Relime Vol. 5, Núm.2, julio, 2002, pp.133-168.

El entendimiento de la transformada de Laplace: una epistemología como base de una descomposición genética•

Francisco Cordero[1]
Eduardo Miranda[2]

RESUMEN

En este trabajo se consideran dos aspectos: la problemática del discurso de la matemática escolar de la transformada de Laplace y un cuestionamiento teórico del concepto de descomposición genética, que posiblemente pudiera ser reformulado con una base epistemológica. La investigación indicó, ante tal problemática, la ausencia de un marco de referencia de significados y el origen de las condiciones que permitieron la construcción de la transformada de Laplace. Este hecho cuestionó cualquier formulación de la descomposición genética de la transformada de Laplace, debido a que la descomposición significaría un modelo de aprendizaje para estudiantes, e implicaría, en el a priori *del marco de referencia de la transformada, una descomposición formulada por las coordinaciones de las construcciones mentales necesarias del estudiante para dar cuenta únicamente de la definición de la transformada de Laplace. Es, entonces, como se formula una epistemología de la transformada de Laplace y se discute su papel como base para una descomposición genética con la intención de ampliar su marco conceptual.*

ABSTRACT

In this paper there are two aspects to be considered: the problem of the didactic mathematics discourse of the Laplace transformed and a theoretic questioning of the concept of genetic decomposition, that could possibly be reformulated with an epistemological base. The research showed, responding to the problem, the absence of a meaning's reference frame and the origin of the conditions that allowed the construction of Laplace transformed. This fact questioned any formulation of the genetic decomposition of Laplace transformed, since the decomposition would mean a learning model for students, and it would imply, in the a priori *of the reference frame of the transformed, a decomposition formulated by the co-ordinations of the mental constructions necessary for the student to only realize the definition of Laplace transformed. It is, then, how an epistemology of Laplace transformed is formulated and its role as base for a genetic decomposition is discussed with the intentions of enlarging its conceptual frame.*

RESUMÉ

Dans ce travail on considère deux aspects: la problématique, à l'université, au niveau du discours des mathématiques de la transformée de Laplace et un questionnement théorique du concept de la décomposition génétique, le quel pourrait être possiblement reformulé avec une base épistémologique. La recherche a indiqué, face à telle problématique, l' absence d' un cadre de référence de significations et l´origine des conditions qui ont permit la construction de la transformée de Laplace. Ce fait a questionné n´importe quelle formulation de la décomposition génétique de la transformée de Laplace, due à que la décomposition aurait signifié un model d' apprentissage pour les étudiants, et aurait impliqué, *a p*riori, dans le cadre de référence de la transformée, une décomposition formulée par les coordinations des constructions mentales nécessaires de l' étudiant pour se rendre compte uniquement de la définition de la transformée de Laplace. C' est, alors, comment se formule une épistémologie de la transformée de Laplace et se discute son rôle telle que base pour une décomposition génétique avec l' intention d' étendre son cadre conceptuel.

RESUMO

• *Fecha de recepción Abril del 2001*
[1] *Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.*
[2] *Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Occidente.*

Nestle trabalho consideram-se dois aspectos: a problemática do discurso da matematica escolar na transformada de Laplace e um questionamento teórico do conceito de decomposição genética, que posivelmente podería ser reformulado com uma base epistemológica. A investigação indicou diante de tal problemática, a ausencia de um marco de referencia de significados e a origem das condições que permitiram a contrução da transformada de Laplace. Este fato questionau qualquier formulação da descomposição genética da transformada de Laplace, devido a que a decomposição significaría un modelo de aprendizagem para estudiantes, e isso implicaría, *a priori* um marco de referencia da transformada, uma decomposição formulada pelas coordinações das construções mentais necessarias do estudante para dar contu unicamente da definição da transformada de Laplace. Entao se formula uma epistemología da transformada de Laplace e se discute seu papel como base para a decomposição genetica com a interção de ampliar seu marco conceitual

INTRODUCCIÓN

En las escuelas de Ingeniería, los cursos de ecuaciones diferenciales tratan la transformada de Laplace (TL) como una forma de resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales. Así, la TL es impuesta, en el discurso matemático escolar, como una "operación" con "propiedades" que permiten la conversión de una ecuación diferencial a una algebraica.

Temas curriculares como el cálculo son tratados por los libros de texto y los profesores de matemáticas a través de las experiencias escolares previas para que el estudiante construya y atribuya significados a los conceptos. Sin embargo, no es lo mismo para la TL. Aparece en el aula de manera artificiosa, como un instrumento cuyas propiedades formales son impuestas por su utilidad porque resuelve cierto tipo de problemas. Ante la intencionalidad de su enseñanza, no es claro, o está ausente, cualquier elemento de construcción o de reconstrucción de significados.

Efectivamente, la TL no pertenece a experiencias escolares previas de matemáticas, lo cual significa que los objetos matemáticos de tal naturaleza son completamente nuevos para el estudiante. Si bien es cierto que la TL puede ser interpretada por una función, pertenece a una clase de funciones diferente a las experiencias escolares previas del estudiante. Difícilmente este hecho podría ser entendido si sólo partimos de la estructura matemática que aparece en los textos para TL, es decir, la estructura matemática no arroja luz hacia una epistemología con intencionalidad de que la TL sea enseñada y aprendida. Por ello, esta investigación se enfocó en dos aspectos: uno de corte epistemológico y otro cognitivo.

El aspecto epistemológico trata de responder a la pregunta:

- ¿Cuáles fueron las ideas y problemas que dieron origen y significado a la TL?

- Mientras que el cognitivo trata de elucidar las siguientes interrogantes:

- ¿Cómo el estudiante actualiza tal epistemología de acuerdo con su cognición?
- ¿Cómo sería una descomposición genética inicial de la TL, para la cual la base sea tal epistemología?

A fin de aproximarse a sendas respuestas, es necesario hacer las siguientes consideraciones teóricas.

Una descomposición genética está definida como un modelo cognitivo donde se describen las posibles construcciones mentales que una persona realiza para entender un concepto a partir de ciertas habilidades cognitivas previas, y son descritas en el marco de la teoría APOE de Dubinsky (Asiala et al., 1996) como acciones, procesos, objetos y esquemas, donde se trata de explicar el entendimiento mediante las coordinaciones de esas construcciones mentales.

En la teoría APOE, una descomposición genética inicial está constituida por el diseño de un análisis teórico inicial del concepto matemático en cuestión, donde se proponen las construcciones mentales específicas que un estudiante realiza para aprenderlo. El diseño se basa, propiamente en la experiencia del profesor o investigador, por el contrario, en este trabajo, el análisis teórico inicial del concepto descansa en la epistemología del concepto, con el cual, pretendemos, resultará más rico dicho análisis. Además, para los fines de la investigación, como se explicará posteriormente, interesa particularmente la noción de esquema.

Ello fue el sustento para diseñar un conjunto de situaciones de exploración basadas en los promedios y valores esperados como ejes para construir la integral de Laplace, $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$. Los datos generados evidenciaron la posibilidad de describir las construcciones mentales desarrolladas por los participantes en términos de los mecanismos de desarrollo de conocimientos *intra*, *inter* y *trans*, es decir, de un esquema[3], además de que se reflejó la posibilidad de que una persona pueda construir esa integral en términos de los diferentes significados que aluden a cada una de las integrales: $\int f(t)e^{st}dt$, $\int_a^b f(t)x^t dt$, $\int_a^b f(t)e^{-st}dt$.

ANTECEDENTES. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE SIN CONSTRUCCIÓN

La definición de la TL de una función $f(t)$, comúnmente presentada en el medio escolar, es:

$$L\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\ ,$$

siempre y cuando la integral exista para ciertos valores del parámetro s.

Esta expresión por lo general aparece en el medio escolar universitario, durante los cursos de ecuaciones diferenciales que se imparten en las escuelas de Ingeniería, Física o Matemáticas.

Particularmente, en los cursos de ecuaciones diferenciales, la enseñanza de la TL se transmite de manera muy similar a como se presenta en los textos. La instrucción comienza con su definición, sigue con el cálculo de la TL de diversas funciones, después se analizan sus propiedades y termina con las aplicaciones en la solución de algunas ecuaciones diferenciales.

A diferencia de temas escolares como la derivada o la integral, donde los textos o los profesores tratan de que el alumno construya y atribuya significados de esos conceptos a partir de conocimientos anteriores, la TL aparece sin algún antecedente académico en el saber del estudiante.

Sin embargo, la enseñanza de la TL es algo diferente en cursos de Análisis de Señales o Control (posteriores al de Ecuaciones Diferenciales), ya que es frecuente verla como un caso particular de la transformada de Fourier o, en otros casos, es la versión continua de la transformada *Z*.

En todo caso, la definición de la TL invita a la reflexión, pues en ella aparecen componentes para los que no se dan antecedentes en los programas de estudio ni explicaciones del porqué es así.

A través del cálculo previo a la TL, se puede pensar que la expresión $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ representa el área bajo la curva de la función $f(t)e^{-st}$ en el intervalo $\left[0,\infty\right]$; sin embargo, surgen diferentes tipos de cuestionamientos:

- ¿Porqué se tiene que multiplicar una función $f(t)$ por el factor e^{-st} para después integrar?
- ¿Porqué se define esta integral desde 0 hasta ∞ y no con otros límites?
- ¿Cómo es que se llegó a esta expresión integral?
- ¿Cómo se relacionó con la solución de ecuaciones diferenciales?
- ¿En qué medida está relacionada la TL con la transformada de Fourier o con la *transformada Z*?
- ¿Cuáles son los significados de la TL en las experiencias escolares?

