

El conocimiento matemático de los estudiantes que ingresan a la Universidad*

*María Rita Otero**
*María de los Angeles Fanaro**
*Inés Elichiribehety **

RESUMEN

En este trabajo se describe el conocimiento en Matemática de estudiantes que se incorporan a la Universidad a partir de datos provenientes de tres ciclos lectivos. Se analizan evaluaciones y se construye una categorización con el objetivo de describir la situación cognitiva de los estudiantes y elaborar tipologías. Se emplean técnicas de Análisis Exploratorio. Los resultados muestran el poder institucionalizador de los exámenes y su relación con el conocimiento de los estudiantes. También se discute una concepción de evaluación constructivista y se formulan implicaciones para la enseñanza.

ABSTRACT

In this paper it is described the knowledge on Mathematics of students entering University, from data taken during three academic years. Tests are analyzed and a categorization is built in order to describe the students' cognitive situation and elaborate typologies. Exploratory Analysis techniques are used. The results show the institutional power of the tests and the relationship with students' knowledge. A conception of a constructivist test is also discussed and implications for teaching are presented.

RÉSUMÉ

Dans ce travail on décrit la connaissance en Mathématiques des étudiants qui commencent ses études à l'Université, en partant des données provenant de trois cycles académiques. On fait des évaluations et on construit une catégorie avec le but de décrire la situation cognitive des étudiants et élaborer typologies. Pour ce travail on emploie techniques d'analyse exploratoire. Les résultats nous montrent le pouvoir institutionnel des examens et le rapport avec la connaissance des étudiants. On débat aussi une conception d'évaluation constructiviste et on fait des implications pour l'enseignement.

RESUMO

Neste trabalho se descreve o conhecimento em Matemática de estudantes que ingressam à Universidade a partir de dados provenientes de três ciclos letivos. Analisam-se avaliações e, constrói-se uma categorização com o objetivo de descrever a situação cognitiva dos estudantes e elaborar tipologias. Empregam-se técnicas de Análise Exploratório. Os resultados mostram o poder institucionalizador dos exames e sua relação com o conhecimento dos estudantes. Também discute-se uma concepção de avaliação construtivista e formulam-se implicações para o ensino.

*Fecha de recepción: Marzo de 2001.

* Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina.

1. INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El conocimiento Matemático de quienes optan por una carrera del área de las denominadas Ciencias Exactas, es una variable que requiere ser considerada si se pretende que los estudiantes se incorporen a la vida universitaria de manera exitosa. La situación inicial de los estudiantes de las carreras ofrecidas por la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro, posee una heterogeneidad considerable. En consecuencia, es necesario proporcionar una base de partida común que garantice a los alumnos la igualdad de oportunidades, frente a la diversidad de preparación con la que egresan de la Escuela Media.

Este trabajo propone una metodología para describir el conocimiento en Matemática que poseen los alumnos que aspiran a cursar cualquier carrera de grado ofrecida por la facultad de Ciencias Exactas. Se consideran los resultados del primer examen del Curso de Nivelación durante tres años: 1999, 2000 y 2001. El trabajo forma parte de otro más amplio vinculado a la Enseñanza de la Matemática y al proceso de evaluación desde una perspectiva cognitiva y constructivista en sentido amplio. Se asume como referente el Aprendizaje Significativo (Ausubel, 1963; Ausubel et al., 1976; Moreira 1997, 1999) y la visión de la Escuela Francesa.

La mayor parte de la matrícula de grado de nuestra facultad, se orienta en primer lugar a la carrera de Ingeniería en Sistemas. Luego siguen Profesorado y Licenciatura en Matemática, Licenciatura en Tecnología Ambiental, Licenciatura en Física y Profesorado en Informática. Todos los estudiantes de estas carreras deben aprobar un Curso de Nivelación, basado en los contenidos de Matemática que serían

compatibles con un secundario de buen nivel. Los contenidos responden al nuevo diseño curricular para la Educación Secundaria, que es ciertamente ambicioso y resulta concretado de manera muy heterogénea por los diferentes establecimientos educativos. Existe la impresión generalizada de que el conocimiento matemático de los estudiantes que egresan del Nivel Medio, es insuficiente para abordar estudios superiores. En virtud de esta situación, se han diseñado acciones de vinculación con un medio escolar, para la inserción de los estudiantes en las carreras de grado de la facultad y alentar un acercamiento recíproco.

Para conseguir los objetivos mencionados se implementa un Curso de Nivelación con varias modalidades de aprobación y cursada. Se han desarrollado materiales instruccionales (Otero et al., 1998; Otero et al., 2000) que proporcionan una visión global de los contenidos, introducciones teóricas para cada tema, actividades en distintos niveles de profundización y actividades de evaluación y autoevaluación. Los materiales se han difundido en el medio escolar y se registra una demanda creciente de los mismos. También se difunden los exámenes implementados hasta la fecha, con el objeto de potenciar la función de institucionalización que le cabe a la evaluación (Bodin, 1997).

Los resultados indican que entre los asistentes a la primera evaluación final, correspondientes al ciclo lectivo que se inicia en 1998, sólo resultó aprobado el 10 %. Las mismas instancias en los años: 1999, 2000 y 2001 presentaron un porcentaje de aprobación alrededor del 22%. Este trabajo presenta el análisis realizado a partir de los exámenes de esos últimos años. El año 1998 se descartó por considerarlo como prueba. Por tratarse de las primeras instancias evaluativas en cada ciclo, ellas reflejan lo que podríamos denominar el "estado cognitivo global" de los estudiantes, antes de realizar el Curso de Nivelación.

La cuestión que intentamos responder se refiere a: ¿Cuál es la variación en el desempeño de los grupos de estudiantes en las instancias analizadas, con relación a las modificaciones que se van introduciendo en los exámenes? Los cambios intentan producir una evolución de las actividades de la prueba, en función de los resultados diagnosticados y del grado de desconocimiento que se advierte en los alumnos. Entre los contenidos considerados más importantes se escogen aquellos en los que se obtienen resultados más desfavorables. Los datos evidencian una mejora en la preparación de los alumnos, que se relacionaría con las evaluaciones y las intervenciones que se emprenden y difunden en cada ciclo lectivo. Esta mejora no se expresa en el número de aprobados en la primera instancia evaluativa, porque las actividades de la prueba se formulan en términos de lo que suponemos que los alumnos menos conocen.

La caracterización del desempeño de los alumnos, resulta fundamental a la hora de diseñar cualquier acción docente futura, además de las evaluaciones que se implementan desde nuestra Universidad. La generación de indicadores acerca del conocimiento matemático que poseen los estudiantes permite reorientar positivamente el diseño de las pruebas, dotándolas de mayor consistencia y orientándolas hacia los contenidos que son menos conocidos y más relevantes. Un valor adicional sustantivo, reside en el impacto que los exámenes tendrían en los contenidos que se trabajan más fuertemente en la escuela media, en nuestra área de influencia.

2. LA CONCEPCIÓN DE EVALUACIÓN

En general, se ha asociado más a la evaluación con la medición de los aprendizajes y de los logros de los mismos, que con un proceso de "reflexión y de toma de conciencia de las

dificultades de adquisición de conceptos, de comprensión de los obstáculos cognitivos o epistemológicos que impiden a un sujeto apropiarse de un saber, en un campo de conocimiento determinado" (Otero, 2000). Tal concepción asume el presupuesto de que es posible medir los aprendizajes en el momento en que ocurren, o dentro de un curso escolar y además, que sería posible hacerlo a partir de situaciones formalizadas. Por el contrario, queremos señalar desde el inicio la naturaleza *cualitativa y subjetiva* de la evaluación.

