



Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

relime@mail.cinvestav.mx

ISSN (Versión impresa): 1665-2436

MÉXICO

2000

Antonio Cañada

UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA DE LAS SERIES DE FOURIER: DE LAS  
ECUACIONES DE ONDAS Y DEL CALOR A LOS OPERADORES COMPACTOS Y  
AUTOADJUNTOS

*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,*  
noviembre, año/vol. 3, número 003

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Distrito Federal, México

pp. 293-320



## Una perspectiva histórica de las series de Fourier: de las ecuaciones de ondas y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos\*

Antonio Cañada<sup>1</sup>

### RESUMEN

Uno de los problemas del que se ocuparon los matemáticos del siglo XVIII es el "problema de la cuerda vibrante". Éste fue estudiado por D'Alembert, Euler y un poco más tarde, en 1753, por Daniel Bernoulli. La solución dada por éste consistió en expresarla como superposición de ondas sencillas. Sus ideas fueron aplicadas y perfeccionadas por Fourier, en 1807, en el estudio de la conducción del calor. Quedaron escritas en la obra "Théorie analytique de la Chaleur", publicada en 1822. Los razonamientos de Fourier plantearon controversias y cuestiones que han influido en la historia de la Matemática. Aquí comentamos algunas de ellas, tales como la existencia de funciones continuas no derivables, teoría de conjuntos de Cantor y nociones de la integral de Cauchy, Riemann y Lebesgue. Tratamos además la presentación actual de las series de Fourier. Finalmente comentamos el papel jugado en este siglo por el Análisis Funcional para situar a las series de Fourier en su marco abstracto.

### ABSTRACT

One of the problems worked on by eighteenth century mathematicians is the "vibrant cord problem". This was studied by D'Alembert, Euler and shortly after in 1753, by Daniel Bernoulli. The solution provided by the last consisted in expressing it as a superposition of simple waves. His ideas were applied and improved by Fourier in 1807 in the study of heat conduction. They were written in the work "Théorie analytique de la Chaleur" published in 1822. Reasoning by Fourier exposed controversies and questions that have influenced the history of Mathematics. Here we comment some of them, such as the existence of continuous non-derived functions, Cantor's compound theory and notions of the integral by Cauchy, Riemann and Lebesgue. We also handled the current presentation of the series by Fourier. Finally, we commented on the role played in this century by Functional Analysis in placing Fourier's series within its abstract framework.

### RÉSUMÉ

Parmi les problèmes sur lesquels se sont penchés les mathématiciens du XVIII<sup>ème</sup> siècle, se trouve « le problème de la corde vibrante ». Ce problème a été analysé par d'Alambert, par Euler, et un peu plus tard, en 1753, par Daniel Bernoulli. La solution proposée par ce dernier consistait à exprimer cette question sous la forme de superposition d'ondes simples. Ses idées furent appliquées puis perfectionnées par Fourier en 1807, dans le cadre de son étude sur la conduction de la chaleur. Ses résultats ont été publiés par la suite, en 1822, sous le titre:

\* Este artículo es una versión ampliada de una conferencia impartida en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada el día 24/4/1997, atendiendo a la invitación realizada por EFE (Asociación de estudiantes de Física y Electrónica). El autor agradece a F. Roca su colaboración en la elaboración del texto en el procesador MS Word.

« Théorie analytique de la chaleur ». Les raisonnements de Fourier donnèrent lieu à nombre de controverses et soulevèrent un certain nombre de questions qui devaient influencer par la suite l'histoire des Mathématiques. Nous souhaitons ici commenter certaines de ces questions, comme l'existence de fonctions continues non-dérivables, la théorie des ensembles de Cantor, ainsi que les notions de l'intégrale de Cauchy, Riemann et Lebesgue. Nous nous pencherons encore sur la forme sous laquelle se présentent actuellement les séries de Fourier. Pour terminer, nous examinerons le rôle qu'a pu jouer au cours de ce siècle l'Analyse Fonctionnelle pour parvenir à situer les séries de Fourier dans le cadre abstrait qui leur correspond.

## RESUMO

Um dos problemas que ocuparam a atenção dos matemáticos do século XVIII é o "problema da corda vibrante." Este problema foi estudado por d'Alembert, Euler e, um pouco mais tarde, em 1753, por Daniel Bernoulli. A solução dada por este último consistiu em defini-la como a superposição de ondas simples. Suas idéias foram aplicadas e aperfeiçoadas por Fourier, em 1807, no estudo da condução do calor. Ficaram registradas na obra "Théorie Analytique de la Chaleur", publicada em 1822. Os raciocínios de Fourier levantaram controvérsias e questões que influenciaram a história da Matemática. Aqui comentamos algumas delas, tais como a existência de funções contínuas não deriváveis, a teoria de conjuntos de Cantor e noções da integral de Cauchy, Riemann e Lebesgue. Além disso, tratamos a apresentação atual das séries de Fourier. Finalmente, comentamos o papel desempenhado neste século pela Análise Funcional, para situar as séries de Fourier em seu marco abstrato.

### 1. D'ALEMBERT, EULER Y LA ECUACIÓN DE LA CUERDA VIBRANTE

Uno de los problemas más interesantes del que se ocuparon los científicos del siglo XVIII, y que se presenta con relativa frecuencia en los problemas físicos relacionados con procesos oscilatorios, fue el que se conoce con el nombre de "El problema de la cuerda vibrante". Éste, puede describirse en la situación más elemental posible, de la siguiente forma: Supongamos que una cuerda flexible se estira hasta quedar tensa y que sus extremos se fijan, por conveniencia, en los puntos  $(0,0)$  y  $(0,\pi)$  del eje de abscisas. Entonces se tira de la cuerda hasta que ésta adopte la forma de una curva dada por la ecuación  $y = f(x)$  y se suelta (ver Figura 1).

La cuestión es: ¿Cuál es el movimiento descrito por la cuerda? Si los desplazamientos de ésta se hayan siempre en un mismo plano y el vector del desplazamiento es perpendicular, en cualquier momento, al eje de abscisas, dicho movimiento vendrá descrito por una función, donde  $u(x,t)$  representará el desplazamiento vertical de la cuerda, en la coordenada  $x$ . ( $0 \leq x \leq \pi$ ) y el tiempo  $t$  ( $t \geq 0$ ). El problema que se plantea es obtener  $u(x,t)$  a partir de  $f(x)$ .

El primer matemático que elaboró un modelo apropiado para el anterior problema fue Jean Le Rond D'Alembert. Bajo diversas hipótesis (referentes fundamentalmente a que las vibraciones sean "pequeñas"), D'Alembert demostró en 1747 (Hist. de La Academia de Berlín, 3, 1747, 214-219\*; ver Tijonov & Samarski, 1980 y Weinberger, 1970, para más detalles) que la

\* Referencia tomada de (Kline, 1992).

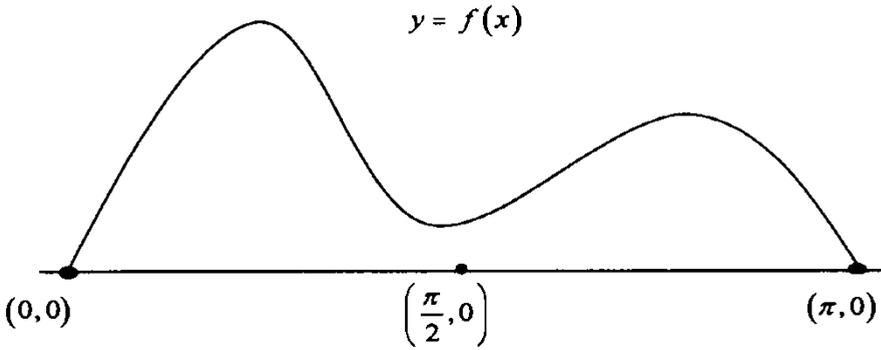


Figura 1

función  $u$  debe satisfacer las condiciones:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0$$

La primera condición en (1.1) es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, conocida con el nombre de **Ecuación de Ondas**. La segunda condición representa la posición inicial de la cuerda, mientras que la tercera significa que la velocidad inicial de la misma es cero (recordemos que, una vez llevada a la posición  $f(x)$  la cuerda se suelta). La última relación expresa el hecho de que, para cualquier tiempo, la cuerda se mantiene fija en sus extremos.

D'Alembert demostró también que la solución de (1.1) viene dada por:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)] \tag{1.2}$$

donde  $\tilde{f}$  es "una extensión conveniente de la función  $f$ ".

De manera más precisa, y con el lenguaje de hoy en día, el teorema de D'Alembert (Tijonov & Samarski, 1980; Weinberger, 1970), confirmó que la posición futura de la cuerda está completamente determinada por su posición inicial:

**TEOREMA 1.1** Sea  $f \in C^2[0, \pi]$  tal que  $f(0) = f(\pi) = f'(0^+) = f'(\pi^-) = 0$

Entonces (1.1) tiene una única solución  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  [ $\Omega = (0, \pi) \times (0, +\infty)$ ] Además viene dada por la fórmula (1.2), donde  $\tilde{f}$  es la extensión a  $\mathfrak{R}$  (conjunto de los números reales), impar y  $2\pi$ -periódica de la función  $f$  (véase la Figura 2).

No se conoce con exactitud la manera en que D'Alembert llegó a la fórmula (1.2), pero un camino muy probable pudo ser el siguiente: el cambio de variables  $\xi = x+t$ ,  $\mu = x-t$  transforma la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

en otra más simple:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$$

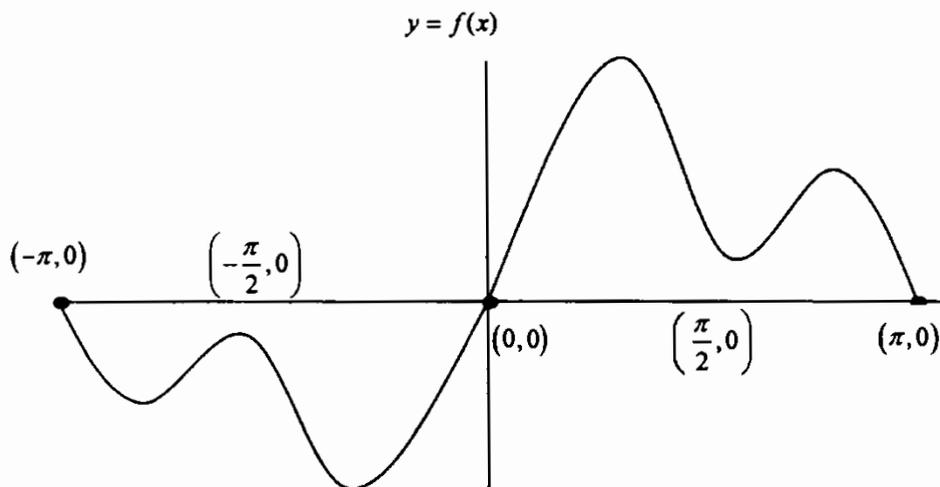


Figura 2

Las soluciones de esta última ecuación son trivialmente de la forma:

$$u(\xi, \mu) = F(\xi) + G(\mu)$$

Combinando esta última relación con las otras condiciones en (1.1), se puede llegar a intuir la forma (1.2) que tiene la solución de (1.1).