Con base en los cuestionamientos anteriores, se establece una epistemología a través del análisis de textos y las formas en que se imparte la TL en el medio escolar, además de ahondar en las ideas y problemas que le dieron origen.

EL MARCO TEÓRICO. UNA EPISTEMOLOGÍA Y LAS CONSTRUCCIONES

[3] Un trabajo con esta interpretación, donde se explica el entendimiento del estudiante de la regla de la cadena a través del desarrollo de su esquema en términos de la tríada (*intra*, *inter* y *trans*) se puede consultar en Clark et al. (1997).

MENTALES

En la teoría APOE, el proceso de construcción de un conocimiento comienza con objetos sobre los cuales el individuo ejercerá cierto número de acciones hasta que llegue a interiorizarlas (es decir, formar un proceso) y las encapsule en un objeto, o bien que las utilice para coordinarlas con otras y construir nuevos objetos (Asiala et al., 1997).

Para determinar las construcciones mentales, se comienza con una descomposición genética inicial del concepto matemático en cuestión, que es un posible modelo de entendimiento del estudiante donde se muestran tanto las construcciones mentales necesarias como sus relaciones con otras estructuras de conocimiento.

Tal descomposición genética inicial se encuentra constituida por el diseño de un análisis teórico inicial del concepto matemático en estudio, en el que se proponen las construcciones mentales específicas (acciones, procesos, objetos o esquemas) que un estudiante realiza para aprenderlo.

En tal procedimiento se incluyen las observaciones a partir de una entrevista con los estudiantes, de sus habilidades y estructuras cognitivas previas. Dicho análisis teórico está basado (en forma primaria) en el entendimiento propio del investigador y su experiencia como maestro y estudiante.

Como se mencionó al principio, por la naturaleza de esta problemática se cuestiona la formulación de la descomposición genética sólo a través de la experiencia propia del investigador. Empero, se debe considerar a las construcciones mentales y las coordinaciones entre ellas, así como los conceptos que componen marcos de referencia ampliados que no podrían estar en el *a priori* de la experiencia del investigador. En ese sentido, se reformula el concepto de descomposición genética en la teoría APOE, y se propone un mecanismo que articule los aspectos epistemológicos (en tanto construcción del conocimiento hecha por la humanidad) con los cognitivos (en tanto construcciones mentales del individuo).

El mecanismo considera tres aspectos: reconstrucción de significados, procedimiento y proceso y objetos, que en conjunto estructuran la situación del concepto. Los significados constituyen los símbolos en un sistema que se construye y se usa en la interacción; los procedimientos constituyen las operaciones comunes inducidas por los significados, mientras que el proceso y objetos se refieren a las diferentes construcciones mentales que surgen en los procedimientos.

En el marco anterior, la situación del concepto es una epistemología del mismo, pues los tres elementos que la integran están mutuamente relacionados y, *a priori*, tales elementos no aparecen en las definiciones. Se trata, pues, de construir una epistemología de la TL que sirva como base a la descomposición genética de ese concepto. Para tal empresa, se convino en precisar aspectos del estatus epistemológico de la TL en el medio escolar y de su epistemología a través del desarrollo conceptual.

EL ESTATUS EPISTEMOLÓGICO DE LA TL EN EL MEDIO ESCOLAR

Para este análisis se desarrolló un cuestionario preliminar cuya finalidad fue explorar alguna información acerca de las creencias, concepciones y experiencias en alumnos o profesores de la TL dentro del medio escolar.

Las preguntas versaron alrededor de dos interrogantes. En la primera se pide explicación sobre lo que significa la fórmula de la transformada y su utilidad, mientras que la segunda explora sus habilidades para el uso de la TL.

Este cuestionario lo respondieron nueve estudiantes de la carrera de Ingeniería en Electrónica que ya usan la TL como herramienta de análisis de circuitos, así como por tres profesores de matemáticas y dos ingenieros en electrónica.

Las respuestas tuvieron como común denominador el que cuatro estudiantes y cuatro catedráticos definieron la TL mediante la expresión $L\left\{ f(t)\right\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$; los demás no se acordaron.

Se encontró diferentes significados en los profesores de ingeniería electrónica. Uno de ellos especificó la TL como:

$$L\left\{ f(t) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)dt, \text{ con } s = \sigma + j\omega$$

y explicó lo que quería decir tal expresión de la siguiente manera: “*La transformada sirve para proyectar la función f*(*t*) *sobre exponenciales de frecuencia compleja*...”, mientras que para los otros significó el enunciado “*...la transformada es un operador que transforma una función...* ”

Asimismo, todos los encuestados indicaron que la TL es una herramienta para resolver ecuaciones diferenciales; algunos calificaron al método como rápido y eficiente, y otros mencionaron que la TL transforma las ecuaciones para resolverlas por medios algebraicos.

Finalmente, tres profesores coincidieron en que ellos enseñan y manejan la TL en forma algorítmica, como una herramienta que transforma una ecuación diferencial en una algebraica; si bien la forma de obtener la solución se facilita, no saben cómo se originó la definición de esa transformada ni cómo se llegó a pensar en su utilidad.

La TL representa, en las experiencias escolares, solamente una entidad con propiedades cuya existencia y significación no se definen claramente. Sin embargo, la incorporan en la enseñanza a través de ciertos cálculos sistemáticos.

Cualquier experiencia del profesor sobre la TL reflejaría sólo este marco de referencia. Ello quiere decir que, en esas condiciones, una descomposición genética evidenciaría las construcciones mentales en dicho marco de referencia.

De alguna manera, los textos escolares contribuyen a establecer ese marco de referencia. Por ejemplo, en los programas de estudio del nivel educativo superior, en particular en las escuelas de Ingeniería, se encontró que la TL aparece por primera vez en los cursos de Ecuaciones Diferenciales. Y, en casi todos los programas consultados, se recomiendan textos como Spiegel (1983), Edwards (1986), Zill (1986), Derrick y Grossman (1981), Simmons (1993), entre otros (véase Cuadro 1).

Además, la TL forma parte de otros cursos dirigidos a Ingeniería (Teoría de Control o Sistemas Lineales) y algunos de Probabilidad. En los programas consultados aparecen textos de autores como O’Neil (1994), Ogata (1970), Koroliuk (1981) y Feller (1985).

La revisión de los textos ayudó a precisar los diversos argumentos que se usan para especificar la TL.

En primer lugar, hay definiciones de la TL en forma directa, sin mediar explicación previa de la integral, luego de la integral a partir de la transformada de Fourier, después de la TL desde un conjunto más general de transformaciones integrales y, finalmente, de la TL tomando como punto de partida las series de potencias.

Definición directa **de la TL**	**Definición de la TL a partir de la transformada de Fourier**	**Definición de la TL a partir de series de potencias**	**Definición de la TL a partir de las transformaciones integrales**

Dada una función $f(t)$ definida para $t \ge 0$, la TL de la función $f(t)$ es la función $F(s)$ definida como $\{f(t)\}$ = $F(s)$ = $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ para todos los valores de s a los que converge la integral	La transformada de Fourier de una función $f(t)$ es la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)dt$ Y si s es el número complejo tal que p = *-is* y además $f(t) = 0$ para t < 0, entonces se obtiene la integral $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$, que es la TL	"...si escribimos a una serie de potencias como $\sum_{i=0}^{\infty} f(i)x^i$, entonces un análogo natural es la integral impropia $\int_0^\infty f(t)x^t dt$. Si se reemplaza x por e^{-s} se obtiene $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$, integral que se conoce como la transformada de Laplace de la función $f(t)$ ..."	Dados $K(s,t)$ y $f(t)$, se llama transformación integral lineal de $f(t)$ sobre $K(s,t)$ a la expresión $\int_a^b K(s,t)f(t)\,dt$, donde $K(s,t)$ se conoce como el kérnel o núcleo de la *transformación*, y $f(t)$ debe pertenecer a un espacio vectorial de funciones definidas para t positivo.
Spiegel (1983), Edwards (1986), Zill (1986), Braun (1990), Derrick y Grossman (1981), entre otros.	Kolmogórov (1975), Gary (1983) y Kamen (1990),	Kaplan (1972)	García (1984) y en Boyce & DiPrima (1990)

Cuadro 1

En la clasificación anterior, merece destacarse el texto de Kaplan (1972), cuyo acercamiento a la TL difiere considerablemente de los demás. Su explicación para definir la TL es cercana a la epistemología encontrada en el estudio.

A partir de esto, se puede observar que:

- En los textos de ecuaciones diferenciales, la introducción y definición de la TL revela la ausencia de argumentos que puedan establecer su origen o significado; esto implica que para enseñar la TL sólo se parte de su definición simbólica sin contenido
- Algunos libros dan referencias a que la TL se originó debido a los trabajos de Heaviside (1925) y sus métodos operacionales para resolver las ecuaciones diferenciales, aunque no se dice cómo es tal relación.
- En algunos libros de Señales y Sistemas, Control o Series de Fourier pareciera que existe la preocupación de cimentar la definición de la TL sobre la transformada de Fourier, conocimiento que se introduce antes que la TL.
- Otros explican la existencia del factor e^{-st} como forma de hacer convergente la integral, siempre y cuando la función f sea de orden exponencial (Kolmogórov y Fomín, 1975).
- Respecto al intervalo de integración, en algunos textos dirigidos a Ingeniería Electrónica (Ziemer, 1993) se da un argumento de tipo físico para decir que la integración se hace desde 0 hasta ∞ porque la función $f(t)$, que puede asociarse con un voltaje o corriente eléctrica, sólo actúa sobre el circuito si $t \ge 0$.