"Si la noción de evaluación transmite con ella la idea de valor, al menos en su etimología, transmite también la de incertidumbre en su historia. La desaparición de la incertidumbre autorizaría a sustituir la noción de medida por la de evaluación. Uno de los aportes de la investigación en didáctica es sin duda el de haber puesto en evidencia la imposibilidad de esta desaparición: el saber matemático de un alumno o de un grupo de alumnos no es medible" (Bodín, 1997, p. 66, el subrayado es nuestro).

La evaluación es indisoluble de los procesos de enseñar y aprender, comprendido como una actividad interactiva de construcción y negociación de significados; en esta tarea, el profesor es quien representa los significados compartidos por la comunidad científica (Moreira, 1997). Dado el carácter multidimensional de la evaluación, decimos que es de naturaleza *cualitativa*, y es *subjetiva* porque en este proceso el observador es a la vez observado, de esto no se sigue que el veredicto final de la evaluación sea arbitrario. Simplemente se señala el carácter subjetivo del que debe tenerse clara conciencia. Por esta misma razón, es que las informaciones que se recogen no pueden provenir de un único instrumento o pertenecer a un solo momento.

La idea de proceso, supone que la evaluación no debe tener como único objetivo la mera constatación de un aprendizaje y que no debe ser identificada sólo con las necesarias instancias de acreditación o promoción, que son también exigencia del sistema escolar en cualquiera de sus niveles. Esto no significa negar, el carácter formador que pueden tener los exámenes, sobre todo cuando el alumno llega a ellos como el resultado de un proceso de preparación en el cual el docente, los pares y la institución educativa, han colaborado activamente.

¿Qué es evaluar, qué actividad puede ser considerada de evaluación?

Podría decirse que cualquier actividad de evaluación consistirá en un proceso con tres etapas:

1. Recoger información.
2. Analizar la información y emitir un juicio con base en el resultado del análisis.
3. Tomar decisiones en correspondencia con el juicio emitido.

De las etapas anteriores no se infiere que la actividad de evaluación pueda ser identificada con un examen, ni que implique con carácter de necesidad, la realización de un acto administrativo. Reducir la evaluación a exámenes, es una patología que restringe su función y no es útil ni al profesor ni al alumno. Entonces, ¿Por qué evaluamos?, ¿Para quién evaluamos?, ¿Qué pretendemos al evaluar?.

La evaluación tiene esencialmente dos funciones, la primera *es de carácter social* y está dirigida a seleccionar y clasificar a los alumnos y también a orientarlos y promoverlos. De esta función emergen las certificaciones, los títulos, la acreditación de una cierta competencia para ejercer una profesión o realizar una actividad laboral o acceder a un

nivel educativo superior. Certifica o constata la adquisición de conocimientos al final de una unidad o programa de trabajo, necesariamente se da al final de un ciclo de formación o de un curso, al cabo del que se requiere un balance.

La segunda *es de carácter pedagógico*, y consiste en la regulación del proceso de enseñanza aprendizaje, o lo que es lo mismo: en la identificación y reconocimiento de los cambios que deben hacerse para producir Aprendizaje Significativo. Se dice que tiene carácter *formativo*, porque está dirigida a mejorar el proceso de aprendizaje cuando aún hay posibilidad de hacerlo. Se realiza durante el proceso de formación, al inicio, durante o al final del mismo, pero con la intención de adecuarlo a las necesidades del alumno, que conduzcan a que este aprenda.

Lamentablemente, la evaluación escolar que predomina asume exclusivamente la primera función e ignora la segunda. Retomando los cuestionamientos iniciales diríamos que *evaluamos para ayudar a los estudiantes a aprender significativamente*. Evaluamos *para el profesor*, porque es imposible tomar decisiones sin indicadores acerca del proceso constructivo del alumno, y también *evaluamos para cada estudiante* porque ellos son responsables de su aprendizaje, y toman decisiones acerca de cómo y cuándo aprender. Es decir que evaluamos para adecuar nuestros procedimientos y estrategias a las necesidades de nuestros estudiantes.

Linda Allal (1980) adopta una perspectiva cognitivista estableciendo que:

“...en una evaluación *formativa* se intenta ante todo comprender el funcionamiento cognitivo del alumno frente a la tarea propuesta. Los datos de interés prioritarios son los que se refieren a las representaciones que

se hace el alumno de la tarea y a las estrategias o procedimientos que utiliza para llegar a un determinado resultado. Los «errores» son objeto de un estudio en particular, en la medida en que son reveladores de la naturaleza de las representaciones, o de las estrategias elaboradas por el alumno (Allal, 1980)”

En el caso que nos ocupa, el esfuerzo se ha centrado en describir qué conocimientos y competencias poseen los alumnos en la primera evaluación y en consecuencia, decidir si deben o no, realizar el Curso de Nivelación. El nivel de aprobación se establece en el 60 % de las actividades presentadas. Se intenta garantizar una corrección común, con criterios uniformes para todos los sujetos de la evaluación y que además contemple el carácter cualitativo de la misma.

Para obtener uniformidad en el proceso de corrección, llevado a cabo por un equipo de aproximadamente quince personas, se han desarrollado algunas estrategias que han resultado adecuadas. Así, los correctores desconocen el nombre del alumno a quien evalúan y los exámenes son asignados en forma azarosa. El estudiante recibe un formulario de examen, que le indica como proceder: responder en los grandes espacios disponibles para hacerlo y registrar toda su actividad allí, puesto que no se aceptan hojas aparte del formulario. Además, los sujetos son instados a dejar en el papel todos los cálculos y actividades auxiliares. Se sugiere al estudiante centrar su preocupación en la legibilidad del trabajo en lugar del esmero. También se advierte acerca de la importancia de mostrar el proceso desarrollado y la invalidez de presentar sólo resultados.

Con relación a los puntajes, se distribuyen con base a una matriz de diseño de la prueba, cuyos elementos representan contenidos y competencias. Cada actividad es una globalidad, que no se descompone en unidades mínimas de puntaje, sino que es evaluada con una escala numérica que refleja: el desconocimiento, el conocimiento en un nivel medio o regular y un nivel correcto o bien. En ningún caso, correcto es sinónimo de resultado correcto, ya que como podrá apreciarse las actividades son específicas, pero complejas. Así el corrector debe evaluar al sujeto que resolvió, en alguno de los niveles de esa escala. Para hacerlo, recibe una grilla de corrección señalando la competencia y contenido que está considerando y una propuesta orientadora, que indica como establecer cada nivel en cada ejercicio de la prueba. Se adopta el criterio de que el corrector evalúe toda una prueba, en contra de las prácticas que asignan a la misma persona la corrección del mismo ejercicio para toda la población. La razón, es que cada prueba se considera como una expresión del conocimiento de un sujeto particular, que debe considerarse holísticamente.

Se realiza un análisis exploratorio basado en técnicas de Correspondencias Múltiples. En las secciones posteriores describimos la categorización efectuada, las variables consideradas y el análisis realizado

3. PREGUNTAS DE LA INVESTIGACIÓN

3.1 ¿Qué indicadores pueden construirse acerca del conocimiento matemático que poseen los alumnos evaluados en el primer examen de nivelación?

3.2 ¿Cómo se puede describir y clasificar el comportamiento general de los distintos grupos, con relación a las modificaciones institucionalizadas en los exámenes?.