La interpretación física de la solución dada por D'Alembert es muy interesante: La función:

$$\frac{1}{2} \tilde{f}(x+t)$$

representa una onda (una solución de la ecuación de ondas) que se desplaza hacia la izquierda con velocidad 1 (véase la Figura 3). Análogamente, la función:

$$\frac{1}{2} \tilde{f}(x-t)$$

representa otra onda que se desplaza hacia la

derecha con velocidad 1. De este modo, la solución de (1.1) es la superposición de dos ondas, una de las cuales se desplaza hacia la izquierda y otra hacia la derecha, ambas con velocidad 1. Por este motivo se dice que la fórmula (1.2) se ha obtenido usando el **Método de propagación de las ondas**.

La fórmula (1.2) fue también demostrada por Euler (Mora Acta Erud., 1749, 512-527\*), quien difería fundamentalmente de D'Alembert en el tipo de funciones iniciales  $f$  que podían considerarse. De hecho, estas diferencias pueden considerarse como una de las primeras manifestaciones escritas sobre los problemas que ha llevado consigo la definición de la noción de "función", un concepto que hoy en día presumimos tener muy claro. Mientras que para D'Alembert,  $f$  debería tener una fórmula concreta o expresión analítica, Euler defendía que no había ninguna razón física para no admitir como posiciones iniciales  $f$  a aquellas que, en diferentes partes de  $[0, \pi]$ , viniesen definidas por expresiones distintas,

\* Referencia tomada de (Kline, 1992).

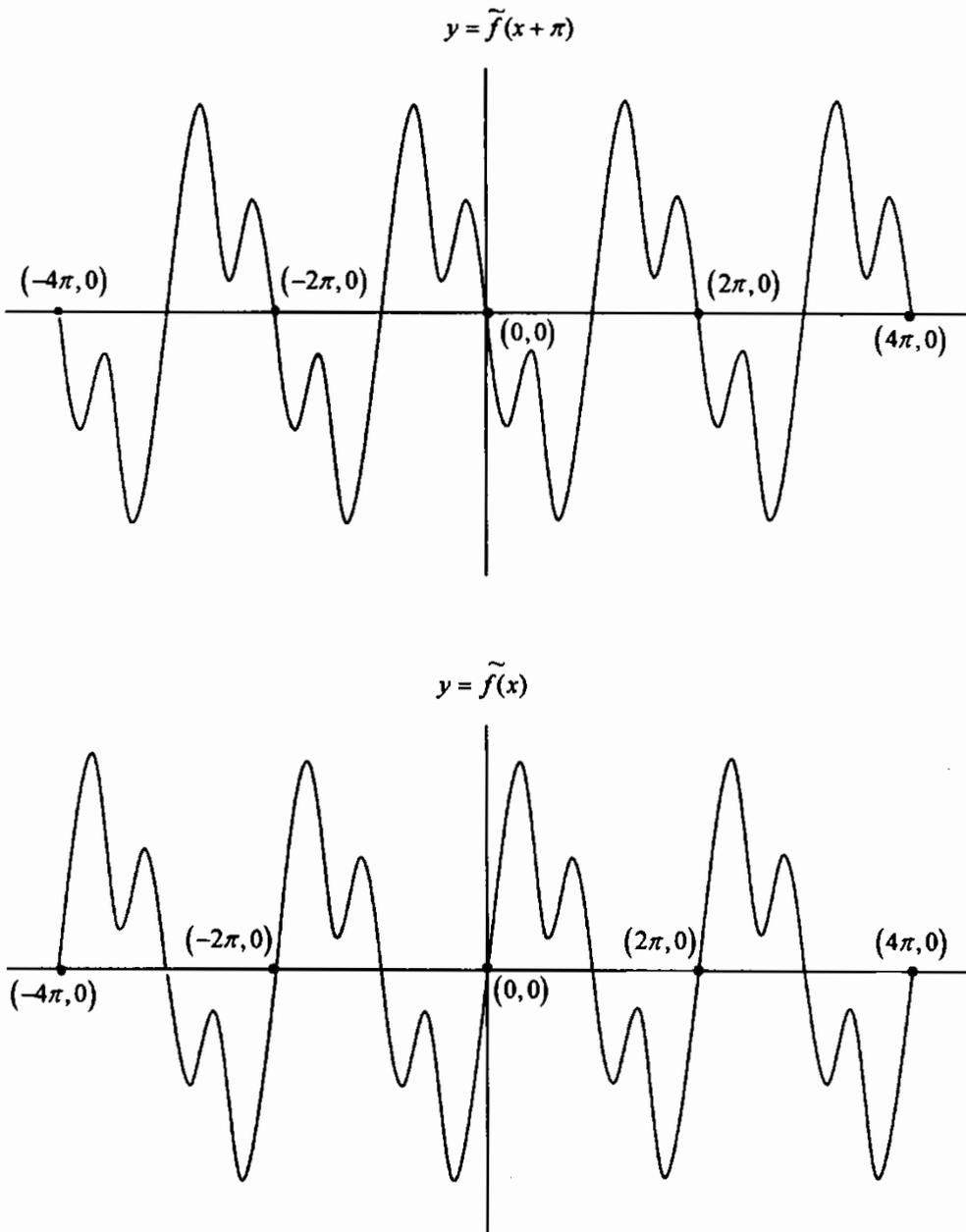


Figura 2

siempre que al considerarlas unidas, la posición inicial resultante tuviese una apropiada regularidad.

Parece ser que tal discusión entre D'Alembert y Euler provenía del hecho de que en su tiempo se admitía que cada función daba lugar a una gráfica, pero no recíprocamente (cuando la gráfica considerada tenía diferentes expresiones en distintos intervalos). En resumen, Euler defendía que cualquier gráfica podía considerarse como curva inicial, tesis que no era compartida por D'Alembert.

Otra manera de obtener la solución del problema (1.1), completamente distinta de la vista anteriormente, fue propuesta por Daniel Bernoulli en 1753 (Hist. de l'Acad. de Berlín, 9, 1753, 147-172; 173-195). La idea clave es obtener la solución de (1.1) como superposición de ondas más sencillas, concretamente aquellas que son de la forma:

$$u_n(x, t) = \text{sen}(nx)\text{cos}(nt), \quad \forall n \in N \quad (1.3)$$

donde  $N$  es el conjunto de los números naturales. Para cada tiempo  $t$  fijo, la anterior función es un múltiplo de la función  $\text{sen}(nx)$ , que se anula exactamente en  $n-1$  puntos del intervalo  $(0, \pi)$ . Así, si pudiésemos observar la vibración de la cuerda correspondiente a las ondas  $u_n$  tendríamos  $n-1$  puntos, llamados nodos, en los que la cuerda se mantendría constantemente fija en el eje de abscisas (como en los extremos del intervalo  $[0, \pi]$ ). Entre dichos nodos, la cuerda oscilaría de acuerdo con (1.3).

¿Cómo concibió Bernoulli la idea anterior? Parece ser que una posibilidad es que usase sus conocimientos musicales. Para ello se basó en que el sonido que emite una cuerda vibrante es, en general, superposición de armónicos, es decir, superposición de funciones de la

forma  $u_n(x, t)$ . Tales funciones representan, para  $n = 1$  el tono fundamental y para  $n > 1$  sus armónicos, y desde el punto de vista musical se corresponden con los tonos puros. Así, Bernoulli afirmó que cualquier sonido que produjese la vibración de la cuerda debe ser superposición de tonos puros. Desde el punto de vista matemático, ello significa que la solución de (1.1) debe poder representarse de la forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(nx)\text{cos}(nt) \quad (1.4)$$

donde los coeficientes  $a_n$  han de elegirse adecuadamente para que se satisfaga (1.1).

Para tranquilidad de los matemáticos, diremos que hay otra manera de llegar a la expresión anterior (no obstante, esta segunda forma, que es posible que fuese también usada por Bernoulli, no permite, desde el punto de vista intuitivo pensar que (1.4) es posible, al menos en una primera impresión. A pesar de ello, como todo en esta vida tiene ventajas e inconvenientes, parece ser que este segundo punto de vista fue importantísimo en el estudio por parte de Fourier, del problema de la conducción del calor, que trataremos posteriormente). El punto de partida de este otro planteamiento puede ser la siguiente pregunta elemental: ¿Cuáles son las soluciones más sencillas posibles de (1.1)?

Creo que estaremos de acuerdo en que, al ser la solución de (1.1) una función  $u(x, t)$  de dos variables, tales soluciones sencillas han de ser producto de una función de  $x$  por una función de  $t$ ; es decir,  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , o lo que es lo mismo, **funciones con variables separadas**.

Derivando y sustituyendo, de manera formal, en (1.1), llegamos a los dos problemas siguientes de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

con  $x \in (0, \pi)$  y  $X(0) = X(\pi) = 0$  (1.5)

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.6)$$

En la expresión anterior,  $\lambda$  hace el papel de parámetro real.

Es sencillo probar (véase Coddington, 1961) que (1.5) tiene solución no trivial si y solamente si  $\lambda \in \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ . Además, si  $\lambda = n^2$ , para algún  $n$  natural, el conjunto de soluciones de (1.5) es un espacio vectorial real de dimensión uno engendrado por la función  $\text{sen}(nx)$ . Análogamente, para  $\lambda = n^2$ , el conjunto de soluciones de (1.6) es un espacio vectorial real de dimensión dos, cuya base la constituyen las funciones  $\cos(nt)$ ,  $\text{sen}(nt)$ .

Disponemos por tanto de un procedimiento que nos permite calcular infinitas "soluciones elementales" de la ecuación de ondas, a saber: las funciones de la forma  $a_n u_n$ , donde  $a_n \in \mathbb{R}$  y  $u_n$  se define como en (1.3). Es trivial que, si la posición inicial  $f$  de la cuerda, en (1.1), es algún múltiplo de  $\text{sen}(nx)$  (o una combinación lineal finita de funciones de este tipo), entonces la solución buscada de (1.1) es un múltiplo adecuado de  $u_n$  (respectivamente, una adecuada combinación lineal de funciones de esta forma. Es curioso poner de manifiesto que este hecho era conocido por Euler, como manifestó Bernoulli en su trabajo. Sin embargo, Euler trató sólo el caso de superposiciones finitas). Ahora bien,  $f$  no es, en general de la forma justamente mencionada, pero, y ahora viene la pregunta clave: ¿Será posible obtener la

solución de (1.1), para cualquier  $f$  dada, como superposición de las anteriores soluciones sencillas  $u_n$ ? Esto es lo que propuso Bernoulli.

Si la solución propuesta por Bernoulli fuese correcta, ello obligaría a que:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(nx)$$

y por lo tanto que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(nx), \quad \forall x \in [0, \pi], \quad (1.7)$$

para "una adecuada elección de los coeficientes  $a_n$ ".

Las ideas expuestas por Bernoulli en el trabajo mencionado, no tuvieron aceptación en su tiempo. En particular, recibió duras contestaciones por parte de D'Alembert y Euler, quienes no admitían que cualquier función con una expresión analítica pudiera representarse en la forma (1.7) (D'Alembert) ni menos aún cualquier función (Euler).

Representativo de esto que decimos puede ser el artículo de D'Alembert titulado "Fundamental", contenido en el volumen séptimo de la famosa "Encyclopédie". De manera más precisa, la parte derecha de (1.7), suponiendo que fuese convergente, era para Euler una función, mientras que la parte izquierda podría representarse mediante varias funciones, en diferentes intervalos. La controversia se prolongó durante años sin llegarse a ningún acuerdo, pues Daniel Bernoulli seguía firme en sus ideas, argumentando que en (1.7) hay "suficientes coeficientes" como para poderlos elegir, de tal manera que (1.7) se cumpla. Por tanto, para Bernoulli, (1.4) representaba la "solución general" de (1.1).

