la derivada, entonces si la derivada es 2, la función cuadrática va a ser
I. ¿4?
J.C. No, 2x, no x^2
L. No, 2x, 2x
J.C. Pero 2x no es una función cuadrática, construye una función tal que la gráfica de su derivada sea la función de la figura, si sería 2x
L. Pero es una recta que nada más atraviesa

J.C. Sí, la familia podría ser. Mira, porque te acuerdas que si teníamos una función cuadrática, así como la que me enseñó, tenemos $2x^2 + 2x + 2$ y su derivada es $4x + 2$, se le quita esto, entonces si nos dan la derivada así, cómo la pasarías a esta forma, pues sería entre 2 y aquí le sumas uno, entonces te saldría $y = 2x^2$ y luego a esta nada más le sumas la incógnita, este no lo sabrías entonces es +c, mas un parámetro. Entonces te dan ésta, la gráfica de la cual es su derivada, es 2x + algo.
L. +c
J.C. La familia sería 2x +, no se podría ser 2x + 5 y todas van a ser paralelas
I. ¿En una familia?
:
J.C. Es derivada, $y = 2x$, le ponemos el por qué, ya que. ¿puedes sacar tangentes de una recta?
L. No
J.C. Entonces por eso está así
L. Puedes sacar su pendiente pero su tangente no

J.C. Está bien, su pendiente de esta gráfica es 2, si ¿no?. Entonces si te acuerdas que las pendientes siempre van a ser la proyección en "y", entonces aquí siempre va a ser 2. Entonces la recta que quieras poner, $2x$ más lo que quieras, siempre va a ser 2, entonces está bien todo concuerda. Si para obtener la derivada se multiplica el exponente de la incógnita por su coeficiente, para hacer el paso inverso, para realizar el paso inverso se divide 2/ 1 a 2

L. ¿2/1 + 2?

J.C. Se divide entre el doble del exponente actual de la incógnita. No, entre el doble no, entre el exponente mas la unidad

I. No, fíjate cómo la hiciste aquí, lo dividiste ¿no?

L. ¿Cómo vas a saber entre qué lo vas a dividir?

I. De todas maneras se tiene que dividir entre 2

J.C. ¡Claro que no! mira si te dan una ecuación $y = 2x^5 + 2x^2 + x + 2$ su derivada sería 5*2, $10x^4 + 4x + 1$, entonces aquí no lo puedes dividir entre dos porque saldría esto...

I. No, entre 5

J.C. Entonces cómo te explicarías eso, o sea al exponente actual de la derivada se le suma uno

I. Y es por el cual se va a dividir

L. Para realizar el paso inverso, a la x se le suma uno

J.C. Al exponente de la incógnita

L. Al exponente de la incógnita se le suma una unidad por el cual posteriormente se divide

⋮

L. Indica gráficamente una familia de funciones que cumplan con lo requerido en el inciso (a)

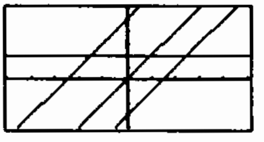
J.C. $y = 2x + c$, ahora ya que el parámetro hay que irnos concretos al punto, podemos decir que el parámetro c tietiene la función de mover la gráfica...

L. Ya que el parámetro c no afecta la penpendiente de $2x$ ¿no?

I. Es así ¿no? es lo que estás diciendo que la c no afecta para nada la pendiente de $2x$, ya que...

J.C. La pendiente dada por su derivada, ya que en este caso la única proyección en "y" es 2 y es la pendiente de la recta tangente.

En su conclusión presentan una gráfica con tres rectas paralelas con la explicación siguiente:



$y = 2x$
$y = 2x + 5$
$y = 2x - 3$

Para la segunda pregunta, la derivada como dato es la recta $y = 2x - 6$, con las reflexiones realizadas en la pregunta anterior, parece ser que ya no tuvieron gran dificultad:

L. Dice, en los ejes coordenados de la siguiente figura, se muestran las gráficas

J.C. $2x$-6, construye una función tangente, es es igual, nada más que aquí ya te agregan un término $2x$, va a ser $2x^2$ +, digo $x^2 - 6x$ y ya. ¡Ah! más algo

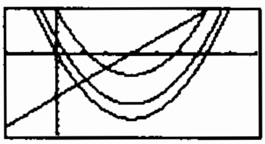
⋮

L. Bueno esto si va a ser una cuadrática, pero la de acá atrás no era

J.C. Mira vamos a comprobarlo así. Si le ponemos un valor digamos $x_1 = 3$, se supone que va ser cero ¿no? Vamos a ver si, si es cierto el punto máximo ahí la tangente va a ser cero

I. ¿Cero?
J.C. Sí, porque se supone que es el punto
I. Ah bueno, su pendiente va a ser igual a cero, en el punto máximo de la parábola ¿no?
:
J.C. Sí, o sea, nada más era para comprobar si era, vas a ver que aquí va a salir una raya (recta) así que es tangente en este punto, ahí está ya.
L. Eso quiere decir que su pendiente es igual a cero
J.C. Si, entonces si está correcta
I. La pendiente ya la tenemos aquí en la gráfica ¿no?
J.C. Indica gráficamente la familia de funciones que cumpla con lo requerido en el inciso (a), sería $y = x^2 - 6x + 6$ también ¿no? Sería la variante
:
J.C. Todo concuerda, todo está bien. ¿Qué pasa si variamos el parámetro A?