4. METODOLOGÍA

Se analizan los resultados de las evaluaciones realizadas por los futuros alumnos de la Facultad de Ciencias Exactas. Se estudian las respuestas al primer Examen Final del Curso de Nivelación, correspondientes a los ciclos lectivos 1999, 2000, y 2001, en tres poblaciones de estudiantes: $N_{99} = 153$, $N_{00} = 214$ y $N_{01} = 196$, respectivamente. La descripción de los datos se efectuó a partir de las categorías: OPERACIONES y FUNCIONES para las que se definen variables nominales, con sus respectivas modalidades en la tabla siguiente. Si bien consideramos muy importantes otros aspectos como Modelización y Resolución de Problemas y los incluimos en los materiales instruccionales, ellos no conforman en la actualidad las actividades con mayor peso en el examen. Esta decisión, obedece a que el logro de las competencias mencionadas, es una tarea de largo aliento y excede en el tiempo, las posibilidades de nuestro breve curso de Nivelación. Las capacidades de modelizar y resolver problemas empleando la matemática como herramienta, se deberían consolidar como producto de la formación académica. En consecuencia, se ha optado porque los alumnos dominen aspectos operatorios y conceptuales básicos, que les permitan cursar las disciplinas de primer año. Por su parte, la tarea que realiza la escuela en torno a estas competencias es deficiente y debe ser encarada con propuestas didácticas que tengan a los problemas como origen del conocimiento matemático.

Definición y ceros de funciones (DF)	DFMB (Muy Bueno)
	DFBU (Bueno)
	DFRE (Regular)
	DFMA (Mal)
Graficar funciones (GF)	GFBU (Bueno)
	GFRE (Regular)
	GFMA (Mal)
Análisis formal de funciones (límite, derivada) (AF)	AFMB (Muy Bueno)
	AFBU (Bueno)
	AFRE (Regular)
	AFMA (Mal)

Operaciones aritméticas (OA)	OAMB (Muy Bueno)
	OABU (Bueno)
	OARE (Regular)
	OAMA (Mal)
Operaciones algebraicas con incuaciones (OI)	OIBU (Bueno)
	OIRE (Regular)
	OIMA (Mal)
Operaciones algebraicas en ecuaciones trascendentes (OT)	OTMB (Muy Bueno)
	OTBU (Bueno)
	OTRE (Regular)
	OTMA (Mal)
Operaciones de álgebra vectorial (OV)	OVMB (Muy Bueno)
	OVBU (Bueno)
	OVRE (Regular)
	OVMA (Mal)

También se considera la variable Aprobación (APROB) que asume las modalidades Aprobado (A) y Desaprobado (D). Las variables son una construcción *a posteriori* de la corrección de los exámenes. Éstos son diferentes en cada año, pero se elaboraron sobre una misma matriz de competencias y contenidos. Lo que se modifica es el número de actividades que contribuyen a un contenido y competencia en particular, y por lo tanto, su incidencia en la conformación del examen. Los valores de las variables nominales se obtienen de la contribución de los ítems del mismo o diferentes ejercicios del examen. Los puntajes se transforman para establecer las modalidades. Con el puntaje obtenido en las variables nominales se genera una escala ordinal sobre la que se definen las modalidades. A continuación se presenta el primer análisis que consiste en una descripción estadística.

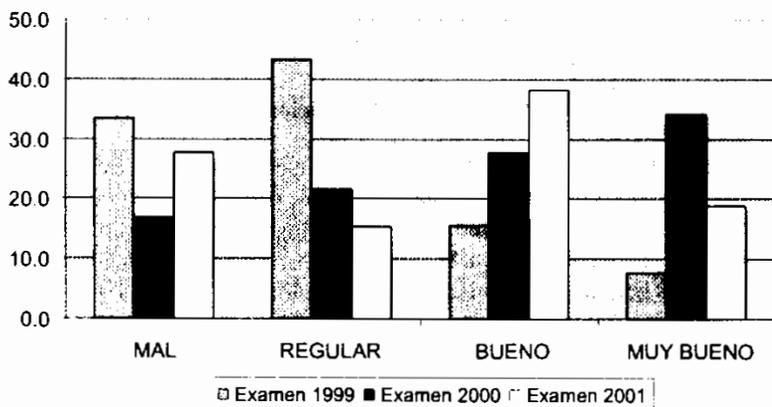
5. DESCRIPCIÓN DE LAS VARIABLES, PRESENTACIÓN DE DATOS Y ANÁLISIS ESTADÍSTICO

Operaciones aritméticas

La competencia *operar* está involucrada con la mayor parte de las actividades del examen. Sin embargo, se tomaron los ítems que la incluyen de manera exclusiva como objeto de evaluación. En la Tabla 1 se presentan las actividades consideradas para construir la variable *Operaciones Aritméticas*. Como se puede observar, en el año 1999 se confeccionaron cuatro ítems discriminando los conceptos: logaritmación, radicación, operaciones combinadas, y operaciones con radicales, mientras que en el año 2000 se disminuyó el número de ítems manteniendo la complejidad global de los mismos. En el año 2001, en una única actividad cuya complejidad no es inferior a las anteriores, se integraron los conceptos

1999	2000	2001
<p>Actividad: Resolver aplicando propiedades. (sin calculadora).</p> <p>a) $\sqrt[3]{\sqrt{7 + \sqrt{2}}} =$ $\sqrt[3]{\sqrt{7 - \sqrt{2}}} =$</p> <p>b) $\log_3 \frac{1}{81} + \frac{\log_5 \frac{1}{5}}{\log_1 \frac{1}{5}} =$</p> <p>c) $\log_3 \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)^{-1} \cdot \frac{4}{9} \right] =$</p> <p>d) $\frac{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right)} + 2 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right)}} \cdot \frac{1}{3^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : (-2)^4 \cdot (-3)^2$</p>	<p>Actividad: Resolver aplicando propiedades. (sin calculadora).</p> <p>a) $\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}} =$</p> <p>b) $\log_2 \sqrt[3]{\frac{1}{2}} + \log_3 27^{\frac{1}{2}} =$</p> <p>c) $\frac{3}{2} \sqrt{12} + \frac{2}{5} \sqrt{75} - \sqrt{24} =$</p>	<p>Actividad: Sabido que $\log_a x = \sqrt{3}$, resolver el siguiente ejercicio combinado utilizando únicamente propiedades:</p> <p>$2^5 \cdot \left[\log_a \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right) - \log_a \sqrt{ax} \right] =$ $2^2 \cdot (\sqrt{3} - 1)$</p>

Tabla 1: Operaciones Aritméticas



Gráfica 1: Operaciones Aritméticas

referidos a operaciones.

La Gráfica 1 evidencia una mejora importante en el año 2000: entre los sujetos que puntuaron REGULAR y MAL en 1999, sumaban 76%, mientras que en el 2000, esa cantidad disminuyó a 38%. Correspondiendo a esta disminución, en éste último año, aumentó a 62% el porcentaje de sujetos que obtuvieron BUENO y MUY BUENO. Las modificaciones surgieron como consecuencia de la mejora del desempeño de los estudiantes en este tema. En nuestra interpretación, la tarea de vinculación con el Nivel Medio desarrollada en los últimos cuatro años, originó el énfasis en este tema, de los profesores y de los estudiantes que se presentaron al examen.

Operaciones algebraicas en inecuaciones

Esta variable describe la habilidad para trabajar con expresiones algebraicas racionales, y el conocimiento de las reglas del análisis de desigualdades. Los resultados muestran que los alumnos desconocen este

tema. Además de conocer las reglas operatorias con desigualdades, se requiere una capacidad de abstracción importante, para contemplar las distintas posibilidades de resolución. También es necesario poseer esquemas formales, como por ejemplo el de las operaciones combinatorias. Estos requisitos tornan a estas actividades muy complejas para los estudiantes, porque que generan gran demanda operatoria y cognitiva. La Tabla 2 resume los ítems que evaluaron esta competencia.