El tiempo ha demostrado que Bernoulli estaba más cerca de la verdad que Euler. De hecho, hoy en día el teorema siguiente forma parte de cualquier curso elemental de Ecuaciones en Derivadas Parciales (véase Tijonov & Samarski, 1980; Weinberger, 1970):

**TEOREMA 1.2.** Sea  $f \in C^2[0, \pi]$ , tal que  $f(0) = f(\pi) = f'(0^+) = f'(\pi^-) = 0$ .

Entonces (1.1) tiene una única solución  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  [  $\Omega = (0, \pi) \times (0, \infty)$  ]. Además  $u$  viene dada por la fórmula (1.4), donde:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi) \operatorname{sen}(n\xi) d\xi, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.8)$$

Es usual, al explicar en los cursos actuales el problema (1.1), hacerse la siguiente pregunta: ¿Cuál de los dos, el teorema 1.1 o el teorema 1.2, es mejor? Obviamente, el matemático preocupado por tener la mayor generalidad posible diría que, sin duda, el 1.1, pues exige a la condición inicial  $f$  menos regularidad. Este es el motivo por el cual el teorema 1.2 ha sido en cierta forma relegado de los libros de texto sobre el tema. Sin embargo, al matemático que le importe más obtener la solución de (1.1) de la manera más explícita posible, le parecerá mejor el teorema 1.2. Es claro que no hay un teorema mejor que otro: ambos se complementan. El primero de ellos muestra, para  $f \in C^2[0, \pi]$ , la existencia y unicidad de solución de (1.1), proporcionando una manera teórica de construirla, mientras que el segundo afirma que si " $f$  es mejor", también la solución se puede "representar mejor". De lo que no nos cabe ninguna duda es de que, limitar la discusión docente a este aspecto, sin ninguna referencia histórica a los trabajos de D'Alembert, Euler y Bernoulli, es tremendamente pobre para la formación científica del alumno, que no tiene así la oportunidad de conocer la filosofía tan diferente que se encuentra presente en los dos teoremas.

## 2. FOURIER Y EL PROBLEMA DE LA CONDUCCIÓN DEL CALOR

Hubo que esperar 54 años hasta que las ideas de D. Bernoulli fueron tomadas en cuenta por el barón Jean Baptiste-Joseph Fourier, matemático y físico francés, quien, entre otras actividades, acompañó a Napoleón, en calidad de científico, en la campaña de éste a Egipto. Allí, como secretario del "Instituto de Egipto", hizo gala de una gran competencia en diversos asuntos administrativos.

Al regresar a Francia, y como profesor de Análisis de la Escuela Politécnica, Fourier se interesó por la teoría de la conducción del calor en los cuerpos sólidos. En 1807 envió un artículo a la Academia de Ciencias de París, que trataba sobre dicho tema. Más concretamente, Fourier consideró una varilla delgada de longitud dada, digamos  $p$ , cuyos extremos se mantienen a  $0^\circ$  centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura en la varilla viene dada por una función  $f(x)$  (se supone que la temperatura de la varilla en cada sección transversal de la misma es constante), ¿Cuál será la temperatura de cualquier punto  $x$  de la varilla en el tiempo  $t$ ? Suponiendo que la varilla satisface condiciones físicas apropiadas (Tijonov & Samarski, 1980), Fourier demostró que si  $u(x, t)$  representa la temperatura en la sección  $x$  y en el tiempo  $t$ , entonces la función  $u$  debe satisfacer:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t < T$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

La primera condición en (2.1) es una Ecuación

en Derivadas Parciales de segundo orden, conocida con el nombre de Ecuación del Calor. La segunda significa que la temperatura, en los extremos de la varilla, se mantiene a  $0^\circ$  centígrados en cualquier tiempo, mientras que la última relación representa la distribución inicial de temperatura en la varilla considerada.

Partiendo de las ideas de Bernoulli, para la ecuación de ondas, Fourier buscó las soluciones más sencillas que puede presentar la ecuación del calor: aquellas que son de la forma  $u(x,t) = X(x)T(t)$ . Imponiendo la condición de que tales funciones satisfagan, formalmente, dicha ecuación, obtenemos, como en el caso de la ecuación de ondas, los dos problemas siguientes de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} X''(x) + \mu X(x) &= 0 \\ x \in (0, \pi), X(0) = X(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$P'(t) + \mu P(t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (2.3)$$

En la expresión anterior,  $\mu$  hace el papel de parámetro real.

Como antes, (2.2) tiene solución no trivial si y solamente si  $\mu \in \{\pi^2, n \in \mathbb{N}\}$ . Además, si  $\mu = \pi^2$ , para algún  $n$  natural, el conjunto de soluciones de (2.2) es un espacio vectorial real de dimensión uno engendrado por la función  $\text{sen}(nx)$ . Análogamente, para  $\mu = \pi^2$ , el conjunto de soluciones de (2.3) es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base la constituye la función  $\exp(-n^2 t)$ . Así, disponemos de un procedimiento que nos permite calcular infinitas "soluciones elementales" de la ecuación del calor, a saber: las funciones de la forma  $a_n v_n$ , donde  $a_n \in \mathbb{R}$  y  $v_n$  se define como:

$$v_n(x,t) = \exp(-n^2 t) \text{sen}(nx) \quad (2.4)$$

Es trivial que, si la distribución inicial de temperatura,  $f$ , es algún múltiplo de  $\text{sen}(nx)$  (o una combinación lineal finita de funciones de este tipo), entonces la solución buscada de (2.1) es un múltiplo adecuado de  $v_n$  (respectivamente, una adecuada combinación lineal de funciones de esta forma).

Ahora bien,  $f$  no es, en general de la forma justo mencionada, pero, y aquí demostró Fourier, como Bernoulli, una enorme intuición ¿Será posible obtener la solución  $u$  de (2.1), para cualquier  $f$  dada, como superposición de las anteriores soluciones sencillas  $v_n$ ? Es decir ¿Será posible elegir adecuadamente los coeficientes  $a_n$  tal que la única solución de (2.1) sea de la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 t) \text{sen}(nx) \quad (2.5)$$

(idea análoga a la que tuvo Bernoulli)?

Fourier afirmó en su artículo que esto era así. Observemos que nuevamente llegamos a que, entonces, se ha de satisfacer la relación (1.7). Tenemos la misma cuestión para dos problemas completamente diferentes: el problema (1.1) y el problema (2.1). Sin embargo, es de justicia mencionar que Fourier, a diferencia de Bernoulli, alcanzó la fórmula (1.8) para el cálculo de los coeficientes  $a_n$  (aunque la forma en que lo hizo fue uno de los puntos más criticado por los matemáticos de la época), llamados desde entonces coeficientes de Fourier.

El artículo de Fourier fue estudiado por Lagrange, Laplace y Legendre y fue rechazado por la Academia Francesa, básicamente por

la manera en que dedujo la ecuación del calor y por la falta de rigor en la obtención de sus conclusiones (siempre según la opinión de los académicos citados). No obstante, los miembros de tan prestigiosa institución estaban convencidos de la importancia que tenían los problemas relacionados con la propagación del calor y, los resultados teóricos presentados por Fourier tenían una gran concordancia con diversos experimentos llevados a cabo previamente. Por este motivo, convocaron un concurso sobre el tema. El premio fue otorgado a Fourier en 1812, pero a pesar de esto, los miembros de la Academia seguían criticando su falta de rigor, de tal manera que, a pesar de obtener el citado premio, Fourier no consiguió el propósito de publicar su trabajo en la célebre serie "Mémoires" de la Academia Francesa. Fourier, haciendo gala de un gran tesón, siguió trabajando en el tema y en 1822 publicó su famoso libro *Théorie Analytique de la Chaleur* (Fourier, 1822) donde incorporó parte de su artículo escrito en 1812, prácticamente sin cambio. Este libro es actualmente una de las obras Clásicas en Matemáticas. Dos años más tarde consiguió el cargo de Secretario de la Academia Francesa y al fin pudo publicar el mencionado artículo en la serie "Mémoires".

La Historia ha dado la razón a Fourier, como se muestra en el siguiente teorema, parte, hoy en día, de cualquier curso de introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales (Tijonov & Samarski, 1980; Weinberger, 1970).

**TEOREMA 2.1.** *Sea  $f \in C^1 [0, \pi]$  tal que  $f(0) = f(\pi) = 0$ . Entonces (2.1) tiene una única solución:*

$u \in C_t^1(\Omega) \cap C_x^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  (de clase  $C^1$ , respecto de  $t$ ,  $C^2$  respecto de  $x$  y continua en  $\bar{\Omega}$ , donde  $\Omega = (0, \pi) \times (0, T]$ ). Además, dicha solución viene dada por la fórmula (2.5) donde los coeficientes  $a_n$  están

*definidos en (1.8).*

### 3. INFLUENCIA DE LAS IDEAS DE FOURIER EN LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

Otros tipos de problemas distintos de los aquí considerados, conducen a la posibilidad de desarrollos diferentes de (1.7). Por ejemplo, el problema de las vibraciones de una cuerda libre en sus extremos (Weinberger, 1970), nos plantea la cuestión de si será posible desarrollar una función dada  $f$ , definida en  $[0, \pi]$ , en una serie de la forma:

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx), \quad \forall x \in [0, \pi], \quad (3.1)$$

para coeficientes  $b_n$  adecuados (véase la sección 4.2). Muchos problemas de naturaleza periódica dan lugar a plantearse la cuestión de si se podrá obtener, para una función  $f$ , definida sobre  $[-\pi, \pi]$ , un desarrollo de la forma:

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)) \quad (3.2)$$

$$\forall x \in [-\pi, \pi]$$

La posibilidad de obtener una respuesta afirmativa a las anteriores cuestiones es, cuanto menos en una primera impresión, aparentemente difícil y por qué no decirlo, descabellada. No es pues de extrañar la reacción de D'Alembert y Euler ante las afirmaciones de Bernoulli, y de los miembros de la Academia Francesa ante las afirmaciones de Fourier. Sin embargo, aunque de manera lejana en sus planteamientos y en su origen, el problema tiene algo de similitud con el desarrollo infinito de Taylor de una función suficientemente regular en un punto dado, pues en ambos casos se trata de desarrollar una función dada en una serie, utilizando para ello funciones "más sencillas": los polinomios en el caso de la fórmula de Taylor y las funciones trigono-

métricas en los casos de las fórmulas (1.7), (3.1) y (3.2). Es claro que hay también diferencias fundamentales entre ambos propósitos, que se observan no sólo en el origen del problema sino también en su posterior desarrollo. Pero es evidente que en los siglos XVIII y XIX, ya nadie dudaba de la utilidad del desarrollo de Taylor. Se puede consultar la referencia (Fatou, 1906) para apreciar con detalle algunas de las relaciones más curiosas e importantes entre las series de Taylor y de Fourier.