A manera de resumen, los profesores reflejan en su modo de impartir la TL el contenido de los textos, es decir, la enseñanza de la TL está limitada a la manipulación de la expresión integral, por lo que calculan la transformada de funciones, prueban y aplican propiedades de la TL para encontrar la solución a alguna clase de ecuaciones diferenciales.

UNA EPISTEMOLOGÍA DE LA TL RECONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS

En esta sección se buscarán, dentro del desarrollo histórico de la TL, indicadores sobre su significado epistémico, y etapas de desarrollo con sus progresos o regresiones:

- Las construcciones operativas que dieron origen a la TL
- Los tipos de problemas que se resolvían con la TL
- Las etapas o niveles de desarrollo epistemológico del concepto
- Los vínculos de la TL con conocimientos preexistentes

Acerca de los acontecimientos que propiciaron el surgimiento de la TL han escrito algunos autores como Doetsch (1937), Gardner y Barnes (1942), Shtokalo (1976) y Deakin (1981 y 1982). Ellos mencionan a las obras de Euler (1769), Laplace (1812), Boole (1859) y Bateman (1910), entre otras, como fuentes principales para consultar sobre los orígenes de la TL.

Widder (1929) menciona que la integral $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ tuvo como antecedentes a expresiones de la forma $\int_a^b f(x)t^x dx$, $\int_a^b f(x)e^{sx}dx$ o $\int_a^b f(t)e^{-st}dt$, y que todas se denominan *integrales de Laplace*.

A la vez, revisando los textos mencionados, se puede afirmar que desde sus fundamentos tanto esta integral como sus antecedentes fueron creados implícitamente por Euler (1769), o explícitamente por Laplace (1812) con la única finalidad de resolver cierto tipo de ecuaciones diferenciales o en diferencias y, para justificar su construcción, en ningún momento de su desarrollo se les relacionó con los argumentos geométricos de área o volumen asociados comúnmente con una integral definida.

Los contextos en los cuales se hicieron las construcciones operativas que originaron la TL y sus antecedentes estuvieron enmarcados por un conjunto de afirmaciones realizadas en diferentes épocas, como las siguientes:

- La solución de ciertas ecuaciones diferenciales de orden mayor a 1 se pueden encontrar a partir del cálculo de factores de integración adecuados de la forma e^{mt}
- Toda función $F(t)$ puede ser expresada como una serie de potencias $F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k$
- Toda función *F*, y en particular toda solución de una ecuación diferencial o en diferencias, puede ser expresada como una integral de Laplace, es decir, mediante la forma $F(s) = \int_a^b f(t)e^{-st}dt$ para cierta función $f(t)$

Los métodos de solución de ecuaciones diferenciales o en diferencias presentados en cada etapa de desarrollo de la TL siempre estuvieron determinados por cierto tipo de operaciones efectuadas para transformarlas o resolverlas, de manera que en cada una se presentó algún tipo de integral de Laplace.

Son precisamente esas operaciones las que permiten reconocer los tres periodos de evolución conceptual de la TL. Una fase donde las soluciones se fundamentan en las multiplicaciones, otra en las sustituciones y una última en la que se regresa a la multiplicación (véase Cuadro 2).

Operación	*Multiplicación*	**Sustitución**	**Multiplicación**
Tipo de integral	Integral indefinida $\int f(x)e^{sx}dx$	Integral definida $\int_a^b f(x)t^x dx$, $\int_a^b f(x)e^{sx}dx$, $\int_a^b f(t)e^{-st}dt$	Integral impropia $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$

Cuadro 2

Las etapas conceptuales

Etapa 1. Multiplicación: las integrales indefinidas

En esta etapa, la multiplicación constituye la operación esencial para resolver una ecuación diferencial. Aquí, la multiplicación de una ecuación diferencial por una función adecuada (la exponencial e^{mx}) es la manera en que la ecuación de orden *n* queda transformada en otra de orden *n*-1, cuya solución se puede conocer o ya es conocida.

Esto se puede ver en los trabajos de Euler (1769), quien estudia métodos de solución de ecuaciones diferenciales de orden mayor a 1 mediante el argumento fundamental de multiplicar una ecuación diferencial

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} +...+A_1 y' + A_0 y = f(x)$$

por un factor e^{mx}, con la doble finalidad de transformar la ecuación diferencial en una exacta dependiendo del parámetro m, por un lado, por otro, reducir la ecuación en otra de un grado menor a la original.

$$B_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + B_1\, y' + B_0\, y = \int (A_n\, y^{(n)} + \ldots + A_1\, y' + A_0\, y) e^{mx}\, dx = \int f(x) e^{mx} dx$$

La aplicación de estos argumentos llevó de modo indirecto a la obtención de las integrales indefinidas de la forma $\int e^{fx} X dx$, $\int e^{fx} \frac{dy}{dx} dx$ o $\int f(x) e^{mx} dx$, expresiones que, sin duda, anteceden a la TL.

Etapa 2. Sustitución: las integrales definidas

En la segunda etapa, las diferentes integrales de Laplace son construidas a partir de la idea de resolver una ecuación sustituyendo una expresión integral donde se pretende conocer la forma del integrando y los límites de integración.

Aquí, la obra de Laplace (1812) resulta primordial porque la integral $\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$ aparece en sus trabajos en la forma que se conoce actualmente junto con las motivaciones que le dieron origen, los problemas que se resolvían con ella, y con los argumentos que hacen que presente esa forma simbólica singular.

El contexto inicial en el que esta etapa de conocimiento se desarrolla es el de la probabilidad, donde muchos problemas relativos a distribuciones se pueden resolver mediante la búsqueda del coeficiente f_k de la potencia t^k de un polinomio.

Laplace (1812) afirmó que una vez, conocida la función U, se puede conocer la f, para expresar la solución de una ecuación en diferencias o diferencial $f(s)$ como una integral de la forma:

$$f(s) = \int_a^b e^{st} U(t) dt$$

"*El conocimiento de las funciones generatrices de ecuaciones diferenciales nos permite expresar las soluciones de estas ecuaciones en términos de cuadraturas definidas*..." (Laplace (1812), p. 83).

De esta manera, en los trabajos de Laplace (1812), Boole (1859) o Poincaré (1885) se presenta un método, denominado de integrales definidas o de Laplace (mL), cuyo objetivo es representar la solución de una ecuación diferencial como una integral de Laplace.

Ello se hace suponiendo la solución de una ecuación en las formas $f_s = \int_a^b F(t) t^s dt$, o $f_s = \int_a^b F(t) e^{st} dt$, para lo cual se sustituye f_s en la ecuación para determinar la función $F(t)$, así como los límites de integración a y b.

Un ejemplo es presentado por Laplace (1812) en la solución de la ecuación diferencial

$$s \frac{dy_s}{ds} + i y_s = 0$$

En este caso, se propone como solución a $y_s = \int e^{-sx} \varphi(x)\, dx$, donde φ es una función a determinar junto con los límites de integración.

Tal expresión se sustituye en la ecuación diferencial para encontrar que la solución de la ecuación diferencial es $y_s = A \int_0^\infty x^{i-1} e^{-sx} dx$, con A = constante.

Las integrales de Laplace también son usadas (con sus adecuaciones) para resolver ecuaciones en derivadas parciales. Como muestra, Laplace resuelve la ecuación

$$\frac{dU}{dr'} = 2U + 2\mu \frac{dU}{d\mu} + \frac{d^2U}{d\mu^2},$$

y propone como solución a la expresión $U = \int \varphi(t, r')e^{-\mu t} dt$.

A partir de este periodo aparecen integrales de la forma $\int_a^b f(x)e^{sx}dx$, $\int_a^b f(x)e^{-sx}dx$ y $\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$.

Autores como Boole (1859), Abel (1881) o Poincaré (1885) contribuyeron al avance de la TL en la forma que fue creada por Laplace, ya sea con la modificación del método de solución, el uso de elementos del cálculo complejo para su desarrollo o estudiándola a fin de sistematizar sus propiedades, además de darle un símbolo especial.

Por ejemplo, Poincaré (1885) emplea el cálculo con variable compleja en un método para resolver ecuaciones diferenciales con el propósito de encontrar la integral general de las ecuaciones

$$\sum P_k \frac{d^k y}{dx^k} = 0,$$

donde P_k son polinomios, en x, todos del mismo grado.

Para encontrar dicha integral, propone como solución a la transformación de Bessel

$$y = \int v(z)\, e^{zx}\, dz ,$$

en la que se va a determinar la función v, y un camino de integración elegido de manera “conveniente”.

Algo que debe observarse en el mL es que la variable independiente de las ecuaciones diferenciales resueltas viene a ser s, una de las variables de la exponencial e^{st}, precisamente la de la integral $\int_a^b F(t)e^{-st}dt$ como función de s.

Y el cambio de variable en las ecuaciones diferenciales a t, al igual que la modificación del tipo de operación a la multiplicación transformó el mL al método de la TL actual.

Aunque en el trabajo de Laplace se observa la aplicación del mL en ecuaciones diferenciales con coeficientes polinomiales, Boole (1859) menciona que el mL es aplicable para resolver ecuaciones diferenciales de grado n con coeficientes polinomiales de grado n.

Como parte de esta etapa de sustituciones, se puede incluir lo que corresponde a los primeros intentos por estudiar las propiedades de la integral de Laplace, ya que el estudio sistematizado de esas integrales ocurre en épocas donde el mL se usaba al estilo de Laplace.