La similitud entre las actividades de los años 1999 y 2000, conduce a observar una mejora en los resultados: la disminución del porcentaje de sujetos en el nivel REGULAR se ve compensada por el aumento en el nivel BUENO. En el año 2001, hubo un ítem menos para evaluar esta competencia, pero la factorización fue más compleja. Esta modificación, se introdujo a partir de la constatación de una resolución mecánica de los ejercicios con valor absoluto. En los tres años el porcentaje de resultados MAL se mantuvo estable y, fue mayoritario en todos los casos.

Operaciones algebraicas en ecuaciones trascendentes

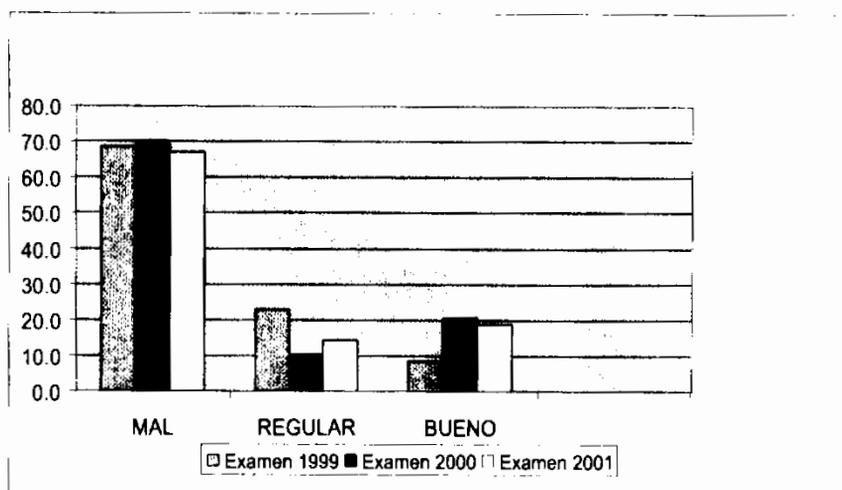
La función exponencial y los logaritmos con argumentos funcionales, así como los ítems de la variable anterior (OI), requieren alto nivel de abstracción. Tanto el lenguaje utilizado, como los significados de la notación simbólica, demandan un gran esfuerzo cognitivo a los estudiantes que no están familiarizados. Entre puntas, se intentó aumentar la complejidad, porque se consideró un tema de gran importancia y de pobre desempeño por parte de los

estudiantes. En la Tabla 3 se muestran las actividades .

En el año 1999, las actividades propuestas se refirieron predominantemente a ecuaciones exponenciales, mientras que en el año siguiente, se incorporaron ecuaciones logarítmicas y trigonométricas. Entre 1999 y 2000 se observa un incremento de 39% a 65% de sujetos que obtienen el nivel MAL, al que se corresponde una disminución de los porcentajes de REGULAR, BUENO y MUY BUENO. Esto se atribuye a la incorporación

1999	2000	2001
<p>Actividad: Resolver e indicar el dominio de validez y justificar.</p> <p>a) $\frac{4}{y-2} + \frac{2y-3}{y^2-4} \leq 0$</p> <p>b) $\left \frac{1-3x}{2x+5} \right < 2$</p>	<p>Actividad: Resolver e indicar el dominio de validez.</p> <p>$\frac{4}{y-2} - \frac{y-3}{y^2-4} - \frac{5}{y+2} \leq 0$</p> <p>$7x-2 > x+4$</p>	<p>Actividad: Resolver e indicar el dominio de validez.</p> <p>$\frac{2}{x+4} + \frac{2x-1}{x^2+2x-8} \geq 0$</p>

Tabla 2: Operaciones algebraicas en inecuaciones



Gráfica 2: Operaciones algebraicas en inecuaciones

de las ecuaciones trigonométricas y logarítmicas, con mayor nivel de dificultad.

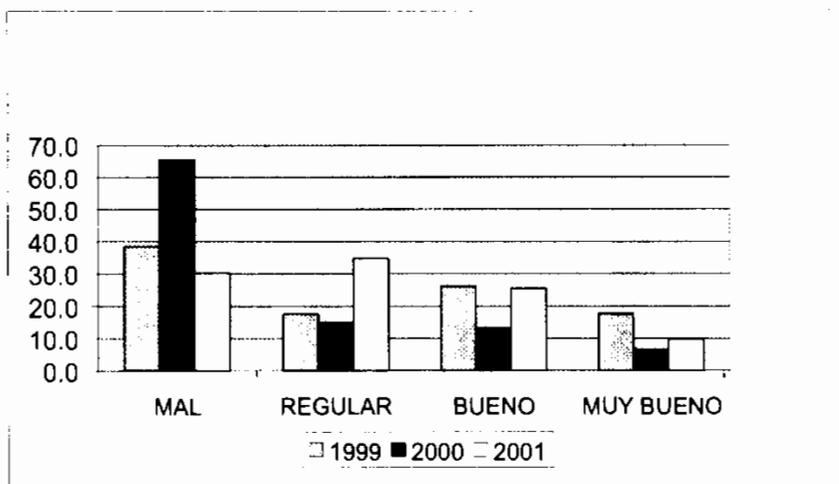
En el año 2001, hubo una disminución del 50% en los sujetos que obtuvieron MAL, correspondido con aproximadamente el mismo valor en el aumento de los que obtuvieron REGULAR. Lo mismo ocurrió con los estudiantes que obtuvieron el nivel BUENO, resultando un 50% más que en el año anterior. Este incremento es atribuible al denominado efecto "institucionalizador" del examen. Esto muestra un desplazamiento positivo del conocimiento matemático de los estudiantes.

Operaciones de álgebra vectorial

La Tabla 4 muestra la similitud entre las actividades para los tres años. Los resultados son predominantemente desfavorables: entre un 65 y un 75% del total de los sujetos obtuvieron MAL. Esto evidencia la enorme dificultad que representan para los estudiantes las operaciones con vectores. Si bien no se ha reducido la importancia de estos ejercicios en los tres exámenes, los resultados han permanecido estables. Aparentemente este tema no se trabaja en la escuela, aunque forma parte de los contenidos del currículum prescripto. Sin embargo, hay un pequeño incremento de los

1999	2000	2001
<p><i>Actividades:</i></p> <p>1) Resolver e indicar el dominio de validez y justificar. $3^{2x+1} - 3^x = 0$</p> <p>2) La función que indica el total de remedio acumulado para un día x está dada por la expresión: $A(x) = 500(1 - 0.8^x)$.</p> <p>¿Cuántos días tiene que pasar para haber tomado en total 244 ml de medicamento?</p>	<p><i>Actividad:</i></p> <p>Resolver e indicar el dominio de validez y justificar.</p> <p>$\log x + \log(x-9) = 1$</p> <p>$\operatorname{sen}(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$</p>	<p><i>Actividad:</i></p> <p>Resolver y determinar el dominio de validez:</p> <p>$2x^2 - 5x = \frac{1}{64}$</p> <p>$6\cos^2 x + \cos 2x = 1$</p>