Las ideas expuestas por Fourier en el libro citado plantearon de manera inmediata innumerables interrogantes. Algunas fueron las siguientes:

- Dada una función real  $f$  definida en  $[0, \pi]$  (o en  $[-\pi, \pi]$ ) ¿Será posible encontrar coeficientes  $a_n$  o  $b_n$  adecuados tales que se tenga el desarrollo (1.7), ó (3.1) ó (3.2)? ¿Cuáles son las expresiones concretas de tales coeficientes?
- ¿En qué sentido se tiene la anterior convergencia?
- ¿Qué tipos de problemas pueden resolverse usando las anteriores ideas?

Las cuestiones anteriores han originado, a lo largo de casi dos siglos, gran cantidad de investigación y han sido muchas las partes de la Matemática que se han desarrollado a partir de ellas. Comentar, incluso sólo las más significativas, sería demasiado largo. Sin embargo, no nos resistimos a mencionar algunas de las que más nos han llamado la atención (véase, también González Velasco, 1992, donde se discuten otras).

### 3.1 Funciones continuas no derivables

Las nociones de continuidad y diferencia-

bilidad de una función real de variable real están hoy en día perfectamente establecidas y, ya desde la enseñanza secundaria, se distinguen claramente ambos conceptos. Sin embargo, históricamente no ha ocurrido así. De hecho, el primitivo concepto de derivada debido a Newton y Leibnitz era bastante más complicado de expresar del que conocemos en la actualidad. Fue Cauchy quien, unificando las notaciones de Newton y Leibnitz, y basado en una definición anterior de Bolzano de 1817, introdujo, en 1823 (Résumé des leçons, OEuvres, (2), 4, 22\*), la definición que hoy en día se da en todos los libros de texto:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.3)$$

Durante bastante tiempo se estuvo convenido de que cualquier función continua debía ser derivable, excepto posiblemente en conjuntos "aislados" de puntos. Pero, insistamos, ¿En cuántos puntos puede una función continua no ser derivable? La respuesta a esta pregunta estuvo relacionada desde el principio con la siguiente cuestión sobre series de Fourier: ¿En cuántos puntos puede no converger la serie de Fourier de una función continua dada? De hecho, después de la publicación, en 1822, del libro de Fourier, Dirichlet se ocupó durante varios años del problema de la convergencia de las series de Fourier, dando, por primera vez de forma rigurosa, un conjunto de hipótesis para garantizar la convergencia de las mismas (Jour. für Math., 4, 1829, 157-69\*). Este conjunto de hipótesis exigía, además de otras condiciones, la continuidad. Durante, aproximadamente, los cincuenta años siguientes, se pensó que la continuidad de la función debería ser suficiente para la convergencia de la serie de Fourier. Sin embargo, algunos matemáticos sospechaban que ello no debía ser así, lo que motivó el

\* Referencia tomada de (Kline, 1992).

estudio de las funciones "raras" en el sentido de que tales funciones fuesen continuas, pero no derivables "en el máximo número de puntos posibles".

El ejemplo que comenzó a poner las cosas en su sitio se debió a Riemann (Abh. der Ges. der Wiss. zu Göttingen, 13, 1868, 87-132; Werke, 227-264\*), quien en esa época estaba tratando, entre otras cosas, la posibilidad del desarrollo de una función dada en serie trigonométrica.

El concepto de serie trigonométrica, más general que la de Fourier, es el de una serie de la forma:

$$\frac{b_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \operatorname{sen}(nx) + b_n \operatorname{cos}(nx)) \quad (3.4)$$

donde  $a_n, b_n$  son números reales, no necesariamente coeficientes de Fourier de alguna función dada (Los coeficientes de Fourier se definen dependiendo de la serie considerada: por ejemplo, para el caso del desarrollo (1.7), los coeficientes de Fourier se definen en (1.8). Formalmente, para obtener  $a_n$  se multiplican ambos lados de (1.7) por la función  $\operatorname{sen}(nx)$ , y se integra término a término, en el intervalo dado, la serie así obtenida. Utilizando el hecho de la ortogonalidad de las funciones  $\operatorname{sen}(mx)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , en el intervalo  $[0, \pi]$ , se obtiene  $a_n$ . Análogo razonamiento se aplica para calcular los coeficientes de Fourier de los desarrollos (3.1) y (3.2).

Riemann definió una función  $f$ , integrable en cualquier intervalo real finito, pero que tiene un conjunto infinito de discontinuidades en cualquier intervalo real no trivial. Una primitiva cualquiera de  $f$ , es continua en cualquier punto de  $\mathbb{R}$ , y sin embargo no es derivable en ningún punto de discontinuidad de  $f$  (Hobson, 1957; Kline, 1992 para detalles).

\* Referencia tomada de (Kline, 1992).

Posteriormente, Weierstrass (Jour. Für Math., 79, 1.875, 21-37\*), estudiando el tipo de funciones que podían representarse o desarrollarse en serie de Fourier, presentó en 1872 un ejemplo sorprendente a la Real Academia de Ciencias de Berlín: una función real, de variable real, continua en todo punto y tal que el conjunto de puntos donde es derivable es el conjunto vacío. Concretamente, el ejemplo de Weierstrass está dado por la función:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \operatorname{cos}(a^n \pi x) \quad (3.5)$$

donde  $0 < b < 1$ , y  $a$  es cualquier entero impar tal que  $ab > 1 + 3\pi^2$ .

Puede pensarse, de manera intuitiva, que el tipo de funciones anteriores es excepcional. Nada más lejos de la realidad. El Análisis Funcional, la disciplina matemática por excelencia del siglo XX (Dieudonné, 1981), permite probar que las anteriores situaciones son las que "usualmente cabe esperar. ¿Cómo es esto? La herramienta clave para entenderlo es lo que se conoce con el nombre de Teorema de la Categoría de Baire, que comentamos a continuación.

Sea  $X$  un espacio de Banach real cualquiera (es decir un espacio vectorial real, dotado de una norma (Cañada, 1994), tal que cualquier sucesión de Cauchy es convergente). Si  $M$  está contenido en  $X$ , diremos que  $M$  es de primera categoría en  $X$ , si y solamente si,  $M$  es alguna unión numerable de subconjuntos  $M_n$  de  $X$  tales que cada  $M_n$  verifica que el interior de su clausura es el conjunto vacío. Por ejemplo, cualquier subconjunto numerable de  $X$  es de primera categoría. Un subconjunto  $M$  de  $X$  se dice de segunda categoría en  $X$ , si  $M$  no es de primera categoría en  $X$ . Intuitivamente, los conjuntos de segunda categoría "deben contener muchos más elementos" que los de primera categoría.

Consideremos ahora  $X = C([a,b], \mathfrak{R})$ , es decir, el espacio de Banach de las funciones reales y continuas, definidas en un intervalo dado  $[a,b]$  de  $\mathfrak{R}$ , con la norma uniforme. Más precisamente:

$$X = \{f : [a,b] \rightarrow \mathfrak{R}, f \text{ continua en } [a,b]\}$$

y

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} \{ |f(x)| \}, \forall f \in X$$

Sea

$$M = \{f \in X : \exists x_* \in [0,1] : \text{existe } f_*(x_*)\}$$

Pues bien, puede probarse que el conjunto  $M$  es de primera categoría en  $X$  (Zeidler, 1995) y por tanto  $X/M$  es de segunda categoría en  $X$ . En definitiva, lo que en principio puede pensarse que es excepcional (que existan funciones como las encontradas por Riemann y Weierstrass), resulta que es lo usual.

En lo que respecta a las series de Fourier de funciones continuas, Du Bois-Reymond (Nachrichten König, Ges. der Wiss. zu Gött., 1873, 571-82\*), dio en 1873 un ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier no convergía en un punto particular. Es más, construyó un ejemplo de una función continua tal que la serie de Fourier no convergía en un conjunto denso de puntos. Llegados aquí, la pregunta puede ser: ¿En cuántos puntos puede no converger la serie de Fourier de una función continua? Hubo que esperar hasta 1966, año en que Carleson demostró que se da la convergencia salvo posiblemente en un conjunto de medida de Lebesgue nula (Carleson, 1968; 1966). Para redondear el tema, Kahane y Katznelson probaron, también en 1966, que dado cualquier conjunto  $A$  de medida nula existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en cada punto de  $A$  (Kahane & Katznelson, 1966).

### 3.2 La teoría de conjuntos de Cantor

La teoría de conjuntos de Cantor, base y fundamento de lo que se conoce con el nombre de Matemática moderna, estuvo en buena parte motivada por el estudio de los puntos de convergencia o divergencia de las series trigonométricas. Fue este problema lo que llevó a Cantor a definir algunas de las primeras nociones de Topología conjuntista, como las de conjunto cerrado y punto de acumulación.

En efecto, cuando Cantor comenzó a trabajar en la Universidad de Halle, otro colega, Heine, estaba interesado en aquella época en la cuestión de la unicidad de la representación de una función dada en serie trigonométrica. Más concretamente, si suponemos que la serie (3.4) es convergente, en todos los puntos del intervalo  $[-\pi, \pi]$  a una función  $f(x)$ , la cuestión era: ¿Será única la representación de  $f$  en serie trigonométrica? La respuesta afirmativa a esto es equivalente al hecho de que si la serie trigonométrica (3.4) es convergente a cero en todos los puntos de  $[-\pi, \pi]$  entonces todos los coeficientes deben ser cero.

Cantor probó (Jour. für Math., 72, 1870, 139-42\*) que ello era así y que incluso, se puede renunciar a la convergencia de la serie en un conjunto finito de puntos. La pregunta que Cantor se hizo a continuación era obvia: ¿En cuántos puntos podemos renunciar a la convergencia de la serie dada y sin embargo seguir teniendo el mismo resultado de unicidad? Según mis conocimientos, este problema sigue sin resolverse hoy en día en toda su generalidad, a pesar de que se han realizado numerosos estudios sobre ello, comenzando por varios de Cantor, el primero fechado en 1871 (Jour. für Math., 73, 1871, 294-6\*). En este trabajo Cantor demostró que el conjunto de puntos excepcionales, es decir, aquellos donde no se tiene necesariamente convergencia de la serie trigonométrica, puede estar formado

\* Referencia tomada de (Kline, 1992).

por infinitos elementos, siempre que tal conjunto sea "de orden finito". ¿Cómo definió Cantor el orden de un conjunto? De la siguiente manera: dado cualquier subconjunto  $E$  de números reales, Cantor introdujo el concepto de punto de acumulación de  $E$ , tal y como se entiende hoy en día. Al conjunto de todos los puntos de acumulación, conjunto derivado de  $E$ , lo denotó por  $E'$ . Análogamente puede definirse el segundo conjunto derivado de  $E$ ,  $E''$ , como el conjunto derivado de  $E'$ , y así sucesivamente. Claramente se tienen las inclusiones  $E''' \subset E'' \subset E'$ .

Entonces, un conjunto es de orden finito si algún derivado suyo es finito. También Cantor definió los conjuntos cerrados como aquellos que contienen a su derivado. Demostró además que un conjunto de orden finito es o finito o puede ponerse en correspondencia biyectiva con el conjunto  $N$  de los números naturales. A estos últimos conjuntos les dio el nombre de infinitos numerables, interesándose a continuación por la existencia de subconjuntos de números reales infinitos no numerables, para seguir con el estudio de subconjuntos del espacio  $\mathcal{R}^n$ . Por cierto, que posteriormente fue demostrado que cualquier conjunto numerable es válido también como conjunto de puntos excepcionales donde puede fallar la convergencia de la serie trigonométrica considerada y seguir teniendo la representación única. También se han dado ejemplos de conjuntos excepcionales no numerables (Zygmund, 1968).