Una sistematización de las propiedades de la TL aparece en la obra de Abel (citada en G. Birkhoff, 1973), quien también afirma que toda función puede ser expresada como una integral, esto es, si $\phi(x)$ es una función, siempre se puede encontrar otra función $f(t)$ tal que

$$\phi(x) = \int f(t)e^{xt}dt$$

donde $\phi(x)$ se llama la función generatriz de $f(t)$ y $f(t)$ es la función determinante de $f(x)$.

Las propiedades de la integral son sistematizadas, y se le aísla del contexto de la solución de las ecuaciones diferenciales. Aquí, la integral de Laplace es identificada como

$$fg\left[f(t)\right] = \int f(t)e^{xt}dt .$$

Asimismo, la siguiente notación corresponde a la relación inversa

$$f(t) = D\left[\phi(x)\right].$$

Etapa 3. Multiplicación: las integrales impropias

Esta etapa tiene gran riqueza de contenidos no sólo porque la TL se empieza a usar tal y como se conoce en la actualidad, sino también porque en ella un cambio en las variables de la integral de Laplace, y la vuelta al método desarrollado por Euler, hace que la TL se vea más cercana a los métodos operacionales que el mL anterior.

Dicho periodo se caracteriza por un regreso a la etapa 1, puesto que ahora surgen las integrales $\int_a^b f(t)e^{-ts}dt$ a partir de la multiplicación de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes por el factor e^{-st}, para después integrar toda la ecuación en el intervalo $[0, \infty]$.

El marco en que se resuelven estas ecuaciones son problemas de la desintegración radiactiva (inicialmente) y de circuitos eléctricos en los cuales se busca determinar comportamientos en tiempos muy grandes ($t = \infty$) a partir de estados iniciales (en $t = 0$), por lo cual la integral $\int_a^b f(t)e^{-ts}dt$ es particularizada a la integral impropia $\int_0^\infty f(t)e^{-ts}dt$.

En un contexto físico, donde se estudian los modelos matemáticos para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales (usadas por Rutherford) con el propósito de calcular la cantidad de sustancias radioactivas, Bateman (1910) resuelve el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda_1 P\ ;\ \frac{dQ}{dt} = \lambda_1 P - \lambda_2 Q\ ;\ \frac{dR}{dt} = \lambda_1 Q - \lambda_2 R\ ;\ \frac{dS}{dt} = \lambda_1 R - \lambda_2 T\ ;.....$$

En la solución, introduce las expresiones

$$p(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\ P(t)\ dt\ ;\ q(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\ Q(t)\ dt$$

y para cada una de las cuales demuestra que

$$\int_0^\infty e^{-xt}\,\frac{dP}{dt}\,dt = -P(0) + \int_0^\infty e^{-xt}\ P(t)\ dt\ = -\,P(0) + x\,p(x)$$

Una vez que tiene estas relaciones, multiplica el sistema de ecuaciones inicial por e^{-xt}, e integra desde 0 hasta ∞ para obtener las ecuaciones integrales

$$\int_0^\infty e^{-xt}\ P(t)\ dt\ =\ \frac{P(0)}{x+\lambda_1}\ ;\ \int_0^\infty e^{-xt}\ Q(t)\ dt\ =\ \frac{\lambda_1 P(0)}{(x+\lambda_1)(x+\lambda_2)}\ ;$$

$$\int_0^\infty e^{-xt}\ R(t)\ dt\ =\ \frac{\lambda_1\lambda_2 P(0)}{(x+\lambda_1)(x+\lambda_2)(x+\lambda_3)}\ ....$$

con las que obtiene las funciones P, Q, R,... por medio de la relación $\int_0^\infty e^{-xt}e^{-\lambda t}dt\ =\ \frac{1}{x+\lambda}$.

Debe notarse que la integral de Laplace usada por Bateman ya es la TL actual, además de que, a diferencia del periodo anterior, la mayoría de las ecuaciones diferenciales son de coeficientes constantes y la variable independiente de las ecuaciones diferenciales es t y no s, como en el mL. Este cambio de variables, así como las propiedades de la integral $\int_0^\infty f(t)e^{-ts}dt$, hacen que el método de multiplicar la ecuación diferencial por la función exponencial e^{-st}, y luego integrar desde 0 hasta ∞, transforme la ecuación diferencial original en otra que se puede resolver por medios algebraicos, de modo que la nueva técnica de solución de ecuaciones diferenciales se puede comparar con los métodos operacionales desarrollados por Heaviside[4].

Los métodos operacionales, como formas de simbolizar y resolver ecuaciones diferenciales, se observa en el trabajo de Boole (1859), quien empieza a conectar la integral $\int e^{xt}Tdt$ con los símbolos propios de métodos operacionales.

[4] Deakin (1982) y Carslaw (1938) sostienen que Bateman fue el primero en utilizar la TL en la forma que se conoce actualmente.

En el marco de este desarrollo operacional, Heaviside –citado en Berg (1936)– estudió la solución de ecuaciones diferenciales lineales, cuyo origen estaba principalmente en los circuitos eléctricos; es decir, la mayor parte de sus resultados los obtuvo, aplicó e interpretó bajo ideas físicas.

Berg dice que las ideas básicas de Heaviside son las siguientes:

a) uso del símbolo *p* para la expresión $\frac{d}{dt}$ y

b) estudio del comportamiento de sistemas con condiciones iniciales 0, a las que se les aplica un impulso o fuerza repentina en el tiempo $t = 0$.

Este impulso unitario fue definido así $1 = \begin{cases} 1 \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$

El álgebra de la función $1(t)$ y el operador *p* llevaron a la obtención de expresiones como:

1. Si *a* es un escalar, entonces $\frac{1}{p+a}\ 1 = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\ 1$
2. Si *a* es un escalar, entonces $\frac{p}{p+a} 1 = e^{-at}\ 1$
3. $\frac{\omega\, p}{p^2 + \omega^2}\ 1 = sen(\omega\, t)\ 1$

Un ejemplo de aplicación de estas relaciones se observa en la solución de la ecuación diferencial de un circuito serie:

$$E\ 1 = iR + L\frac{di}{dt}$$

La solución para la corriente *i* se encuentra despejándola, y aplicando la propiedad *1* de la siguiente manera:

$$i = \frac{E}{L}\frac{1}{p + \frac{R}{L}}\ 1 = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)\ 1$$

Este método para resolver ecuaciones diferenciales por medio del operador *p* se denomina de operadores resistencia (Heaviside, 1887), y una de sus características reside en que es aplicable a ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes y condiciones iniciales en $t = 0$.

La limitación de resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales en $t = 0$ se acabó cuando surgieron otras contribuciones al desarrollo de esos métodos. Por ejemplo, Jeffreys (1946) y Carslaw (1928) publican una versión de los métodos de Heaviside descritos en el libro de Berg, donde los métodos operacionales se pueden aplicar a ecuaciones con condiciones iniciales en puntos diferentes a $t = 0$.

El trabajo de Carson (1926) mostró finalmente la evidencia de la relación entre ambos métodos, al obtener la expresión $\frac{1}{pZ(p)} = \int_0^\infty e^{-pt}\ h(t)\, dt$, en un contexto en el que se propone resolver el problema de encontrar la distribución de corrientes y voltajes en un circuito como respuesta a una fuerza electromotriz (FEM) arbitraria aplicada al circuito cuando éste se encuentra en equilibrio, es decir, con cargas y corrientes nulas al tiempo $t = 0$.

Tal relación es usada para resolver ecuaciones diferenciales de la forma:

$$(p^2 + ap + b)\, y = F(x)$$

Y dado que $y = \frac{F(x)}{p^2 + ap + b} = \frac{F(p)}{H(p)}$, entonces al escribir $\frac{F(p)}{H(p)}$ en fracciones parciales de la forma $\frac{1}{Z_i(p)}$ (salvo constantes), en cada una de estas fracciones se puede utilizar la relación $\frac{1}{Z_i(p)}$ = $p\int_0^{\infty} e^{-pt}\, h(t)\, dt$ [5]

Para resolver estas ecuaciones integrales, en las que hay que calcular $h(t)$ conociendo $Z(p)$, se elaboran tablas de integrales como las siguientes:

$$p\int_0^{\infty} e^{-pt}\, e^{-\lambda t}\, dt = \frac{p}{p+\lambda}\text{; por tanto, } h(t) = e^{-\lambda t}$$

$$p\int_0^{\infty} e^{-pt}\, \frac{t^n}{n!}\, dt = \frac{1}{p^n}\text{; por tanto, } h(t) = \frac{t^n}{n!}\text{, etcétera.}$$

El mL cambió completamente, puesto que de aquí en adelante la integral de Laplace se usa generalmente para resolver ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes y con límites de integración 0 e ∞, así como en variables independientes de la ecuación a resolver y la integral de Laplace no coinciden.

Ahora, la TL está en una etapa de formalización y sistematización de sus propiedades (aunque esto ya se había comenzado a hacer desde Abel).

En este contexto se encuentran los trabajos de Doetsch (1937 y 1943), quien publica una serie de artículos y libros en la que escribe por primera vez acerca de la TL como la herramienta matemática que vino a darle rigor matemático a los métodos operacionales: (Deakin (1982) y Shtokalo (1976)).

Doetsch (1943) define la integral de Laplace $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt$, como una transformación funcional denominada TL, caso particular de las L-funciones $F(t)$, aquéllas para las que la integral

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_T^{\omega} e^{-s_0 t}\, F(t)\, dt$$

existe para $T > 0$ y para ciertos valores del complejo s_0.