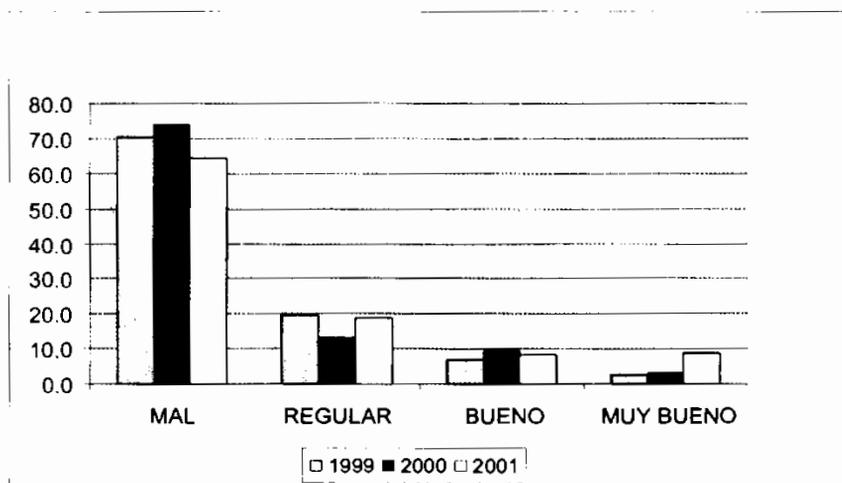
Tabla 3: Operaciones algebraicas en ecuaciones trascendentes



Gráfica 3: Operaciones algebraicas en ecuaciones trascendentes

1999	2000	2001
<p>Actividades:</p> <p>Dado el cuadrilátero cuyos vértices son: $a = (-3,2)$, $b = (-6,5)$, $c = (2,9)$ y $d = (5,6)$</p> <p>sabiendo que $A = ab$ y $B = bc$:</p> <p>a) Encontrar las ecuaciones de las diagonales ac y bd, y las coordenadas del punto o de intersección de las mismas.</p> <p>b) Determinar el ángulo entre A y B.</p> <p>c) Calcular la superficie del cuadrilátero $abcd$ mediante operaciones con vectores.</p> <p>d) Escribir las coordenadas de los puntos a, b, c y d que tendrían en el espacio.</p> <p>e) Encontrar un vector C perpendicular a A y B tal que $C = 6$.</p> <p>f) Hallar el volumen del paralelepípedo que tenga como lados a A, B y C.</p>	<p>Actividades:</p> <p>Dado el cuadrilátero cuyos vértices son:</p> <p>$a = (-4,5)$, $b = (4,1)$, $c = (1,5)$ y $d = (-1,1)$</p> <p>a) Encontrar las coordenadas de los vectores que se encuentran sobre las diagonales ab y cd.</p> <p>b) Demostrar que las diagonales son perpendiculares con operaciones con vectores.</p> <p>c) Graficar las diagonales.</p> <p>d) Determinar los ángulos interiores del cuadrilátero.</p> <p>e) Calcular la superficie del cuadrilátero $abcd$ mediante operaciones con vectores.</p>	<p>Actividades:</p> <p>Dados los puntos $a = (-3,1)$, $b = (1,3)$ y $c = (2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$:</p> <p>a) Demostrar que los puntos A, B y C corresponden a los vértices de un triángulo equilátero.</p> <p>b) Calcular el área del triángulo determinado por los puntos A, B y C, con operaciones con vectores.</p> <p>c) Hallar un vector perpendicular al vector BA, cuyo módulo sea 5.</p>

Tabla 4: Operaciones de álgebra vectorial



Gráfica 4: Operaciones de álgebra vectorial

porcentajes en el nivel MUY BUENO. Entre puntas, los valores para esta modalidad de la variable han aumentado de un 2,6% a un 8,7%. Debido a su relevancia, a la complejidad descripta y a la escasa atención que parecería prestarle el currículum real, este tema seguirá teniendo un peso importante en los sucesivos exámenes.

Definición y ceros de funciones

La noción de función es esencial en nuestra concepción acerca de los contenidos que deben conformar el saber de los estudiantes. También es un concepto clave al interior de la Matemática y de numerosas disciplinas que la

emplean como herramienta. La Tabla 5 muestra las actividades consideradas en la variable Definición y Ceros de Funciones.

En la Gráfica 5, se observa una mejora en el desempeño de los estudiantes para definir y hallar ceros de funciones. En el año 1999, casi el 90% de los sujetos puntuó REGULAR y MAL. En el año 2000, el porcentaje disminuyó al 68 %, y en el año 2001, sólo fue 41%. Se registra un aumento de los porcentajes de estudiantes que obtuvieron BUENO y MUY BUENO a lo largo de los tres años, desde un

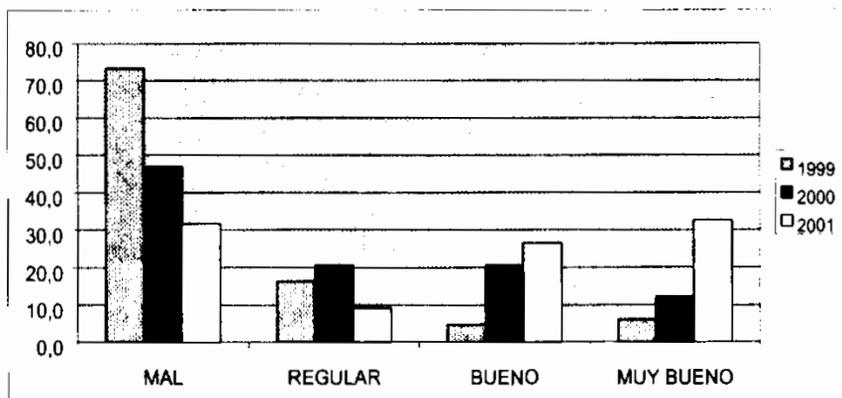
11% en el año 1999, hasta un 60% para el último año.

Graficar funciones a partir de sus características

La Tabla 6 muestra los ítems que contribuyen a esta variable. Las actividades solicitan graficar en forma aproximada y no punto a punto. Se trata de una tarea muy compleja y de alta demanda cognitiva, porque requiere realizar un análisis previo basado en el conocimiento de la forma general de las

1999	2000	2001
<p><i>Actividad:</i> Determinar el dominio de definición y los ceros de las siguientes funciones.</p> $f(x) = \frac{(x-5)}{\sqrt{x-4}-2}$ $f(x) = \frac{1}{1-\operatorname{tg} x}$	<p><i>Actividades:</i> 1) Para cada una de las siguientes funciones indicar el rango y determinar los ceros de las funciones</p> $y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ $y = x^2 - 4x - 5 $ $y = 2^x - 1$ <p>2) Analizar la función</p> $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$, estudiando: Dominio y ceros	<p><i>Actividad:</i> Dada la función</p> $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x}$; Determinar el dominio y rango de $f(x)$, y hallar los ceros ó raíces de $f(x)$.

Tabla 5: Definición y ceros de funciones



Gráfica 5: Definición y ceros de funciones

curvas, las características que determinan sus parámetros, el dominio de definición y los ceros, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, la continuidad, las asíntotas, la periodicidad, etc. En los años 2000 y 2001 se incorporan las funciones trigonométricas, racionales y con valor absoluto.

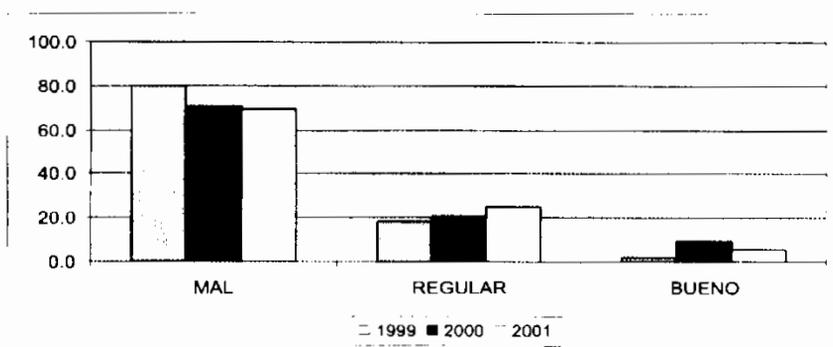
En la Gráfica 6 evidencia las dificultades y la complejidad mencionada en torno a esta variable. Los porcentajes de sujetos que puntuaron en la modalidad MAL son entre un 70 y un 80% para los tres años. Sin embargo, desde 1999 hasta el año 2001 hay un leve descenso en los sujetos que obtuvieron el nivel MAL y

el correspondiente ascenso en el nivel REGULAR.