Resumiendo, los problemas planteados por la representación única de funciones en series trigonométricas, tuvieron una influencia decisiva en el interés de Cantor por estudiar de manera cuidadosa las propiedades de subconjuntos de números reales relacionadas con el número de sus elementos, lo que originó en gran medida la creación de la teoría de conjuntos.

### 3.3 Las teorías de integración de Cauchy, Riemann y Lebesgue

Como ya hemos mencionado, las fórmulas para calcular los coeficientes de Fourier fueron obtenidas por el mismo Fourier, aunque de manera no muy rigurosa. Por ejemplo, para el desarrollo (3.2) se tiene:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx \quad (3.6)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{cos}(nx) dx$$

Para el caso en que  $f$  es una función continua, era suficiente el concepto de integral dado por Cauchy, para la existencia de los anteriores coeficientes. Cauchy usó, para la definición de la llamada integral de Cauchy (para funciones continuas), lo que hoy en día se conoce con el nombre de sumas de Riemann; es decir, sumas de la forma:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (3.7)$$

donde  $x_0 = -\pi < x_1 < \dots < x_n = \pi$  es cualquier partición del intervalo  $[-\pi, \pi]$  y  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Aunque de manera no totalmente rigurosa, pues no expuso explícitamente el concepto de continuidad uniforme, Cauchy demostró que las anteriores sumas tendían a un límite (único), llamado la integral de la función, si las longitudes de todos los subintervalos de la partición considerada tendían a cero.

Riemann también se interesó en el tema de las series trigonométricas. Él dijo que era importante, al menos para los matemáticos,

aunque no necesariamente para las aplicaciones físicas, establecer las condiciones más amplias posibles bajo las cuales tienen sentido las fórmulas (3.6). Introdujo así lo que llamamos hoy en día integral de Riemann, cuya idea básica es suponer sólo de partida la acotación de la función  $f$  tratada (no necesariamente continua) y establecer condiciones lo más generales posibles para que las sumas (3.7) tengan un único límite, cuando las longitudes de todos los subintervalos de la partición considerada tienden a cero. Esto le permitió integrar funciones con un número infinito de discontinuidades, aunque como es conocido, hubo que esperar a los trabajos de Lebesgue sobre la medida de un conjunto, para tener una caracterización precisa de las funciones que pueden integrarse según Riemann. De hecho, la que se considera actualmente como "integral definitiva" en muchos aspectos, es la introducida por Lebesgue en su tesis doctoral: "Intégrale, longueur, aire" (Annali di Mat. Pura Appl. 7, 1902, 231-59\*). El punto de partida, respecto de la noción de integral de Cauchy o de Riemann es completamente diferente, pues lo que se intentaba era medir, de alguna forma, el conjunto de puntos de discontinuidad de una función dada.

Para ello, después de diferentes trabajos previos de Du Bois-Reymond, Hamack, Stolz, Cantor, Peano, Jordan y Borel (consúltese Kline, 1992) sobre la medida de conjuntos, el paso definitivo fue dado por Lebesgue, como ya hemos comentado, a principios de este siglo, cuando introdujo la noción de función medible.

Comentemos brevemente las ideas básicas para el caso de una variable real.

La medida de un intervalo arbitrario  $[a,b]$ ,  $[a,b)$ ,  $(a,b]$  o  $(a,b)$ ,  $\mu[a,b]$  es  $b-a$ . Entonces, teniendo en cuenta que todo conjunto abierto de  $\mathcal{R}$  se expresa de manera única como una

unión numerable de intervalos abiertos disjuntos (Apóstol, 1960), se tiene que si  $G$  es abierto y esta contenido en  $\mathcal{R}$  tal que:

$$G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$$

entonces podemos definir la medida de  $G$ ,  $\mu(G)$  como:

$$\mu(G) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_i)$$

(esta suma puede ser infinita).

Dado un subconjunto cualquiera,  $E$ , de los números reales se define la medida exterior,  $\mu^*(E)$  como:

$$\mu^*(E) = \inf \{ \mu(G) : E \subset G, G \text{ abierto} \}$$

Sea ahora  $A \subset [a,b]$ . Diremos que  $A$  es medible si  $\mu^*(A) + \mu^*([a,b] \setminus A) = b-a$ . En este caso,  $\mu^*(A)$  es la medida de  $A$  y se indicará como  $\mu(A)$ . No es difícil ver que la medibilidad y la medida de  $A$  son independientes del intervalo elegido  $[a,b]$  tal que  $A \subset [a,b]$ .

Si  $A$  es tal que  $\mu(A) = 0$ , diremos que  $A$  es de medida nula. Cualquier subconjunto numerable de  $[a,b]$  es de medida nula. No obstante, hay subconjuntos de medida nula que no son numerables (Aparicio & Jiménez, 1991).

Una propiedad relativa a puntos de  $[a,b]$  diremos que se cumple casi por doquier (c.p.d.) en  $[a,b]$  si el conjunto de puntos de  $[a,b]$  donde dicha propiedad no se verifica es un conjunto de medida nula.

Una función  $f: [a,b] \rightarrow \mathcal{R}$  es medible si para cualquier  $\alpha \in \mathcal{R}$  el conjunto:

$$\{ x \in [a,b] : f(x) > \alpha \}$$

es medible. Si  $f, g: [a,b] \rightarrow \mathcal{R}$  son funciones medibles también lo son  $|f|$ ,  $\alpha f$ , ( $\alpha \in \mathcal{R}$ ) y

\* Referencia tomada de (Kline, 1992).

$f+g$ . Toda función continua casi por doquier es medible. Si  $f$  es medible y  $f=g$  c.p.d. en  $[a,b]$ , entonces  $g$  es medible (Aparicio & Jiménez, 1991).

Tomemos ahora una función  $f: [a,b] \rightarrow \mathcal{R}$  medible y acotada. Sean:

$$m = \inf_{[a,b]} f$$

$$M = \sup_{[a,b]} f$$

y tomemos una partición cualquiera del intervalo  $[m,M]$ , definida por:

$$P: m = y_0 < y_1 < \dots < y_n = M$$

Definamos (donde cada  $A_j$  es medible):

$$A_j = \{x \in [a,b] : y_{j-1} \leq f(x) \leq y_j\}; 1 \leq j \leq n$$

Consideremos las sumas:

$$S_p = \sum_1^n y_j \mu(A_j), \quad s_p = \sum_1^n y_{j-1} \mu(A_j)$$

La gran novedad de los estudios de Lebesgue consistió en que éste probó que las dos cantidades:

$$J = \inf_{P \in \mathcal{P}([m,M])} S_p, \quad I = \sup_{P \in \mathcal{P}([m,M])} s_p$$

coinciden si, como ya hemos convenido antes,  $f$  es medible y acotada ( $\mathcal{P}([m,M])$  denota el conjunto de todas las particiones del intervalo  $[m,M]$ ). A este valor común se le denomina integral de Lebesgue de  $f$  en  $[a,b]$  y se denota

$$\text{por } \int_a^b f(x) dx.$$

Merece la pena observar con detenimiento que la filosofía de la integral de Lebesgue está basada, a diferencia de la de Riemann, en particiones de la imagen de la función  $f$  en  $[a,b]$ .

Si  $f: [a,b] \rightarrow \mathcal{R}$  es integrable Riemann, entonces  $f$  es integrable (en el sentido de Lebesgue) y ambas integrales coinciden. El recíproco no es cierto. Además, si  $f: [a,b] \rightarrow \mathcal{R}$  es acotada, entonces  $f$  es integrable Riemann si y sólo si el conjunto de puntos de  $[a,b]$  donde  $f$  no es continua tiene medida cero.

La integral de Lebesgue puede también extenderse al caso de funciones no acotadas y al caso en que la función considerada lo es de varias variables independientes (Aparicio & Jiménez, 1991).

Como vamos a ver en la próxima sección, la noción de integral de Lebesgue permitió probar con gran generalidad muchas conclusiones sobre series de Fourier que anteriormente eran conocidas para tipos particulares de funciones (Lema de Riemann-Lebesgue, Igualdad de Parseval, criterios de convergencia puntual, etc.). Además, muchos resultados de la teoría de integración de Lebesgue se expresan con una gran simplicidad y claridad respecto de las teorías de integración anteriores (Teoremas de convergencia, Teorema de Fubini, etc.) de tal forma que el conocimiento de la teoría de la integral de Lebesgue es, hoy en día, imprescindible, para poder entender y presentar adecuadamente la teoría de series de Fourier.

En adelante, cuando hablemos de funciones integrables se entenderá siempre, salvo que explícitamente se diga lo contrario, que lo son en el sentido de Lebesgue.

## 4. PRESENTACIÓN ACTUAL DE LA TEORÍA DE SERIES DE FOURIER

Como hemos comentado anteriormente, en la actualidad la teoría de series de Fourier puede presentarse usando los conceptos y métodos del Análisis Funcional. Más concretamente, está íntimamente relacionada con la integral de Lebesgue, los espacios de Hilbert (extensión a dimensión infinita de la noción de espacio euclídeo) y los operadores compactos y autoadjuntos (extensión, a dimensión infinita, de los endomorfismos de  $\mathcal{R}^n$  definidos por matrices simétricas). Ello permite, por una parte, comprender mejor los métodos de Fourier; por otra, se consigue, sin apenas esfuerzo, una gran generalidad. Exponemos a continuación algunas de las ideas fundamentales.

### 4.1 El espacio de funciones de cuadrado integrable. Base de Fourier

El espacio  $L^2(-\pi, \pi)$  (elegimos el intervalo  $(-\pi, \pi)$  sólo por comodidad de notación), se define como el conjunto de funciones medibles  $f: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathcal{R}$  para las que la integral:

$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$  existe, en el sentido de Lebesgue,

y es finita. Suponemos que dos funciones son iguales si lo son c.p.d. en  $L^2(-\pi, \pi)$ . Este tipo de espacios fue introducido por Riesz, en 1907, en el estudio de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, con núcleo no necesariamente continuo (Kline, 1992). Aquellos que tengan alguna dificultad con la teoría de integración de Lebesgue, deben tener en mente, en todo lo que sigue, los dos tipos de funciones siguientes, que constituyen subconjuntos típicos de funciones de  $L^2(-\pi, \pi)$ :

1.- Las funciones  $f: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathcal{R}$ , que sean continuas.

2.- Las funciones  $f: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathcal{R}$ , que sean continuas en  $[-\pi, \pi]$ , excepto posiblemente en un número finito de puntos y que son, además, acotadas. Por ejemplo, las funciones de la figura 4 son elementos de  $L^2(-\pi, \pi)$ .

$L^2(-\pi, \pi)$  es un espacio vectorial real, con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función. Además, su dimensión es infinita; es decir, es posible encontrar subconjuntos de  $L^2(-\pi, \pi)$  que sean linealmente independientes y conteniendo infinitos elementos (piénsese que las funciones polinomiales son elementos de  $L^2(-\pi, \pi)$ ). Además, si  $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ , se puede definir el producto escalar de  $f$  y  $g$  como:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx \quad (4.1)$$

Esto transforma a  $L^2(-\pi, \pi)$  en un espacio prehilbertiano (Brezis, 1984). El teorema de Riesz-Fischer muestra que, con la norma derivada del anterior producto escalar, es decir:

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}, \quad \forall f \in L^2(-\pi, \pi) \quad (4.2)$$

el espacio  $L^2(-\pi, \pi)$  es completo. En definitiva tenemos que  $L^2(-\pi, \pi)$ , con el producto escalar (4.1) es un ESPACIO DE HILBERT REAL DE DIMENSION INFINITA (se puede consultar (Brezis, 1984) para los detalles).