La TL forma parte de un conjunto de transformaciones integrales de la forma general

$$\int_a^b K(x,\, y)\, f(x)\, dx$$

en la que $K(x, y)$ es el núcleo de la transformación.

Deakin (1981) sostiene que la TL aparece por primera vez en el medio educativo de Estados Unidos en un texto dirigido a estudiantes de los últimos años de Ingeniería o para graduados de primer año, autoría de Gardner y Barnes (1942), relativo al análisis de sistemas lineales.

En él, la TL se expone como un caso particular de la transformada de Fourier, y es interpretada como una herramienta similar a la función logaritmo, pues transforma ecuaciones integrodiferenciales en multiplicaciones, divisiones, sumas y restas de expresiones algebraicas, lo cual simplifica la búsqueda y análisis de soluciones de las ecuaciones integrodiferenciales.

Una variante de la TL la encontramos con McLachlan (1948), quien, en un texto dirigido a estudiantes de posgrado en Ingeniería, trabaja con la expresión

$$\Phi(p) = p\int_0^{\infty} e^{-pt}\, f(t)\, dt$$

la cual define como la p- transformada de Laplace de $h(t)$ y que, a su vez, es un caso particular de la

[5] Denis y Papin (1969) definen a esta expresión como la transformada de Laplace-Carson, y es denotada como $h(t)$=$g(p)$, mientras que la transformada de Laplace es definida con la misma expresión integral, pero sin el factor p, y es simbolizada como $\Im h(t) = g(p)$.

expresión

$$\Phi(p,\ h_1,\ h_2) = \int_{h_1}^{h_2} e^{-pt}\ f(t)\ dt\ .$$

McLachlan explica que la TL se originó sin el factor *p*, y da las siguientes razones para expresar de este modo la transformada:

- Con este factor, las formas operacionales de Heaviside y la TL coinciden y
- El factor *p* hace que *f*(*t*) y $\Phi(p)$ coincidan dimensionalmente, esto es, en una aplicación física de la integral de Laplace *t* tiene cierta dimensión, de la que *p* se considera como recíproca. Si *t* representa tiempo, entonces *p* representa t^{-1}, por lo que el producto *pt* es adimensional, así como *pdt*.

La notación usada en este libro para las *p*-transformadas es el símbolo ⊃. Ejemplos de ello son las siguientes expresiones:

$$e^{-at} \supset \frac{p}{p+a} \quad \text{o} \quad sen(at) \supset \frac{pa}{p^2+a^2}$$ [6]

Van der Pool (1950) también escribe sobre la *p*-transformada de Laplace, pero además desarrolla métodos operacionales usando la *p*-transformada de Laplace bilateral de una función *f*(*t*), definida como

$$h(p) = p\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt}\ f(t)\ dt$$

La notación para la *p*-transformada es:

$$h(p) \supset f(t),$$

donde a *f*(*t*) le llama *original* y a *h*(*p*) la *imagen.*

Además, en este texto, la *p*-transformada de Laplace es definida sobre la base de la transformada de Fourier, de modo que aquélla es un caso particular de ésta, lo cual contrasta con el libro de Gardner y Barnes (1942), en el que la transformada de Fourier es un caso particular de la de Laplace.

Finalmente, conviene apuntar que pareciera que en el desarrollo de la TL, en este siglo, nadie se volvería a ocupar de sus orígenes relacionados con las series de potencias. Pero Widder (1929 y 1947), y posteriormente Doetsch (1937), mencionan que la serie de Taylor $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es el fundamento de la integral de Laplace.

Widder (1929) justifica tal afirmación tomando una sucesión de enteros $\{m_k\}$:

$$0 \leq m_0 < m_1 < ....;\ \text{y tal que}\ \lim_{k\to\infty} m_k = \infty$$

y con la sucesión de exponentes forma la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{m_k}$

Dado que en ella hay cierta ambigüedad, ya que, por ejemplo, si $m_k = ½$, entonces habría que decidir qué raíz de *z* es la que se toma; si m_k no es un entero, entonces z^{m_k} constituye una función multivaluada.

Para evitar eso se hace el cambio de variable $z = e^{-s}$ (o también $z = e^{s}$), que transforma el círculo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en un semiplano, lo cual nos lleva a obtener la serie de Dirichlet $F(e^{-s}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-sk}$.

La sucesión $\{m_k\}$ se sustituye por una variable continua *t* que varía desde 0 a ∞, la serie se cambiará por una integral, la sucesión $\{a_k\}$ se modifica por una función *f*(*t*) y $F(e^{-s})$ es una función de *s*, quedando

[6] El símbolo ⊃ denota que se calculó la *p*-transformada de la expresión del lado derecho.

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt \,,$$

$F(s)$ se llama función *generatriz* y $f(t)$ es la función *determinante* (Widder, 1929).

Conceptualizar la integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ como la generalización de una serie de potencias permite, a Widder y a Doetsch, discutir teoremas acerca de las condiciones de convergencia de la serie y de la integral.

Reconstrucción de significados de la TL

La revisión de las ideas que dieron origen a la TL posibilita afirmar que esa representación simbólica encierra gran riqueza de contenidos, donde cada una de las componentes de la integral tiene los significados propios siguientes (véase Cuadro 3):

<table>
<tr><td rowspan="4">$\int_a^b e^{-st} f(t)\, dt$</td><td>$f(t)$</td><td>$e^{-st}$</td><td>$\int_a^b$</td><td>Límites de integración: a, b</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Representa una serie de potencias (una función generatriz)</td><td>Factor para hacer converger la integral impropia</td><td rowspan="3">La conversión de una suma Σ cuando las variables son continuas</td><td>Parte de las condiciones para representar una función como una integral de Laplace</td></tr>
<tr><td>Factor para convertir una ecuación diferencial en una exacta</td><td rowspan="2">Cálculo de estados estacionarios, en $t = \infty$, a partir de estados iniciales, en $t = 0$.</td></tr>
<tr><td>Representación de voltajes</td></tr>
</table>

Cuadro 3

En el cuadro aparece la exponencial como un factor de convergencia de la integral, pero la convergencia de la integral no aparece en el texto de Laplace. En su ensayo filosófico (1988), Laplace apunta lo siguiente:

"...De lo único que se trataba es de reducir la integral definida a una serie convergente. Es lo que he obtenido por un procedimiento que hace converger la serie con rapidez..." (pp. 65-66).

Esta debe ser la razón por la que en la mayor parte de problemas resueltos por Laplace aparezca la integral con la exponencial e^{-sx} en un intervalo $[0,\infty]$, donde la integral es convergente.

En el cuadro anterior también se anota uno de los significados de la exponencial como un voltaje, idea importante dentro de las ideas que dieron significado a la integral de Laplace, ya que esta representación como el modelo de un voltaje aplicado a un circuito permitió a Carson (1926) obtener la integral que conecta los métodos operacionales con la TL.

Así, el conjunto de significados encontrados hace recordar que la enseñanza de la TL en nuestro sistema educativo solamente se presenta mediante la definición de una expresión integral, a partir de la cual se extraen propiedades que serán usadas después para resolver ecuaciones diferenciales.

Esta manera de enseñar la TL, sustentada en la definición de un conocimiento, no es algo extraño en el medio educativo, puesto que esto también sucede, por ejemplo, con la enseñanza de los conceptos de álgebra lineal (espacios vectoriales, base, dimensión, entre otros).

Para Sierpinska (1996) hay dos modos de pensamiento: en el primero el objeto de pensamiento es dado directamente (intuición) y en el segundo el objeto de pensamiento es dado indirectamente (pensamiento discursivo). Al modo intuitivo se le llama sintético y al discursivo, analítico.

En el modo analítico, el objeto es creado a partir de su definición, y sus propiedades se derivan de allí. Este último tipo de pensamiento lo describe Sierpinska como el nivel *trans* del conocimiento, a partir del cual se enseñan los conceptos del álgebra lineal.

Para el caso de la TL hemos visto que su enseñanza y/o presentación sigue una tradición dada desde el trabajo de Boole (1859), donde se parte de la definición de una expresión integral para, de ahí, explorar sus propiedades y aplicaciones.

Esto es, en la enseñanza de la TL no se consideran elementos que puedan describir su estructura, de modo que un estudiante pudiera intuir el porqué de su forma y componentes. Así, a modo de metáfora con lo expresado por Sierpinska, pudiera decirse que la enseñanza de la TL inicia en el nivel *trans* del concepto.

Mientras que, con relación a las construcciones mentales, Harel y Kaput (1991) reportan que en el medio escolar la enseñanza de esas representaciones simbólicas comienza con la manipulación de notaciones antes de obtener la experiencia suficiente para construir sus referentes mentales, por lo cual la notación matemática puede ser de gran poder o de gran peligro.

Dentro de estas observaciones parece importante considerar un estatus epistemológico en la didáctica sobre las ideas que llevaron a la construcción de los significados de cada una de las componentes de la TL. Inclusive, el estatus epistemológico podría ser el germen de una revisión en la práctica educativa que probablemente llevará al estudiante a construir o, al menos, a intuir porqué la expresión de la TL es como se da en las definiciones.

Es en ese sentido que se establece, en esta investigación, una relación entre la epistemología de la TL y su descomposición genética a través de dos hechos: por un lado, sin la epistemología de la TL se hubiera partido de la definición de la TL, por otro, la epistemología incorpora elementos que a priori no estaban en la conceptualización. Entonces, la descomposición genética deberá reflejar cómo están relacionados los elementos encontrados en la epistemología con la definición, es decir, cómo cohabitan la construcción de significados y las construcciones mentales.