Debido a la importancia de los conceptos involucrados y al tratamiento didáctico inadecuado que la graficación de funciones recibe en la escuela, estas actividades seguirán teniendo una presencia significativa en los sucesivos exámenes.

Análisis formal de funciones

Las actividades que contribuyen a la variable se presentan en la Tabla 7. El análisis formal de funciones, a diferencia de lo que podría



Gráfica 6: Graficar funciones

1999	2000	2001
<p>Actividades: 1) Dada la función $f(x) = x^5 - 5x^3$ Representarla gráficamente de manera aproximada. 2) La función que indica el total de remedio acumulado para un día x está dada por la expresión: $A(x) = 500(1 - 0,8^x)$. Representar dicha función en forma aproximada.</p>	<p>Actividades: 1) Para cada una de las siguientes funciones definidas en \mathbf{R} graficar en forma aproximada (SIN TABLA) $y = 2\cos(3x - \frac{\pi}{2})$ $y = x^2 - 4x - 5$ $y = 2^x - 1$ 2) Analizar la función $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ y graficar aproximadamente (SIN TABLA)</p>	<p>Actividad: Graficar las siguientes funciones en forma aproximada, sin tabla, haciendo el análisis pertinente en cada caso: $f(x) = 3\cos(3x - \frac{\pi}{2})$ $f(x) = 2x - 1 + 2 - x$ $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x}$</p>

Tabla 6: Graficar funciones

llamarse un análisis intuitivo, requiere el dominio de ciertos instrumentos matemáticos como Límite y Derivada para la obtención de asíntotas, extremos, concavidad y convexidad de las curvas y para la validación de los aspectos gráficos. Aunque este contenido está prescripto en el Curriculum para el Nivel Polimodal, los estudiantes que se presentan al examen lo conocen muy poco, y cuando lo hacen, el origen de este conocimiento, ocasionalmente es escolar. En la Gráfica 7 se advierte que, aunque en el año 1999 un alto porcentaje de los estudiantes puntuaron en la modalidad MAL (90%), en el 2000 disminuyó al 72%, y en el 2001 fue del 61%. Este descenso de los resultados desfavorables, se corresponde con el incremento del porcentaje

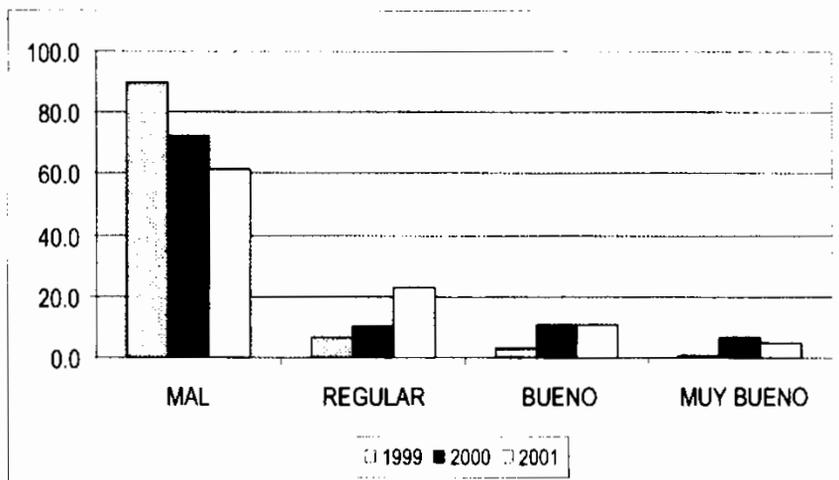
de sujetos que puntuaron en REGULAR, y en menor medida en BUENO. Al igual que en el ítem anterior, estas actividades también seguirán presentes en los sucesivos exámenes.

6. ANÁLISIS FACTORIAL DE CORRESPONDENCIAS MÚLTIPLES

Los datos correspondientes a las tres poblaciones se analizan empleando la técnica de Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples, mediante el programa SPAD 3.5. Se realizó una clasificación para construir una tipología que resultó similar para las poblaciones 1999 y 2000 y más diferenciada

1999	2000	2001
<p><i>Actividad:</i></p> <p>Dada la función $f(x) = x^5 - 5x^3$</p> <p>a) Determinar los extremos relativos.</p> <p>b) Los puntos de inflexión.</p> <p>c) Intervalos de concavidad y convexidad.</p>	<p><i>Actividad:</i></p> <p>Analizar la función $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$, estudiando:</p> <p>a) Ramas infinitas (asíntotas).</p> <p>b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.</p>	<p><i>Actividad:</i></p> <p>Dada la función $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x}$</p> <p>a) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.</p> <p>b) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad.</p> <p>c) Calcular, si tiene, las ramas infinitas ó asíntotas.</p>

Tabla 7: Análisis formal de funciones



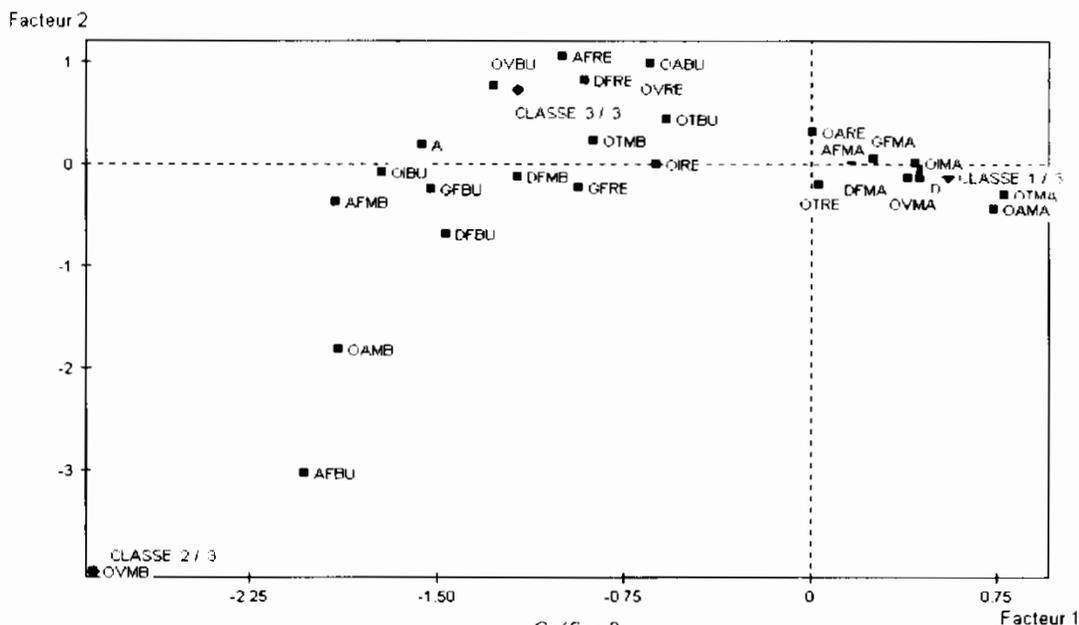
para la población 2001. La metodología que conduce a la construcción de una tipología (Lebart, 1985) es una tarea recursiva y la clasificación que resulta, no es la única que puede obtenerse para los mismos datos. Podrían adoptarse otras más o menos desagregadas y dependiendo de las variables consideradas, se proporcionan diferentes perspectivas de la misma población.