Presentan:



$y = 2x - 6$
$y = x^2 - 6x$
$y = x^2 - 6x + 6$
$y = x^2 - 6x + 2$

CONSIDERACIONES FINALES

Esta experiencia didáctica, que permitió participar simultánea y coordinadamente diversos elementos socioepistemológicos, con la intervención de las calculadoras con capacidad gráfica entre estudiantes de bachillerato sin antecedentes de cálculo elemental, permite configurar en nuestra opinión, no sólo una robusta ruta de investigación, sino también una postura crítica ante el uso de los recursos tecnológicos disponibles.

En este sentido, nuestra posición al respecto consiste en asumir que es posible lograr afectar la naturaleza del aprendizaje de ideas matemáticas entre los estudiantes en caso de que la intervención de los medios y dispositivos didácticos se acompañen seriamente de investigación en el campo de la matemática educativa. De manera que, a diferencia de las posturas empiristas para quienes la sola incorporación del recurso tecnológico basta para producir ganancias educativas, nosotros consideramos, que al igual que una pieza de conocimiento, exige del examen minucioso del efecto que tendrá entre los que aprenden. De hecho consideramos, como lo prueba este estudio, que la intervención de medios didácticos es insuficiente para lograr mejoras en el aprendizaje si no se transforman los medios en verdaderos dispositivos didácticos en los que el conocimiento científico que nuestra disciplina ha ido paulatinamente construyendo

Los resultados que hemos obtenido en este estudio didáctico, nos proporcionan información valiosa acerca de la naturaleza del aprendizaje de los alumnos en este medio tecnológico. En primer término, queremos destacar la presencia de un proceso de adaptación a las situaciones planteadas, en especial en la fase de acción. Particularmente, la estrategia de ensayo - error se convierte en un obstáculo metadidáctico de naturaleza epistemológica, pues si bien no trata de un concepto en particular, sino de una estrategia de solución, conserva del obstáculo epistemológico el sentido, esto es, la estrategia que resulta favorable en un momento dado de la ejecución ante tareas particulares, se torna un obstáculo en situaciones posteriores, un tanto más complejas y sofisticadas. De manera que la estrategia de ensayo y error funciona bien ante cierto tipo de tareas, pero fracasa ante otras. Pueden los estudiantes no darse cuenta, que un cambio de estrategia conduciría a una solución exitosa por su insistencia en la estrategia de base. Este fenómeno ha sido observado no sistemáticamente en otras prácticas similares con profesores en procesos de actualización.

Por otra parte, identificamos algunos aspectos que consideramos fueron fundamentales en la formulación de las respuestas de los estudiantes, en menor medida al nivel individual -mediante sus formulaciones escritas- y más claramente al nivel de la interacción en pequeños grupos o en el grupo completo -a través de las discusiones y los posteriores análisis de las transcripciones-. La construcción de conocimientos por parte de los estudiantes, como se confirma en las observaciones que hemos reportado anteriormente, utiliza procesos diversos, como el reconocimiento de patrones, la búsqueda permanentemente de similitudes y el apoyo en sus conocimientos previos, incorporándolos a las facilidades que les brindan las condiciones técnicas del medio tecnológico. La posibilidad de visualizar estaría ausente de otra manera. En nuestra opinión, la visualización de los conceptos y procesos matemáticos de nuestro interés, no es una consecuencia de la incorporación del recurso tecnológico, como simplemente podría creerse, sino por el contrario obedece a la articulación entre un diseño teórico de la situación didáctica que atiende a una epistemología alternativa como describimos en detalle en la sección de socioepistemología, pues ese diseño permite a los estudiantes apoyarse en las capacidades técnicas de las calculadoras. Es el diseño de la situación la que permite el uso de la tecnología.

Citemos como ejemplo, el caso del denominado proceso inverso, es decir, construir la gráfica de una función primitiva a partir de la gráfica de una función. aquí encontramos que aquellos estudiantes que lograron una resolución satisfactoria de la actividad, utilizaron al nivel intuitivo la naturaleza inversa de las relaciones entre las funciones, usaron transformaciones gráfico - algebraicas, aunque las formulaciones y las justificaciones que exhiben se apoyan fundamentalmente en aspectos visuales y gráficos y en menor medida, en aspectos propiamente algebraicos.

En nuestra opinión, esta experiencia educativa que ahora reportamos, nos permite sostener una posición respecto del papel que la tecnología juega en las realizaciones didácticas, la cual consiste en asumir que efectivamente es posible afectar la naturaleza del aprendizaje de ideas matemáticas entre los estudiantes, sólo a condición de que la intervención de los medios didácticos sea entendida como verdaderos dispositivos didácticos bajo el control del diseño de las actividades, de otro modo, su sóla introducción sería insuficiente para lograr los aprendizajes esperados.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1998). L'Evolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 18(2); 231-261.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: Introducción al concepto de derivada.* Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, Baercelona, España.

Cantoral, R. & Farfán R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon,* 42, 353-369.

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: El caso de la Serie de Taylor. *Mathesis* 11(1), 55-101.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas.* Tesis Doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Dagher, A. (1994). *Apprentissage dans un environnement informatique: possibilite, nature, transfert des acquis.* Francia: Equipe Didirem, Univerité Paris 7.

Dolores, C. (1989). *Obstáculos epistemológicos relativos al concepto de derivada.* Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Guerrero. México

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

García, D. (1998). *Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo.* Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Ruthven, K. (1992). Personal Technology and Classroom Change: A British Perspective. En T. J. Fey (Ed.), *Calculator in mathematics education: 1992 yearbook* (pp. 91-100). Reston, VA: NCTM.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the concept of function. En Dubinsky, E. & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* (pp. 23-58). EE.UU.: MAA