Es ciertamente satisfactoria la estructura algebraico-topológica de  $L^2(-\pi, \pi)$ . Sin embargo, este espacio encierra muchos misterios. Por ejemplo, ¿Qué significado tiene la convergencia en el espacio  $L^2(-\pi, \pi)$ ? ¿Qué relación tiene con la convergencia puntual (c.p.d.) o uniforme? Claramente, convergencia uniforme en  $[-\pi, \pi]$  implica tanto convergencia puntual como convergencia en  $L^2(-\pi, \pi)$ . Sin embargo,

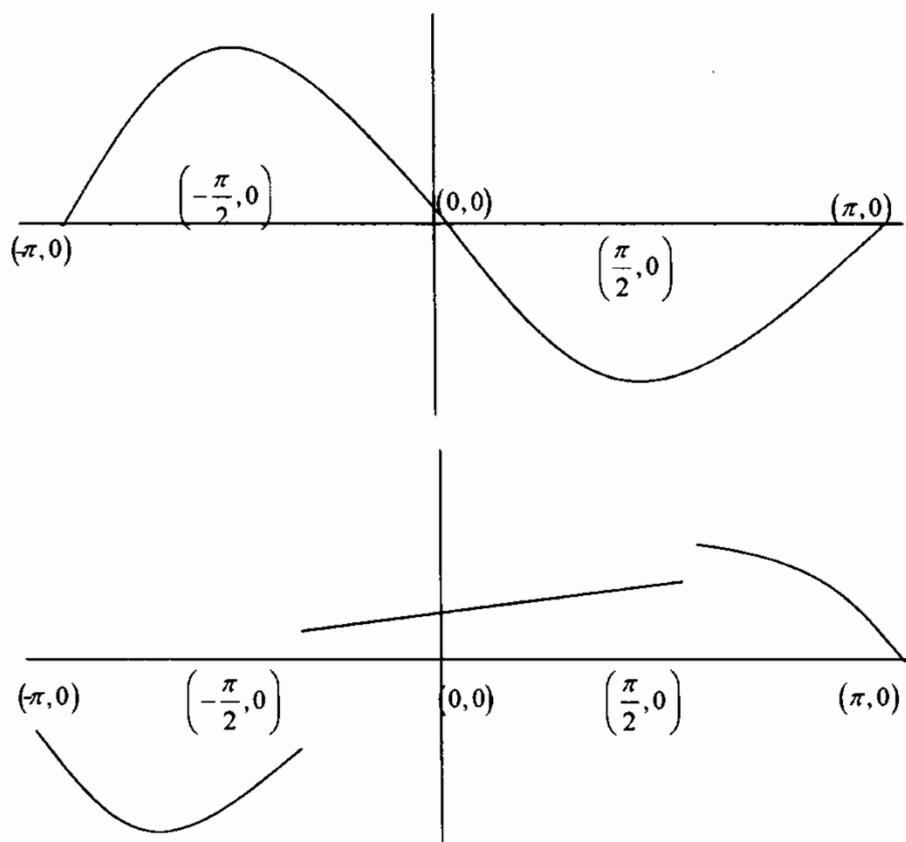


Figura 4

ni la convergencia puntual (c.p.d.) en  $[-\pi, \pi]$  implica convergencia en  $L^2(-\pi, \pi)$ , ni ésta última implica convergencia puntual (veáse Diagrama 1).

Después de leer detenidamente las afirmaciones anteriores, uno tiene la impresión de que  $L^2(-\pi, \pi)$  es aún más misterioso de lo que se creía.

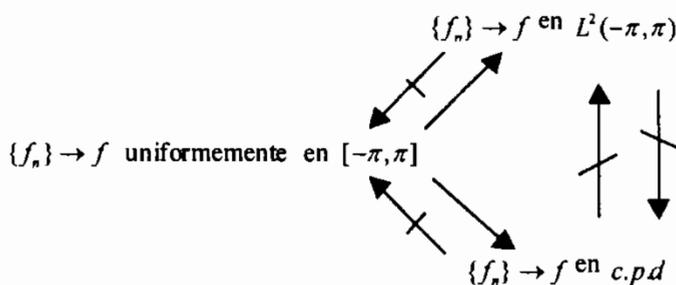


Diagrama 1

Otros espacios de Hilbert que conocemos, como el espacio euclídeo  $\mathcal{R}^n$ , deben gran parte de sus propiedades al hecho de que tienen una base. Además, tal base puede elegirse siempre ortonormal. Esto facilita muchísimo su estudio, así como el de ciertas clases de operadores definidos entre estos espacios (por ejemplo, los operadores lineales u homomorfismos). La pregunta que lógicamente cabe hacerse es la siguiente: ¿Tendrá  $L^2(-\pi, \pi)$  una base? Esto origina, a su vez, otras cuestiones tales como: ¿Cuál sería una definición "adecuada" de base en  $L^2(-\pi, \pi)$ ? ¿Cuántas bases hay (si es que las hay) en  $L^2(-\pi, \pi)$ ? ¿Qué ventajas tiene la utilización del concepto de base? etc.

Para responder a las cuestiones anteriores, conviene que pensemos en los espacios de Hilbert que conocemos:  $\mathcal{R}, \mathcal{R}^2, \mathcal{R}^3, \dots$  etc. En  $\mathcal{R}$ , una base está formada por un elemento no nulo (dicho elemento forma un subconjunto ortogonal de  $\mathcal{R}$ ); en  $\mathcal{R}^2$ , una base está formada por un subconjunto ortogonal con dos elementos (ninguno de los cuales es nulo), y en general, en  $\mathcal{R}^n$ , una base está formada por un subconjunto ortogonal de  $n$  elementos, ninguno de los cuales es nulo (pensemos que cualquier subconjunto ortogonal de esta clase es linealmente independiente y que el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt permite construir, a partir de un subconjunto linealmente independiente  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  de  $\mathcal{R}^n$  otro subconjunto ortonormal que engendra el mismo subespacio). En este caso, todo elemento de  $\mathcal{R}^n$  es combinación lineal única de los elementos de la base. Podemos pensar entonces lo siguiente: "Un subconjunto  $A$  de  $L^2(-\pi, \pi)$  que sea ortogonal, se dirá que es una base de  $L^2(-\pi, \pi)$  si todo elemento de  $L^2(-\pi, \pi)$  es combinación lineal finita (al ser  $A$  ortogonal,  $A$  es linealmente independiente y por tanto dicha combinación lineal ha de ser única) de elementos de  $A$ ". Es interesante mostrar que no puede existir tal subconjunto  $A$ . En efecto,

si existiese, podemos suponer que el conjunto dado es ortonormal. Ahora bien, si  $A$  esta contenido en  $L^2(-\pi, \pi)$  es un conjunto ortonormal cumpliendo la propiedad anterior,  $A$  debe ser infinito (en otro caso, la dimensión del espacio vectorial real  $L^2(-\pi, \pi)$  sería finita, hecho que sabemos que es falso). Así pues  $A$  debe contener algún subconjunto numerable. Sea  $B \subset A$ ,  $B$  numerable. Entonces  $B = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Tomemos la sucesión  $\{f_n\}$  definida por:

$$f_n = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \dots + \frac{b_n}{2^n}$$

Entonces,  $\{f_n\} \rightarrow f$  donde  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ ; de hecho:

$$f = \frac{b_1}{2} + \dots + \frac{b_n}{2^n} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}$$

que prueba que  $f$  no puede ser una combinación lineal finita de elementos de  $A$  (Cañada, A. 1994). Creo que lo anterior motiva la siguiente definición:

**DEFINICIÓN:** Sea  $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$  un subconjunto ortonormal de  $L^2(-\pi, \pi)$ . Diremos que tal subconjunto es una base, si cualquier elemento  $f$  de  $L^2(-\pi, \pi)$  se expresa de la forma:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n \quad (4.3)$$

La anterior definición motiva de manera inmediata una serie de cuestiones:

¿Existen bases de  $L^2(-\pi, \pi)$ ? Si la respuesta es afirmativa, ¿Cuántas bases hay en  $L^2(-\pi, \pi)$ ? ¿Cómo se pueden construir bases de  $L^2(-\pi, \pi)$ ? ¿Qué utilidades tiene la utilización de la noción de base en  $L^2(-\pi, \pi)$ ? etc.

La primera pregunta que cabe plantearse es la referente a la existencia de bases en  $L^2(-\pi, \pi)$ . En este sentido, es muy corriente en

Matemáticas al objeto de probar la existencia de algo que interesa (en este caso de base en  $L^2(-\pi, \pi)$ ), dar diversas caracterizaciones previas. Esto será útil no solamente para probar la existencia (que lo será) sino para poder utilizarlas según nos exija la situación concreta que se nos plantee. Puede probarse (Brezis, 1984) que si  $\{f_n, n \in N\}$  es un subconjunto ortonormal de  $L^2(-\pi, \pi)$ , entonces son equivalentes:

- (a)  $\{f_n, n \in N\}$  es una base de  $L^2(-\pi, \pi)$ .
- (b) Para cualquier  $f$  de  $L^2(-\pi, \pi)$  se cumple la llamada igualdad de Parseval:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | \langle f, f_n \rangle |^2 \quad (4.4)$$

- (c) El único elemento de  $L^2(-\pi, \pi)$  ortogonal al conjunto  $\{f_n, n \in N\}$  es el elemento cero.
- (d) Para cualquier par de elementos  $f$  y  $g$  de  $L^2(-\pi, \pi)$ , se tiene:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle \langle g, f_n \rangle \quad (4.5)$$

Usando las anteriores caracterizaciones (exactamente, el apartado (c)), Lebesgue probó que el conjunto de funciones:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(nx), n \in N \right\} \quad (4.6)$$

es una base de  $L^2(-\pi, \pi)$  (Kline, 1992; Zygmund, 1968).

Lo anterior significa, entre otras cosas que, para cualquier función  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ , se tiene que:

$$f = B_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( B_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + A_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(nx) \right) \quad (4.7)$$

donde:

$$B_0 = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$B_n = \langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \forall n \in N$$

$$A_n = \langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(nx) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx, \forall n \in N$$

Estas relaciones suelen escribirse de la forma:

$$f = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos(nx) + a_n \operatorname{sen}(nx)) \quad (4.8)$$

donde:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \forall n \in N \cup \{0\}$$

$$y \quad (4.9)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx, \forall n \in N$$

Dada  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ , a la serie (4.8) con  $a_n$  y  $b_n$  definidos por (4.9) se le llama serie de Fourier de  $f$  respecto del sistema ortonormal (4.6). Observemos que, en realidad, el desarrollo (4.8) no es sino (3.2) (admitiendo convergencia puntual de la serie (4.8)), con lo que se tiene, casi un siglo después, una confirmación satisfactoria del desarrollo propuesto por Fourier.