Algunos de los aspectos que la descomposición genética debería considerar en su formulación son los siguientes:

a) Construir una integral $\int_a^b f(x)t^x dx$ definida a partir de una serie $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)t^k$ como el antecedente discreto de la integral, basada en las ideas de Laplace, que consiste en los conceptos de promedios ponderados y valores esperados como ejes para organizar problemas donde se aliente a una persona a construir una integral definida a partir de las sumas infinitas de datos discretos.
b) Obtener la solución de una ecuación diferencial, suponiéndola como una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k$, donde el cálculo de los coeficientes lleve a encontrar que su forma general es $f_k = \int_a^b f(x)e^{-kx}dx$.
c) Encontrar la solución de una ecuación diferencial multiplicando esas ecuaciones por un factor de la forma e^{mt}, de modo que la ecuación se haga exacta.

HACIA UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA INICIAL

En la epistemológica formulada se ha encontrado un conjunto de construcciones y significados alrededor de la integral $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ y de los métodos de solución de ecuaciones diferenciales asociados con la integral que no están en la mayoría de los textos ni en los programas de enseñanza respectivos.

De este conjunto de construcciones que refleja el desarrollo conceptual de la TL se tendrá que precisar el tipo de argumentos que podrían favorecer el entendimiento de la integral de Laplace –de ahí el papel de la descomposición genética–, dejando para una posible continuación lo que corresponde a los métodos de solución de ecuaciones diferenciales asociados.

Con base en lo anterior, hipotéticamente se podrían formular varios caminos que presumiblemente lleven a un estudiante a construir la integral de Laplace.

Multiplicar la ecuación diferencial por un factor

Se trata de una situación donde hay que encontrar respuesta a una ecuación diferencial mediante factores integrantes. El objetivo será alentar las construcciones mentales para crear la necesidad de multiplicar la ecuación por un factor adecuado que la convertirá en una ecuación diferencial exacta, y ello deberá conducir necesariamente a la construcción de integrales indefinidas de la forma $\int f(t)e^{mt}dt$.

Posteriormente, habría que presentar otras situaciones en las que el objetivo es pasar de la integral $\int f(t)e^{mt}dt$ a la integral definida $\int_a^b f(t)e^{-st}dt$ y, en particular, a $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$.

Las series de potencias como forma de construir la integral definida: promedios ponderados y valores esperados

Se trata de hechos derivados de la probabilidad. Los conceptos que entran en juego son los de la media aritmética (promedios) y valores esperados. Algunas nociones al respecto fueron encontradas en los trabajos originales de Laplace. A continuación, se señalan algunas características para el propósito de la situación:

- El promedio ponderado es un concepto donde es necesario multiplicar dos cantidades (el dato por su frecuencia relativa) para después sumarlas
- La suma infinita de estos términos se convierte en una integral definida, al pasar del promedio al valor esperado
- La frecuencia relativa es un concepto que se puede mirar como sinónimo de probabilidad, y para ciertas formas de probabilidad (por ejemplo, las exponenciales) la expresión integral del valor esperado se convierte en una forma de la integral de Laplace

Cálculo de coeficientes de series infinitas

La situación se trata del cálculo de coeficientes de series infinitas para resolver ecuaciones recurrentes (o en diferencias).

En este caso, las construcciones mentales deberían ser enfocadas para alentar la posibilidad de que una persona descubra (o intuya) que si se supone que la solución de una ecuación diferencial es una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k$, entonces la forma general de los coeficientes es $f_k = \int_a^b f(x)t^x dx$.

Cada una de las situaciones planteadas tienen algo en común: la multiplicación de un factor exponencial por una función. Los diversos significados consisten en la relación de estos términos con respecto a sus variables, como parte de una suma infinita o como integrando de una integral. En ese sentido, se consideró adecuado formular una exploración que ofreciera indicadores sobre los significados que realmente se puedan dar en los procesos escolares.

Así, se diseñó un conjunto de problemas exploratorios –denominados situaciones– donde el eje principal se formó alrededor de las sumas de productos de dos cantidades (el dato y su frecuencia) para organizar una serie de operaciones dirigidas hacia el proceso de construcción y entendimiento de la integral $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$, o de alguna de sus variantes.

Las situaciones se diseñaron de acuerdo con la separación entre procesos finitos en promedios e infinitos, en el caso de los valores esperados, a fin de organizar los contenidos, conceptos e ideas que entran en juego y, de este modo, encontrar la orientación para establecer las construcciones mentales que se deben realizar con el propósito de entender la TL.

Al considerar la epistemología formulada de la TL, la situación debe consistir en secuencias que posibiliten a los participantes el tránsito entre las construcciones que aparecen en el Cuadro 5**.**

Promedio simple	Promedio de datos agrupados	Valores esperados discretos	Valores esperados continuos
$\dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$	$\sum_{k=1}^{n} x_k f_k$	$\sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$	$\begin{cases} \int_a^b xf(x)dx \\ \int_a^b g(x)f(x)dx \\ \int_a^b e^{mx} f(x)dx \end{cases}$

Cuadro 5

Los participantes

En el estudio participaron cinco personas. Tres eran estudiantes del cuarto semestre de Ingeniería Civil, una cursaba el octavo semestre de Ingeniería Electrónica y la última era un profesor con experiencia en cursos de Ecuaciones Diferenciales y formación en matemáticas.

Los tres estudiantes de Civil no habían tenido contacto con el tema de la TL, pero sí habrían llevado cursos de Cálculo I, II y III (cálculo diferencial e integral en una y varias variables), Álgebra Lineal, Probabilidad y, a la fecha de la entrevista, estudiaban la materia Ecuaciones Diferenciales.

El de Electrónica ya tenía experiencia en el uso de la TL tanto por la asignatura Ecuaciones Diferenciales, que había llevado en el cuarto semestre, como por los cursos de Sistemas Lineales o Análisis de Circuitos, correspondientes a semestres posteriores.

Se citó a cada uno de los participantes en un día específico, y se les entregó el conjunto de problemas. Los datos obtenidos fueron producto de los escritos que entregaron, así como de entrevistas videograbadas, cuyas preguntas tuvieron como directriz las siguientes interrogantes:

- ¿Cómo entiende o construye un estudiante la integral definida a partir de una suma infinita de términos?
- ¿Cuáles son los conceptos previos necesarios para construir esta integral?
- ¿Es posible que, a partir de los conceptos de promedios y valores esperados, se llegue a construir la integral $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ o alguno de sus antecedentes?

Se dejó un intervalo de media hora, en promedio, en lo que cada persona leía el cuestionario para entenderlo y empezar a contestarlo. El tiempo total para la solución y entrevista fue de tres horas.

Análisis de los datos en términos de la tríada

Tanto las entrevistas como los escritos de cada uno de los participantes fueron editados íntegramente, de tal modo que en cada caso se da una visión general de lo que piensan. Cada uno de los entrevistados se identifican con los símbolos A_1, A_2,... A_5. Con la letra *E* se identifica al entrevistador.

El desarrollo de un esquema obedece a un orden determinado por los mecanismos de la tríada: *intra*, *inter* y *trans* (Clark et al., 1997). El nivel *intra* se caracteriza por focalizar los problemas individuales aislados de otras acciones, procesos y objetos de naturaleza similar; una persona que esté en este nivel no ha construido relaciones entre ellos.

El *inter* es referido como un pre-esquema, y su desarrollo es determinado por el reconocimiento de relaciones entre acciones, procesos y objetos. Aquí se empieza a agrupar problemas de naturaleza similar y quizá a llamarlos por el mismo nombre.

En el *trans*, el individuo empieza a construir la estructura subyacente a través de las relaciones descubiertas en el nivel *inter*, y esas construcciones son entendidas como algo que le da coherencia al esquema.

Con base en lo anterior, se analizaron los datos obtenidos en términos de un esquema:

- En el *intra*, una persona tiene una colección de reglas (que simplemente aplica, ya sea por memorización o por sugerencias externas) para calcular el promedio o el valor esperado, pero no tiene capacidad de relacionarlas.
- En el *inter*, una persona encuentra algunas relaciones entre las diferentes formulaciones para calcular promedios y valores esperados.
- En el *trans*, una persona reconoce que los promedios y valores esperados son en esencia el mismo concepto, además de que estaría en posibilidad de cuestionarse por la estructura subyacente entre las integrales definidas y las series infinitas descubiertas en la etapa *inter*.

ALGUNAS EVIDENCIAS

Nivel pre- intra

En este caso tenemos al participante A_5, quien necesita de sugerencias para recordar cómo calcular el promedio de datos no agrupados, y aún así no puede efectuar el cálculo correcto (este hecho obliga a cuestionar el nivel *intra*, por lo que convenimos en llamarle nivel *pre-intra*). Tampoco puede relacionar la forma de calcular el promedio de datos agrupados y no agrupados.

De este modo, A_5 escribe dos respuestas muy diferentes para resolver el problema del cálculo del promedio de los números 2, 2, 3, 4 y 5 si se repiten 5, 10, 30 y 25 veces (véase anexo):

Una de ellas es $\frac{2+3+4+5}{4} = \frac{14}{4} = 3.5$, y la otra $\frac{10+30+40+125}{4} = \frac{285}{4} = 7.125$

E: ¿Me podrías explicar cómo determinas el promedio de este conjunto de datos, donde tienes también las frecuencias?

A_5: ¿El promedio?

E: Sí.

A_5: Te dan las frecuencias. La suma de frecuencias... digamos, frecuencia 1. ¿Qué te están pidiendo? ¿El promedio?