En la Gráfica 8 se presenta el plano factorial para la población $N_{00} = 153$, considerando como activas a todas las variables nominales y sus respectivas modalidades. El Factor uno, en el eje horizontal, aparece mayormente conformado por las variables que corresponden a la categoría OPERACIONES. La variable Aprobación (APROB) opone en este eje las modalidades extremas A y D en las zonas negativa y positiva respectivamente. En la zona negativa, donde se ubica la modalidad A (Aprobado), también se encuentra la modalidad MUY BUENO correspondiente a la variable Operaciones Aritméticas (OA). Además, integran el conjunto de modalidades que

conforman el eje y que ocupan una posición significativa con respecto a los valores test, las modalidades OIBU, OVMB y OTMB de la categoría OPERACIONES y GFRE de la categoría FUNCIONES.

En la zona positiva del eje encontramos las variables OVMA, OTMA, y OIMA junto con DFMA. Podríamos decir que el Factor uno separa las modalidades A (Aprobado) y D (Desaprobado) y opone las modalidades que caracterizan el rendimiento de quienes no consiguen operar y de quienes sí lo hacen entre REGULAR Y MUY BUENO, tanto con operaciones aritméticas, como con vectores y ecuaciones trascendentes e ineuaciones.

El Factor dos para esta población también se conforma en torno a la categoría OPERACIONES, pero separa entre los aprobados a los que obtienen los niveles MUY BUENO Y BUENO, de los que obtienen REGULAR. En la Gráfica 8, el eje dos muestra en posiciones extremas las modalidades OABU y OVRE en la zona positiva, y OVMB y OAMB en la negativa.



Gráfica 8

La lectura del plano factorial, permite reconocer en el semiplano derecho, las variables que caracterizan el mal desempeño y en el izquierdo las que se relacionan con un desempeño entre aceptable y bueno. La mayor diferencia se produce en torno a la categoría OPERACIONES, resultado coherente con el diseño del examen.

En la Gráfica 8, también se representa la partición en tres clases diferenciadas. La Clase 1/3, contiene el 70 % de la población y agrupa al conjunto de desaprobados, que obtienen la modalidad Mal en todas las variables. Este grupo no puede operar ni siquiera en el nivel aritmético, ni tampoco resolver las actividades propuestas para la categoría FUNCIONES.

La Clase 2/3 se compone por el 3 % de la población y agrupa al conjunto de mejor desempeño. Se trata de un grupo de aprobados que reúne al 12 % del total de los que están en esta condición. Se reconoce la capacidad de operar en el nivel MUY BUENO en Álgebra Vectorial y en Operaciones Aritméticas, así como un buen desempeño en lo que denominamos el Análisis Formal de Funciones.

La Clase 3/3 reúne el 27 % de la población y el 88 % del total de aprobados, siendo esta modalidad un atributo muy significativo de la clase. En este grupo que representaría el rendimiento medio, se registra un desempeño entre REGULAR y BUENO en Álgebra Vectorial, así como en la Definición de Funciones y en Operar con Ecuaciones Trascendentes.

Globalmente, la tipología está mostrando que un porcentaje muy alto de los estudiantes, desconoce la totalidad de los contenidos evaluados y constituye el grupo mayoritario de los desaprobados. Existen dos grupos diferenciados de sujetos que aprueban: un porcentaje ínfimo obtiene el nivel más alto en

Operaciones Aritméticas y en Álgebra Vectorial. El resto de los aprobados, se caracteriza por un desempeño entre regular y bueno en Álgebra Vectorial, definición de Funciones y Ecuaciones Trascendentes. A continuación mostramos que en el año siguiente, la variable Operaciones Aritméticas se presenta en modalidades aceptables entre los desaprobados y deja de caracterizar el conocimiento de los aprobados. Una parte de los aprobados pasa a caracterizarse por las modalidades más altas de la categoría Funciones.

En el Gráfico 9 se presenta el plano factorial para la población $N_{(n)} = 214$.

El factor uno opone las modalidades A y D en la zona negativa y positiva del eje, respectivamente. En las coordenadas negativas encontramos la modalidad BUENO de la variable Operaciones con Inecuaciones (OIBU). En una posición menos significativa con respecto a los valores test, se encuentra la variable Operaciones Aritméticas en la modalidad MUY BUENO (OAMB). También encontramos en este sector del eje, las modalidades más altas de las variables correspondientes a la categoría FUNCIONES. La zona positiva del eje uno, opone a las anteriores, la modalidad MAL de las variables correspondientes a la categoría FUNCIONES y en segundo lugar, el nivel MAL de las variables OI, OV y OT.

El Factor dos se conforma en torno a la categoría FUNCIONES con las variables DF, AF y GF en las modalidades MUY BUENO y BUENO, a las que opone la modalidad REGULAR.

El plano factorial muestra asociación entre las modalidades DFMB, AFMB, y GFBU de la categoría FUNCIONES que se visualizan relativamente próximas en el tercer cuadrante.

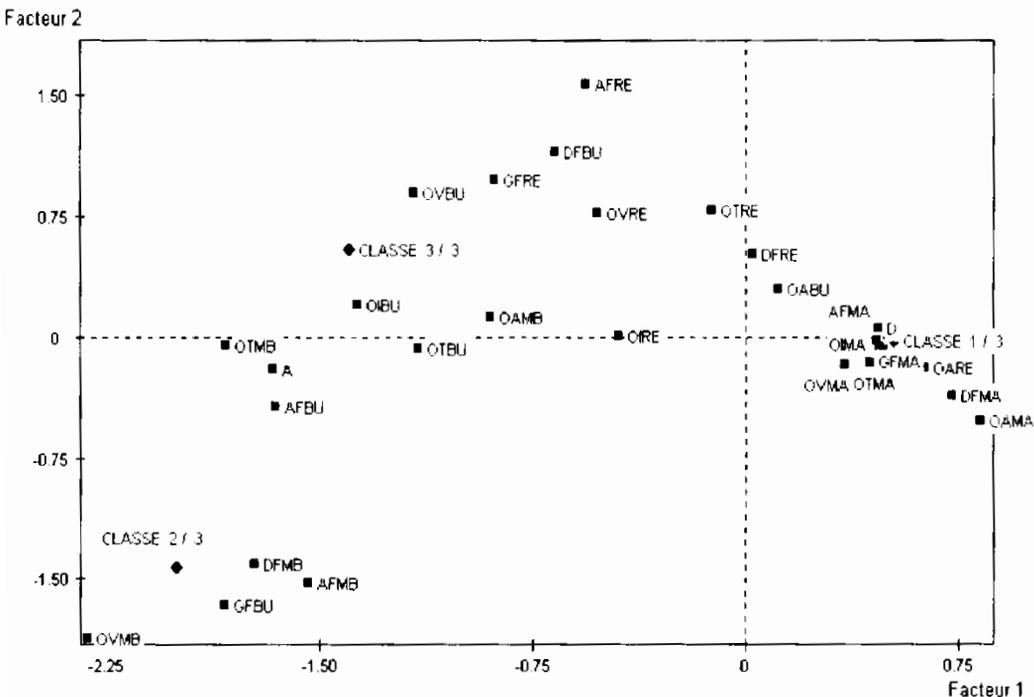
Algo similar ocurre en el primer cuadrante con la nube de modalidades GFMA, AFMA, OIMA y D.

Se seleccionó una clasificación en tres clases. La Clase 1/3 reúne al 75 % de la población y se caracteriza por la modalidad D (Desaprobado) así como por la modalidad MAL, para todas las variables, excepto para Operaciones Aritméticas (OA) que aparece además con REGULAR. Esta clase parece reflejar el desempeño más bajo de la población.