Los otros desarrollos en serie, (1.7) y (3.1), propuestos por Fourier, pueden obtenerse muy fácilmente, realizando extensiones convenientes al intervalo  $[-\pi, \pi]$ , (impares o pares), de las funciones definidas en  $[0, \pi]$ . De

esta manera se obtiene que el conjunto:

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}(nx), n \in N \right\} \quad (4.10)$$

es una base de  $L^2(0, \pi)$  a la que corresponde el desarrollo de Fourier (1.7). Análogamente, el conjunto:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx), n \in N \right\} \quad (4.11)$$

es una base de  $L^2(0, \pi)$  a la que corresponde el desarrollo (3.1).

Los resultados referentes a convergencia puntual, uniforme, derivación e integración, etc., de las series de Fourier anteriores, así como diversas aplicaciones, pueden encontrarse en (Cañada, 1994; Katznelson, 1968; Korner, 1988; Stromberg, 1981).

No debemos terminar este apartado sin comparar algunas de las propiedades del espacio  $L^2(-\pi, \pi)$  con las correspondientes del espacio euclídeo  $\mathcal{R}^n$ , pues entendemos que, en la Ciencia, es fundamental ir reconociendo las analogías y diferencias entre los nuevos objetos y los que son familiares, para poder avanzar en el conocimiento de aquellos.

1.-  $\mathcal{R}^n$  es un espacio vectorial real de dimensión  $n$ . Una base ortonormal,  $V$ , está formada por  $n$  vectores  $V = \{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ , ortonormales. En este caso, cualquier elemento  $x \in \mathcal{R}^n$  se expresa de la forma:

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle v_i, \quad (4.12)$$

1'.-  $L^2(-\pi, \pi)$  es un espacio vectorial real de dimensión infinita. Una base ortonormal está

formada por una sucesión ortonormal  $\{ f_n, n \in N \}$  tal que cualquier elemento  $f$  de  $L^2(-\pi, \pi)$  se expresa en la forma:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n \quad (4.13)$$

2.-  $\mathcal{R}^n$ , con el producto escalar usual, es decir:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^n \langle f, f_n \rangle \langle g, f_n \rangle \quad (4.14)$$

$$\forall f, g \in L^2(-\pi, \pi)$$

3.- Para cualquier  $x \in \mathcal{R}^n$ , se cumple:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, v_i \rangle|^2 \quad (4.15)$$

3'.- Para cualquier  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ , se cumple:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 \quad (4.16)$$

4.- El único elemento de  $\mathcal{R}^n$ , ortogonal a todos los elementos  $v_i, 1 \leq i \leq n$ , es el elemento cero.

4'.- El único elemento de  $L^2(-\pi, \pi)$ , ortogonal a todos los elementos  $\{ f_n, n \in N \}$ , es el elemento cero.

5.-  $\mathcal{R}^n$  es un espacio de Hilbert separable (separable significa que contiene algún subconjunto denso y numerable) de dimensión finita.

5'.-  $L^2(-\pi, \pi)$  es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita.

Como hemos mostrado, existen grandes analogías entre el espacio euclídeo  $\mathcal{R}^n$  y  $L^2(-\pi, \pi)$ . Ahora bien, también hay grandes diferencias, marcadas por el paso de la dimensión finita a infinita. La primera, que ya hemos visto, se

refiere al concepto de base. Otra muy importante puede ser la siguiente, que nos indica que en los espacios de dimensión infinita, hemos de ser cuidadosos con nuestras conclusiones: El conocido teorema de Bolzano-Weierstrass afirma que si  $S \subset \mathcal{R}^n$  es acotado y contiene infinitos elementos, entonces el conjunto derivado de  $S$ ,  $S'$ , es no vacío (Apóstol, 1960). Pues bien, no es posible establecer una propiedad análoga en  $L^2(-\pi, \pi)$ . Es decir, en  $L^2(-\pi, \pi)$  es posible que un subconjunto sea acotado, con infinitos elementos y que en cambio,  $S'$  sea vacío. También, en  $L^2(-\pi, \pi)$ , cualquier subconjunto compacto ha de tener interior vacío (Brezis, 1984; Halmos, 1967).

Otros problemas distintos de los considerados anteriormente conducen a la posibilidad de desarrollos de Fourier distintos de los mencionados. Por ejemplo, si se estudian las vibraciones pequeñas de una cuerda, estando libres los extremos de la misma, tendremos, en lugar de (1.1), el problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, & t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(0, t) &= u_x(\pi, t), & t \geq 0, \end{aligned} \tag{4.18}$$

donde  $u_x$  indica la derivada parcial respecto de la variable  $x$ .

Aplicando el método de separación de variables al problema anterior, se nos plantea la posibilidad de obtener un desarrollo en serie como (3.1). Los sumandos de tal desarrollo en serie son precisamente las funciones propias del problema de contorno:

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \\ x &\in (0, \pi) \\ X'(0) &= X'(\pi) = 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Incluso, se pueden considerar condiciones de contorno de tipo mixto, tales como:

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 u_x(0, t) &= 0, & t \geq 0, \\ \beta_1 u(\pi, t) + \beta_2 u_x(\pi, t) &= 0, & t \geq 0 \end{aligned}$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  son números reales dados (véase Tijonov & Samarski, 1980) para la interpretación física de estas condiciones de contorno. Esto conduce a la posibilidad de desarrollos en serie que usan las funciones propias de problemas de contorno muy generales. Es evidente que sería estupendo disponer de un resultado general que nos afirmase que tales desarrollos son posibles. A este respecto, la teoría de problemas de contorno del tipo Sturm-Liouville proporciona, de manera bastante general, bases del espacio  $L^2(-\pi, \pi)$ , que pueden usarse en los problemas a estudiar. Pero, ¿qué son los problemas de contorno del tipo Sturm-Liouville? Como ya hemos tenido ocasión de ver en los problemas (1.1) y (2.1), cuando se aplica el método de separación de variables a numerosos problemas de tipo mixto para Ecuaciones en Derivadas Parciales (Weinberger, 1970), se originan dos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y las condiciones de contorno de la ecuación primitiva, producen unas condiciones de contorno sobre una de las ecuaciones ordinarias aparecidas. Normalmente, estas ecuaciones dependen de un parámetro. Se trata entonces de estudiar para qué valores de dicho parámetro (valores propios), las ecuaciones consideradas tienen soluciones no triviales (funciones propias). De esta manera se encuentran soluciones sencillas del problema primitivo. El objetivo es entonces encontrar la solución general del problema dado a partir de dichas soluciones sencillas.

Las anteriores ideas fueron desarrolladas, en el siglo XIX, por Sturm, profesor de Mecánica en la Sorbona y por Liouville, profesor de Matemáticas en el College de Francia. Con la ayuda del lenguaje de hoy en día, sus resultados pueden resumirse de la forma siguiente: Consideremos un problema de contorno de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ p(t) \frac{dx(t)}{dt} \right] + (\lambda - q(t))x(t) &= 0, \quad t \in [a, b] \\ \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) &= 0 \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) &= 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde suponemos las siguientes hipótesis:

- 1)  $p \in C^1([a, b], \mathfrak{R})$ ;  $p(t) > 0$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .
- 2)  $q \in C([a, b], \mathfrak{R})$ .
- 3)  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  y  $\beta_2$  son números reales dados tales que  $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$  y  $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$ .
- 4)  $\lambda$  es un parámetro real.

A las condiciones de contorno que aparecen en (4.20) se les llama condiciones de contorno separadas; de especial significación son las llamadas condiciones de contorno de Dirichlet:

$$x(a) = x(b) = 0 \quad (4.21)$$

y las condiciones de contorno de Neumann:

$$x'(a) = x'(b) = 0 \quad (4.22)$$

Es claro que los únicos valores interesantes del parámetro  $\lambda$  son aquellos para los cuales (4.20) tiene soluciones no triviales. En este caso diremos que  $\lambda$  es **valor propio** de (4.20) y cualquier solución de (4.20) se dice que es una **función propia** asociada al valor propio  $\lambda$ .

En el siguiente Teorema se muestra un

resumen de las principales aportaciones de Sturm y Liouville (Coddington & Levinson, 1955).

#### TEOREMA 4.1

a) Cualquier valor propio de (4.20) es de multiplicidad 1.

b) Cualquier par de funciones propias  $x$  e  $y$ , asociadas respectivamente a valores propios distintos  $\lambda$  y  $\mu$ , son ortogonales, es decir:

$$\int_a^b x(t)y(t)dt = 0$$

c) El conjunto de valores propios de (4.20) es infinito numerable. El sistema ortonormal de funciones propias asociado  $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$  es una base de  $L^2(a, b)$ .

Sea  $g \in C^2[a, b]$  cualquier función que satisfice las condiciones de contorno dadas en (4.20). Entonces:

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

donde la serie converge de manera absoluta y uniforme en  $[a, b]$ .

Si se eligen las condiciones de contorno (4.21), para  $[a, b] = [0, \pi]$ , se obtendría la base (4.10), que se corresponde con el desarrollo de Fourier (1.7), y si se eligen las condiciones de contorno (4.22), también para  $[a, b] = [0, \pi]$ , tendríamos la base (4.11) que se corresponde con el desarrollo de Fourier (3.1).

De manera análoga se puede estudiar el problema de contorno correspondiente a condiciones de contorno periódicas:

$$x(a) = x(b), \quad x'(a) = x'(b) \quad (4.23)$$

El resultado que se obtiene es análogo al expresado en el teorema anterior, excepto en lo que se refiere a la multiplicidad de los valores propios. Tomando  $[a, b] = [0, \pi]$  obtendríamos la base (4.6) que se corresponde con el desarrollo de Fourier (3.2).

Eligiendo condiciones de contorno distintas de las mencionadas, obtendríamos diferentes bases del espacio  $L^2(a,b)$  que no se corresponden con las aquí puestas de manifiesto: las bases (4.6), (4.10) y (4.11). También, las funciones de Bessel, Legendre, etc. (de gran significación en Física), pueden estudiarse como soluciones de ciertos problemas de contorno para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias lineales con coeficientes singulares (Courant & Hilbert, 1962).

Una de las maneras más bonitas y sencillas de probar el teorema anterior es usando el concepto de función de Green. Ello permite transformar (4.20) en una ecuación integral equivalente y trabajar, a partir de ahí, con operadores integrales (Hochstadt, 1973). De esta forma van surgiendo de manera natural una serie de propiedades que, puestas de manera abstracta, dan lugar a la teoría de operadores compactos y autoadjuntos. Esta teoría, debida en gran parte a Fredholm y Hilbert, tuvo su origen a finales del siglo XIX (Kline, 1992) y principios del actual y proporcionó muchas ideas claves para el nacimiento del Análisis Funcional. Permite generalizar de manera destacada la teoría de los desarrollos de Fourier, y legitima el uso de métodos análogos en problemas aparentemente muy diferentes de los aquí considerados. Vamos a resumir a continuación algunas de las ideas básicas (Brezis, 1984; Hutson & Pym, 1980) para detalles.

### 4.3. El papel del Análisis Funcional: operadores compactos y autoadjuntos en espacios de Hilbert

Sea  $H$  cualquier espacio de Hilbert real separable y  $T: H \rightarrow H$  un operador lineal.  $T$  se dice compacto si  $T(B)$  es relativamente compacto, donde  $B$  es la bola cerrada unidad de  $H$ . Puede probarse que  $T$  es compacto si y solamente si para cada sucesión acotada  $\{f_n\}$  de  $H$ , la

sucesión  $\{T(f_n)\}$  contiene alguna sucesión parcial convergente.