E: Sí.

A_5: ¿No es la suma aritmética de las frecuencias entre n?. Digamos... [escribe $\frac{f_1 + f_2 + ... + f_n}{n}$]

En otro momento, cuando A_5 trata de resolver un problema posterior, se observa que a consecuencia de que no sabe cómo determinar promedios en forma numérica, además de las dificultades que tiene para relacionar las probabilidades con las frecuencias relativas, le resulta aún más difícil hacer cálculos con cantidades en abstracto. El siguiente diálogo da cuenta al respecto:

A_5: No entiendo este problema.

E: Se trata de calcular un promedio, de la misma manera que en el problema dos de la situación 1; si en ese caso dijiste que el promedio es la suma de datos multiplicados por sus frecuencias, ¿cómo calcularías el promedio de ahora?

A_5: ¿De éste?

E: Sí.

A_5: Aquí tenemos la suma de esto, que es la suma

[escribe: $\frac{G(t_1)+G(t_2)+...+G(t_n)}{n}$, donde $G(t_1)$ es una frecuencia]

E: ¿Pero dónde quedaron los datos $F(t_1)$, $F(t_2)$..., que son las cantidades de personas?

A_5: ¿Hay que utilizarlos?

E: Sí.

A_5: Hace rato se dijo que la frecuencia relativa... calculamos la frecuencia relativa y la probabilidad, ¿verdad?...

E: ...

A_5: [Ahora escribe $x_nG(_n)$]

E: Pero ¿ya no es una suma?

A_5: Es que no tengo ni idea.

Nivel *Inter.*

En esta situación, A_2 encuentra los promedios de datos agrupados y no agrupados, relacionándolos con problemas donde se da la probabilidad de cada dato en vez de las frecuencias relativas. Pero a veces no puede dar una respuesta correcta, dado que arrastra dificultades en la comprensión de las frecuencias relativas.

Sin embargo, entiende bien la forma numérica para calcular los promedios, y escribe una formulación a dicho cálculo:

E: Revisemos el primer problema. Aquí se te dan los datos, así como el número de veces que se repite cada uno. ¿Cuál es la forma general para calcular el promedio de un conjunto de datos en los que se dice el número de veces que se repiten?

A_2: Pues es el número de veces que se repite el número... La suma de cada uno de estos términos entre la suma de todos ellos, y entre la suma de todas las veces que se repiten.

E: ¿Puedes escribir eso?

A_2: Sí, es un número x por un número y de repeticiones, más un número z por un número m de repeticiones, más lo que sea entre y + m, más lo que sigue... $\frac{(x)(y)+(z)(m)+...}{y+m+...}$

La falta de comprensión del significado de las frecuencias relativas le impide a A_2 relacionar su formulación anterior con la correspondiente al cálculo de promedios agrupados por su frecuencia relativa:

***E*:** Y si te dan las frecuencias relativas, ¿cómo calculas el promedio?

***A*₂:** ¿Cómo?

***E*:** Sí, el promedio cuando se te dan los datos con su frecuencia relativa.

***A*$_2$:** ¿Cómo, cómo?

***E*:** ¿Sabes lo que es una frecuencia relativa?

***A*$_2$:** Eh... no.

***E*:** ¿No?

***A*$_2$:** No.

Pero al parecer los porcentajes como forma de escribir las frecuencias relativas son más familiares a este participante, lo cual se puede apreciar a continuación:

E: ¿Sabes determinar los porcentajes con que aparecen los datos del problema?

A$_2$: Sí. Es la cantidad de cierta cosa, por ejemplo, si...

E: A ver: de estos datos calcula los porcentajes con que aparece cada uno.

[Escribe la siguiente tabla]

A$_2$:

número	frecuencia	porcentaje
2	5	7.14
3	10	14.28
4	30	42.86
5	25	35.71

E: ¿Cómo calculaste esto?

A$_2$: Pues el 100 por ciento de las frecuencias es 70; entonces, para éste (el 2), como nada más tiene una frecuencia de 5, se multiplica por 100 y se divide entre 70. Es una regla de tres, y así con los demás.

E: Bueno, esa es la frecuencia relativa. Y con esta base de los datos y la frecuencia relativa, ¿cómo calcularías el promedio usando los datos y sus frecuencias relativas?

A$_2$: Pues... puedo multiplicar 2 por 7.14 más 3 por 14.28 más los que siguen, y divido entre 100

Con esta explicación reorganiza la formulación para el cálculo de promedios, obtenida anteriormente:

E: ¿Y puedes describir eso en forma general?

A$_2$: ¿Una formulación general?

E: Sí.

A$_2$: Sería $\dfrac{x\left(\dfrac{100x}{y+m+n...}\right)+y\left(\dfrac{100y}{y+m+n...}\right)+..}{100}$

E: ¿Y esta expresión te sirve para calcular el promedio del problema 1?

A$_2$: Sí (en este momento calcula el promedio mediante la expresión anterior, sustituyendo los números).

En otro momento, A_2 da muestras de que puede modificar las formulaciones para el cálculo de promedios numéricos y aplicarlas en expresiones más generales, pero arrastra problemas de entendimiento de las frecuencias relativas.

Dicho participante quiere generalizar una expresión como $\frac{\text{suma de términos}}{\text{número total de términos}}$. Para el cálculo no numérico de promedios, sabe que hay que dividir una suma de términos, mas no sabe qué.

Esto se aprecia cuando A_2 resuelve el problema dos (véase anexo). Calcula el promedio de tiempos para atender un cliente de acuerdo con los tiempos que dura en ser atendido, donde la probabilidad de que esto suceda es:

Tiempo					..	...
Probabilidad	$-e^{-1}$	$-e^{-2}$	$-e^{-3}$	$-e^{-4}$	..	...

En el siguiente extracto se observa también que el entrevistado no toma en cuenta que el número de datos es infinito.

E: ¿Ya entendiste el problema?

A$_2$: Me estoy dando cuenta que la potencia a la cual está elevada la frecuencia es la misma que la del tiempo; entonces, puedo hacer una fórmula general, que es la sumatoria de 1 menos e^{-t}, se hace una sumatoria y, para sacar el promedio, se realiza la sumatoria y se divide entre el número de términos que se usan [escribe $\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-e^{-t})t}{\sum_{i=1}^{n}}$]

Pero después de algunas sugerencias del entrevistador, cambia su respuesta en forma correcta:

E:	Seguro? Acuérdate de los problemas anteriores. ¿Había relación entre la frecuencia relativa y la probabilidad?
A$_2$:	No sé, es... el promedio... Un promedio $1-e^{-t}$ por t
E:	¿Porqué?
A$_2$:	Pues esta es...
E:	A ver; trata de calcular sin usar el símbolo de la sumatoria. ¿Qué haces primero para calcular el promedio?
A$_2$:	Multiplico 1 por $1 – e^{-1}$ más 2 por $1-e^{-2}$, y así [escribe: $1(1-e^{-1}) + 2(1-e^{-2}) + 3(1-e^{-3})+... = \sum t(1-e^{-t})$]
E:	Esto ya es diferente a lo que decías antes.
A$_2$:	Sí, está bien.

Luego, esta persona explica cómo obtener el promedio en forma general cuando se presentan funciones que sustituyen a las frecuencias relativas y a los datos.

Por ejemplo, el problema tres considera funciones como datos numéricos:

En un supermercado se ha determinado que el número de personas, $F(t_k)$, que llega al local en un instante (t_k, en horas) tiene probabilidades dadas por la siguiente tabla

No. de personas	F(t_1)	F(t_2)	F(t_3)	F(t_4)	....
Probabilidad	G(t_1)	G(t_2)	G(t_3)	G(t_4)	....

Determina la forma de calcular la cantidad promedio de personas que llega a la tienda en un tiempo determinado.

Entonces, A_2 expresa que el promedio es $\frac{F(t_1)G(t_1)+F(t_2)G(t_2)+...+F(t_k)G(t_k)}{100}$.

Y al preguntarle sobre la relación con el siguiente problema, escribe una expresión integral de Laplace para el cálculo de promedios:

***E*:** ¿Y esta relación se aplicaría para el siguiente problema?

***A*₂:** ¿Ahora dan un número $f(t)$? [Escribe $\int_a^b f(t)e^{kt}dt$]

***E*:** ¿Y porqué usas la integral?

***A*₂:** Porque es una sumatoria.

***E*:** ¿Cómo?

***A*₂:** Es que la suma $\frac{F(t_1)G(t_1)+F(t_2)G(t_2)+...+F(t_k)G(t_k)}{100}$ se pasa a una integral.

Este caso (aunque hubo otros parecidos) muestra evidencias de que la persona entrevistada, mediante sugerencias, puede relacionar las reglas para calcular promedios simples con las de promedios de datos agrupados, aunque no comprende cabalmente el papel de la frecuencia relativa, ya que trata de organizar sus conocimientos retomando la regla para calcular el promedio simple.

Lo anterior se pone de manifiesto al observar que, como primera respuesta, calcularon el promedio de datos agrupados sumándolos y dividiéndolos entre un número, es decir, trataron de obtener una expresión para el promedio de datos agrupados en la forma $\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k f_k}{\text{"algo"}}$, donde ese “algo” no saben exactamente qué es.

Nivel trans

Aquí encontramos casos donde el participante sabe la relación entre los promedios y los valores esperados, así como sus formulaciones, asociándolos con los valores promedio de una integral. Además, tratan de explicarse porqué aparece la integral en vez del símbolo de sumatoria. Como ejemplo, se tiene al entrevistado identificado por A_1.