La Clase 2/3 reúne el 6 % de la población, y refleja el alto rendimiento. Se caracteriza por la modalidad A (Aprobado) y por muy buen desempeño en Análisis Formal de Funciones, Definición de Funciones y Operaciones con Algebra Vectorial. Graficar funciones se presenta en el nivel BUENO.

La Clase 3/3 con el 19 % de la población, representa el rendimiento medio. Se caracteriza por la modalidad A (Aprobado) y por el desempeño BUENO en Análisis Formal de Funciones, Definición de Funciones, Operaciones de Algebra Vectorial y Operaciones con Inecuaciones. Las Operaciones Aritméticas aparecen en el nivel máximo. Graficar funciones se presenta en el nivel REGULAR.

Podría decirse que para la población 2000, es la categoría FUNCIONES en lugar de OPERACIONES, la que prevalece en las diferencias más significativas entre los grupos. Este resultado es coherente con la modificación realizada en el examen. Dentro del grupo de aprobados de inferior desempeño, aparece como modalidad caracterizante el nivel Bueno de las variables Definición y Análisis de Funciones y Operaciones en ecuaciones Trascendentes, que en la población 1999



Gráfica 9

peño del conjunto porque el tema funciones requiere habilidades cognitivas más complejas y menos "mecanizables". La Clase 2/4, con el 14 % de la población también reúne a los aprobados, pero se caracteriza por la modalidad MUY BUENO en OPERACIONES, y BUENO y REGULAR en FUNCIONES. Reconocemos en esta clase al conjunto de modalidades que describen una transición hacia mejores niveles de desempeño.

Las Clases 3 y 4 desagregan la modalidad D, registrando diferencias que también evidencian transiciones a niveles superiores en el grupo de bajo rendimiento. La Clase 3/4 reúne el 46 % de la población, las Operaciones Aritméticas se presentan el nivel BUENO y REGULAR, mientras las Operaciones Trascendentes y de Álgebra Vectorial lo hacen en la modalidad REGULAR. Con relación a la categoría FUNCIONES, la Definición de Funciones (DF) se encuentra en el nivel BUENO, mientras la variable Graficar Funciones (GF) se da en el nivel MAL. La Clase 4/4, reúne el 31 % de la población y refleja el peor desempeño, con la presencia de la modalidad MAL para todas las variables activas del análisis.

Según se anticipó, el final del recorrido muestra que el conjunto de mejor rendimiento se caracteriza por el nivel máximo en toda la categoría Funciones y el Bueno en Operaciones. El grupo de aprobados con menor desempeño obtiene el nivel Bueno en Funciones y Muy Bueno en Operaciones. Simultáneamente, el conjunto de desaprobados se desdobra en dos clases caracterizadas por diferente desempeño. Sólo un 31 % de la población, desconoce la totalidad de los contenidos, téngase en cuenta que en situación similar se encontraba en el año 1999 al 70 % de los sujetos. Del otro grupo de desaprobados de la población 2001, puede decirse que evidencia una mejora relativa aunque insuficiente.

7. CONCLUSIONES

Los datos muestran que sólo un porcentaje bajo de estudiantes poseen un nivel aceptable de conocimientos en Matemática, para la primera evaluación. Sin embargo, el porcentaje de aprobados se mantiene estable en el período analizado mientras se modifica el conocimiento que caracteriza a los distintos grupos. Considerando que se trata de una descripción y no de una comparación, los resultados evidencian modificaciones positivas en el desempeño global, en los sucesivos ciclos lectivos, a medida que transcurre más tiempo en la implementación de la propuesta de Nivelación.

Resulta interesante que en esta modificación del desempeño en las diferentes poblaciones, se registra que el desconocimiento parecería desplazarse desde la categoría Operaciones, sobre todo Operaciones Aritméticas, hacia Funciones. Siendo las variables de este conjunto las que aparecen más asociadas a la explicación de las diferencias entre los grupos de sujetos en las dos últimas poblaciones. Esto tiene fuertes implicancias en la necesidad del tratamiento escolar de los contenidos vinculados a Funciones y es la razón de su permanencia como núcleo de nuestros exámenes y del trabajo de nivelación que se realiza con los alumnos *a posteriori*.

La categorización y análisis realizados proporcionan elementos para revelar el desempeño de los estudiantes, permitiendo una identificación parcial de lo que desconocen. Esta información resulta provechosa en términos de la planificación de posteriores actividades de enseñanza y evaluación. Quedan planteadas preguntas acerca de los factores que explican, a pesar de las modificaciones positivas, las dificultades en torno a ciertos contenidos. Por ejemplo la

variable Graficar Funciones, pareciera ser la que registra menos evolución positiva en la consideración global, seguida por la variable Operaciones de Álgebra Vectorial. Esto podría vincularse a la complejidad cognitiva de las actividades propuestas y al escaso trabajo

didáctico en torno a los sistemas de representación y sus relaciones, que estaría desarrollándose en la escuela. Los interrogantes señalados, reafirman la necesidad de profundizar la investigación.

BIBLIOGRAFÍA

Allal, L. (1980). Estrategias de evaluación formativa. Concepciones psicopedagógicas y modalidades de aplicación. *Infancia y Aprendizaje* 11,4-22. Madrid.

Ausubel, D. P. (1963). *Educational psychology: A cognitive view*. New York, EEUU, Grune and Stratton.

Ausubel, D. P., Novak J. & Hanesian, H. (1976), *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. Traducción al español de Roberto Helier D., de la primera edición de Educational psychology: a cognitive view. México: Editorial Trillas.

Bodin, A.(1997). L'Évaluation du savoir mathématique, questions et methodes. *Recherche en didactique des mathématiques*, 17(1), 49-95.

Centre International de Statistique et d'Informatique Apliques. (1998). CISIA. SPAD. 3.5 integrado versión PC. Francia.

Lebart, L., Morineau, A. & Fenelon, J.P. (1985). *Tratamiento estadístico de datos*. España, Barcelona: Editorial Marcombo.

Moreira, M. A. (1997). Aprendizaje significativo: Un concepto subyacente. En *Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo* (pp. 19-44). España: Universidad de Burgos.

Moreira, M. A.(1999). *Teorías de aprendizagem*. Brasil: EPU.

Otero, M. R.(2000). El proceso de evaluación y la enseñanza de la Matemática. En *Aportes para la Enseñanza de la Matemática en el Tercer Ciclo de la EGB* (Capítulo III, pp.. 149-229). ISBN 950 658 088 X. Argentina, Buenos Aires: UNICEN.

Otero, M. R. & Papini, C. (1998). *Repasando Matemática, para el ingreso a la Universidad, Tomo I y II*. ISBN O.C. 950-658-062-6. Argentina, Buenos Aires: UNICEN.

Otero, M. R., Fernández, L. & Fanaro, M. (2000). *Matemática para el Ingreso a la Universidad Vol. I y II*. ISBN O. C. 950-658-081-2. Argentina, Buenos Aires: UNICEN.

Santos Guerra, M.(1995). *La Evaluación Un proceso de Diálogo, Comprensión y Mejora*.
España : Editorial Aljibe.

Las autoras:

María Rita Otero, María de los Angeles Fanaro e Inés Elichiribehety

Grupo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias
Departamento de Formación Docente. Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina
Pinto 399 Tandil (B7000 GHG)
Telefono: +54-2293-447100
Fax: +54-2293-444431

E-Mails: rotero@exa.unicen.edu.ar
mfanaro@exa.unicen.edu.ar
ielichi@exa.unicen.edu.ar