Cualquier operador compacto es continuo, pero el recíproco no es necesariamente cierto (considérese, si  $H$  es de dimensión infinita, la aplicación identidad en  $H$ ). El recíproco es obviamente cierto si la dimensión de  $H$  es finita.

Por otra parte,  $T$  se dice autoadjunto si  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$  para todo  $u, v$  en  $H$ , donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto escalar definido en  $H$ .

El conjunto resolvente de  $T$ ,  $\rho(T)$ , se define de la forma:

$$\rho(T) = \{ \lambda \in \mathfrak{R} : T - \lambda I \text{ es biyectivo de } H \text{ en } H \}$$

donde  $I$  indica la aplicación identidad en  $H$ .

Si  $\lambda \in \rho(T)$ , entonces  $(T - \lambda I)^{-1} : H \rightarrow H$  es lineal y continuo. El espectro de  $T$ ,  $\sigma(T)$  se define como el conjunto complementario de  $\rho(T)$ , es decir,  $\sigma(T) = \mathfrak{R} \setminus \rho(T)$ . Por último, diremos que  $\lambda \in \mathfrak{R}$  es valor propio de  $T$ , y se escribe  $\lambda \in VP(T)$  si  $\text{Ker}(T - \lambda I)$  no es trivial, donde  $\text{Ker}$  indica el núcleo del operador lineal correspondiente. Es claro que  $VP(T) \subset \sigma(T)$ , siendo la inclusión estricta, en general (si  $H$  tiene dimensión finita, entonces  $VP(T) = \sigma(T)$ ).

El teorema al que hacíamos referencia más arriba es el siguiente (Brezis, 1984). Generaliza, a dimensión infinita, el hecho de que cualquier matriz cuadrada real y simétrica es diagonalizable:

**TEOREMA 4.2.** *Sea  $H$  un espacio de Hilbert separable real y  $T: H \rightarrow H$  un operador lineal, compacto y autoadjunto. Entonces  $H$  admite una base hilbertiana formada por vectores propios de  $T$ .*

Más precisamente, si  $H_0 = \text{Ker}(T)$  y  $H_n = \text{Ker}(T - \lambda_n I)$ , donde  $\lambda_n$  es la sucesión (que puede ser finita) de valores propios distintos de  $T$ , excluido el cero, entonces:

- dimensión  $H_n$  es finita,  $n > 1$ .
- Los subespacios  $H_n, n > 0$ , son ortogonales dos a dos.
- El espacio vectorial generado por los  $H_n, n \geq 0$ , es denso en  $H$ .
- Para cualquier  $u \in H$ , se tiene:

$$u = \sum_{n \geq 0} u_n, \quad (4.24)$$

donde  $u_n = P_{H_n} u$ , siendo  $P_{H_n}$  la proyección de  $u$  sobre  $H_n$ . Además:

$$\|u\|^2 = \sum_{n \geq 0} \|u_n\|^2 \quad (4.25)$$

Por último,  $T(u) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n u_n$  ( $T$  es diagonalizable).

Observemos la analogía entre (4.24), (4.12) y (4.13), por una parte, y (4.25), (4.16) y (4.17) por otra.

El teorema anterior es de una gran utilidad y justifica la aplicación del método de separación de variables cuando estamos tratando con problemas de contorno como (1.1) o (2.1), donde la variable  $x$  puede ser multidimensional. Ello origina las series de Fourier en diversas variables. Por ejemplo, si estamos tratando el problema de la conducción del calor en un cuerpo (abierto y acotado)  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ , en lugar de en una varilla unidimensional como en (2.1), tendríamos que considerar el problema:

$$\begin{aligned} \Delta_x u(x,t) &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) &= 0, \quad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \\ u(x,0) &= f(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega} \end{aligned} \quad (4.26)$$

siendo  $\Delta_x$  el operador Laplaciano con respecto a  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ; es decir:

$$\Delta_x u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$$

Por su parte,  $\partial\Omega$  indica la frontera del conjunto  $\Omega$ .

La aplicación del método de separación de variables al problema anterior, origina, en lugar de (2.2), que es un problema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, el problema:

$$\begin{aligned} \Delta_x X(x) + \mu X(x) &= 0 \\ x \in \Omega; \quad X(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.27)$$

Ahora puede aplicarse el teorema anterior (Brezis, 1984) para demostrar que el conjunto de valores propios de (4.27) es infinito numerable y que el conjunto de funciones propias asociadas, convenientemente ortonormalizadas,  $\{X_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ , forma una base del espacio  $L^2(\Omega)$ . Esto justifica el hecho de que cualquier condición inicial  $f$  se exprese como:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) \quad (4.28)$$

para coeficientes convenientes  $a_n$ . Así, la solución de (4.26) es de la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(t) X_n(x) \quad (4.29)$$

donde las funciones  $P_n$  satisfacen una ecuación análoga a (2.3).

Ideas parecidas pueden aplicarse al estudio del problema de la cuerda vibrante (1.1) en dimensiones superiores, así como a otros problemas de naturaleza diferente (Brezis, 1984; Courant & Hilbert, 1962; Zeidler, 1995).

## 5. COMENTARIO FINAL

Como hemos tenido ocasión de ver, la teoría de series de Fourier es una de las creaciones más grandes de la Ciencia. Ha tenido, además, una gran influencia en el nacimiento y desarrollo de numerosas técnicas y conceptos matemáticos; enumerarlos sería muy extenso. No obstante, el lector interesado no debería dejar pasar la oportunidad de consultar las siguientes referencias: (Cañada, 1994; Courant & Hilbert, 1962; Dieudonné, 1981; González-Velasco, 1992; González Velasco, 1995; Katznelson, 1968; Kline, 1992; Komer, 1988; Tijonov & Samarski, 1980; Zeidler, 1995), para comprender la magnitud del tema. Además, si se es docente, la consulta de este tipo de libros ayuda mucho a motivar los conceptos abstractos en clase. Hemos de poner también de manifiesto una reflexión, que nos ha surgido en el curso de la elaboración de este artículo divulgativo: es nuestra opinión que en la actualidad, la enseñanza suele estar demasiado especializada. En concreto, es una pena que los actuales estudiantes de Matemáticas no tengan más asignaturas de Física (y quizás de otras Ciencias) en la licenciatura. Ello proporcionaría una idea más global y exacta de lo que ha sido el pensamiento científico y comprenderíamos de verdad que es el planteamiento y resolución de problemas concretos, lo que proporciona el camino de la generalidad. En palabras de R. Courant, uno de los grandes matemáticos de este siglo: "Es la partida y la vuelta a lo concreto lo que da

valor a la generalidad".

En la actualidad, la teoría de Series de Fourier sigue teniendo una gran importancia y su conocimiento es de gran utilidad en disciplinas muy diversas como Matemáticas, Física, Biología, Ingeniería, Economía, etc. Tales series están siempre en todos aquellos procesos naturales de tipo oscilatorio, de difusión o de naturaleza periódica. Por mencionar algunos, los métodos de Fourier se emplean en problemas tan diversos como los relacionados con: el ciclo de las manchas solares, predicción de mareas, mejora de la calidad de las imágenes de los objetos celestes tomadas desde el espacio, física de plasmas, física de semiconductores, acústica, sismografía, oceanografía, confección de imágenes en Medicina (escáner TAC), estudio del ritmo cardíaco, análisis químicos, estudios de rayos X (usando el análisis de Fourier, los astrónomos pueden estudiar las variaciones en intensidad de las señales de rayos X de un objeto celeste), etc. (consúltese *Grandes matemáticos*, 1995; *Orden y caos*, 1990; Walker, 1997).

Especialmente en Física son hoy más válidas que nunca las palabras de Lord Kelvin: "Los métodos de Fourier no son solamente uno de los resultados más hermosos del Análisis moderno, sino que puede decirse además que proporcionan un instrumento indispensable en el tratamiento de casi todas las cuestiones de la Física actual, por recónditas que sean".

## BIBLIOGRAFÍA

- Aparicio, C. & Pérez, J. (1991). *Integral de Lebesgue*. Granada, España: Copistería la Gioconda.
- Apostol, T. M. (1960). *Análisis Matemático*. Barcelona, España: Reverté.
- Brezis, H. (1984). *Análisis Funcional*. Madrid, España: Alianza Universidad Textos.
- Cañada, A. (1994). *Series y Transformada de Fourier y aplicaciones* (vol. I). Granada, España:

Secretariado de publicaciones de la Universidad de Granada.

Carleson, L. (1966/1968). Convergence and summability of Fourier series. *Proc. Int. Cong. Math.* (pp. 83-88), Moscow: Izdat. Mir.

Carleson, L. (1966). On convergence and growth of partial sums of Fourier series. *Acta Math.*, 116, 135-157.

Coddington, E. A. (1961). *An introduction to ordinary differential equations*. Englewood Cliffs, N. J., USA: Prentice-Hall.

Coddington, E. A. & Levinson, N. (1955). *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill.

Courant, R. D., & Hilbert, D. (1962). *Methods of Mathematical Physics*, (Vol. I y II). New York, USA: Interscience.

Dieudonné, J. (1981). *History of Functional Analysis*. Amsterdam: North-Holland.

Fatou, P. (1906). Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta Math.*, 30, 335-400.

Fourier, J. (1822). *Théorie Analytique de la Chaleur*. Paris, Francia: Chez Firmin Didot. Père et Fils.

González Velasco, E. A. (1992). Connections in Mathematical Analysis: the case of Fourier series. *Amer. Math. Monthly*, 427-441.

González Velasco, E. A. (1995). *Fourier Analysis and Boundary value problems*. Academic Press.

Grandes matemáticos. (1995). *Investigación y Ciencia. Temas I*. Barcelona, España: Prensa científica, S.A.

Halmos, P. R. (1967). *A Hilbert space problem book*. Princeton: Van Nostrand.

Hobson, E. W. (1957). *The theory of functions of a real variable*. New York, USA: Dover (reprint).

Hochstadt, H. (1973). *Integral equations*. New York: John Wiley and Sons.

Hutson, V. & Pym, J. S. (1980). *Applications of functional analysis and operator theory*. Londres, Inglaterra: Academic Press Inc.

Kahane, J. P. & Katznelson, Y. (1966). Sur les ensembles de divergence des series trigonometriques. *Studia Math.*, 26, 305-306.

- Katznelson, Y. (1968). *An introduction to Harmonic Analysis*. New York, USA: Wiley.
- Kline, M. (1992). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Madrid, España: Alianza Editorial, S.A.
- Korner, T. W. (1988). *Fourier Analysis*. Cambridge University Press.
- Orden y caos. (1990). *Libros de Investigación y Ciencia*. Barcelona, España: Prensa Científica, S.A.
- Stromberg, K. R. (1981). *An Introduction to classical real analysis*. Belmont, USA: Wadsworth.
- Tijonov, A. N. & Samarski, A. A. (1980). *Ecuaciones de la Física Matemática*. Valladares, Perú: Ed. Mir.
- Walker, J. S. (1967). Fourier Analysis and Wavelet analysis. *Notices of the AMS*, 44, 658-670.
- Weinberger, H. (1970). *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*. Barcelona, España: Reverté.
- Zeidler, E. (1995). *Applied Functional Analysis: main principles and their applications*. New York, USA: Springer-Verlag.
- Zeidler, E. (1995). *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics*. New York, USA: Springer-Verlag.
- Zygmund, A. (1968). *Trigonometric series*. Cambridge: Cambridge University Press.