Él hace los cálculos numéricos en forma correcta. Además, a diferencia de las otras personas, entiende el papel y significado de la frecuencia relativa y su relación con la probabilidad. Esto se muestra a continuación:

E: Vayamos con el problema de los promedios. A ver, ¿cómo defines el promedio cuando se te da el número de veces que se repite un dato?

A_1: ¿Cómo lo defino? Pues hay que multiplicar cada elemento por el número de veces que se repite, y lo divido entre la suma de las veces que se reitera... Es lo que ya está escrito aquí:

[A_1 escribe lo siguiente: Promedio = $\frac{5(2)+10(3)+30(4)+25(5)}{5+10+30+25}$]

E: Sí, pero esta forma es particular para este problema. ¿Cuál sería la forma general?

A_1: ¿Una fórmula?... ¿O qué? Pues así...

[escribe la expresión: promedio = $\frac{N_1x_1+N_2x_2+...+N_nx_n}{N_1+N_2+...+N_n}$]

E: ¿Entonces, esa seria la forma general para calcular promedios cuando se te da el número de veces que se repite un dato?

A_1: Sí.

E: ¿Qué es para ti la frecuencia relativa?

A_1: La frecuencia... yo la entendí como el tipo de las veces que se repite, como tipo probabilidad.

E: A ver; en este ejemplo (el primer problema), ¿cuál sería la frecuencia relativa de cada dato?

A_1: ¿Su frecuencia relativa? Yo creo que tiene que ser 5 entre 70, ¿no?

E: ¿Y la de los demás?

A_1: Pues 10 entre 70, y así

Finalmente, A_1 escribe una formulación correcta para el caso.

E: Bueno, ¿cómo puedes escribir el promedio en términos de las frecuencias relativas?

A_1: ¿El promedio en términos de las frecuencias relativas? Pues... si lo escribo aquí es el elemento 1 por la frecuencia 1 más el elemento 2 por la frecuencia 2, y así, ¿no? Hasta el elemento último por la frecuencia de cada uno
[Ahora escribe: Promedio = $N_1F_1+N_2F_2+...+N_nF_n$]

A partir de su comprensión del cálculo de promedios de cantidades numéricas como una división entre dos cantidades, trata de resolver problemas para valores esperados realizando tal operación. Así, al resolver el problema 2, escribe la siguiente respuesta:

$$\text{Promedio} = \frac{(1-e^{-1})1+(1-e^{-2})2+...+(1-e^{-n})n}{(1-e^{-1})+(1-e^{-2})+...+(1-e^{-n})} = \frac{\sum_{i=1}^{n} i(1-e^{-i})}{\sum_{i=1}^{n}(1-e^{-i})}$$

Pero, al comenzar las preguntas, cambia la solución en forma correcta.

E: En este problema la frecuencia relativa se da como sinónimo de probabilidad. Para el tiempo 1, la frecuencia es ($1-e^{-1}$); para el tiempo 2, la frecuencia es ($1-e^{-2}$), etcétera. Entonces, ¿cuál será el promedio?

A_1: Pues yo creo que será el tiempo por su frecuencia. La suma sería $1(1-e^{-1}) + 2(1-e^{-2}) +...+n\ (1-e^{-n})$ y así, hasta el último.

E: Eso es diferente a lo que respondiste en el cuestionario.

A_1: Sí, ya vi.

E: Entonces, ¿cuál será la forma general para calcular el promedio para este tipo de problemas donde se da la frecuencia?

A_1: Pues $\sum_{i=1}^{n} f_i(1-e^i)$, donde f_i es la frecuencia.

E: No, no es cierto. Bueno, para este problema sí, pero en general para todos los problemas sería la frecuencia por el elemento. La suma... $\sum_{i=1}^{n} F_i N_i$

Finalmente, en los problemas posteriores, A_1 relaciona las distintas maneras de calcular promedios, e incluso trata de explicar porqué se usa la integral para pasar de procesos discretos a continuos en el cálculo de promedios y valores esperados:

E: ¿Puedes explicar con más detalle la solución que diste?

A_1: El problema anterior tiene la peculiaridad de que a cada tiempo corresponde un valor de la función de probabilidad e^{-3t}. Por tanto, en un intervalo de longitud finita hay infinitos posibles valores de la función. Una manera de encontrar el promedio es a través de la integral definida, y el razonamiento es el siguiente:

Una aproximación al promedio se encuentra mediante la suma finita $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$, pero dividimos el intervalo en particiones iguales $\frac{b-a}{n} = \Delta x \rightarrow n = \frac{b-a}{\Delta x}$. La suma queda como $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{\Delta x}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$,

que en el límite, cuando $||P||\Rightarrow 0$, da: Promedio = $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

E: En tu explicación del uso de la integral, ¿porqué fue necesario dividir estos intervalos con la expresión $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

A_1: Lo que pasa es que ya no me acordaba. Primero lo intenté como siempre, con particiones regulares, pero no me salió; es decir, no pude expresar esto como la sumatoria de la función, la función evaluada en un punto del Δx y luego multiplicada por Δx. Como no quedó de esa forma, no pude pasar a la integral, y entonces la dividí en intervalos iguales y ya quedó. Por eso...

E: ¿Piensas que es necesario que aparezca el Δx para pasar a la integración?

A_1: ¿Para pasar a la integral? Pues sí, por la definición de integral es necesario tener la Δx

Dentro de sus explicaciones, A_1 llega a obtener una expresión en forma de una de las integrales de Laplace:

E: En este problema, el número de personas está dado por una función $F(t_1)$ y la probabilidad de llegada es $G(t_1)$, y así para los demás datos. Por lo que acabas de comentar hace un rato, ¿cómo calculas la cantidad promedio de personas que llega a la tienda en un intervalo de tiempo determinado?

A_1: Pues hay que multiplicar el número de personas por la frecuencia en ese tiempo y sumarlo así: $F(t_1)G(t_1)+ F(t_2)G(t_2)+\dots$ Bueno, en forma compacta, sería $\sum_{i=1}^{n} F(t_i)G(t_i)$

E: ¿Y si las expresiones que se dan son continuas?

A_1: Pues hay que pasar a la integral... La verdad, no me queda claro cómo, pero yo creo que debe quedar $\int_{t_0}^{t_f} F(t)G(t)dt$

E: ¿Qué son t_0 y t_f?

A_1: Si las funciones son continuas, hay que sacar el promedio en un intervalo desde t_0 hasta t_f.

E: Según lo que dices, ¿cómo se puede resolver el problema siguiente, donde la probabilidad es e^{kt}?

A_1: Es... e a la $\int_{t_0}^{t_f} F(t)e^{kt}dt$

E: Y los límites de integración ¿puede ser cualquier número?

A_1: Depende de qué queramos... Si quiero el promedio nada más entre un tiempo y otro...

E: Y para este caso, en que se dice que es en cualquier instante, ¿qué pasa con los límites de integración?

A_1: Hay que ponerlos en 0 (t_0), y este es el tiempo en el que queremos saber.

E: ¿Puede ser infinito?

A_1: Sí, yo creo que sí, pero quién sabe a qué tienda.

Observaciones

Como primera observación general, se encontró que la mayoría de los participantes entendió la forma de calcular promedios de datos no agrupados.

Sin embargo, no se esperaba que los datos presentados en forma agrupada por la frecuencia absoluta o relativa de cada uno les causara dificultades.

Esto pareciera confirmar las referencias aportadas por Mathews (1996), quien apunta que muchos estudiantes que terminan en forma reciente un curso de Probabilidad y Estadística muestran poca habilidad para calcular la media aritmética en ausencia de la fórmula respectiva.

En varios casos, se constató que los entrevistados tenían necesidad de sumar un conjunto de datos divididos entre alguna cantidad, pero generalmente no la sabían identificar o se les complicaba debido a que la división sería entre una infinidad de datos.

Otro dato importante residió en la diversidad de notaciones creadas por los participantes para modelar el promedio ponderado. Por ejemplo:

$\text{Promedio} = \dfrac{N_1 x_1 + N_2 x_2 + \ldots + N_n x_n}{N_1 + N_2 + \ldots + N_n}$	$\text{Promedio} = \dfrac{(x)(y) + (z)(m) + \ldots}{y + m + \ldots}$
$\text{Promedio} = \dfrac{vf}{n}$	$\text{Promedio} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (tpo)(frec)}{n}$

En esta variedad de notaciones no hay que soslayar el significado de la variable independiente, ya que juega un papel importante al pasar de lo discreto a lo continuo ($\sum \to \int_a^b$). La epistemología formulada en el estudio señaló que uno de los puntos importantes en la serie $\sum f(k)t^k$ es la variable *k*, ya que determina la variable de integración en la situación continua $\int_a^b f(x)t^x dx$.

La última observación es el haber percibido que algunos participantes tuvieron la idea de que el símbolo de suma $\sum$ se aplica en suma de datos discretos, y se intercambia por la integral definida $\int_a^b$ cuando las sumas se aplican sobre cantidades continuas. Para explicar su procedimiento, acudieron a la concepción de la integral a través de la sumas de Riemann. Esto resulta explicable, dado que en el medio escolar de Ingeniería las sumas de Riemann constituyen el recurso usual para enseñar la integral definida.

De esta manera, las respuestas de algunos participantes pudieron clasificarse en el nivel *trans*, ya que en ellas hubo argumentos para utilizar la integral donde había que sumar funciones continuas como la base de esos cálculos, así como algunas explicaciones de las estructuras que subyacen en el cálculo de promedios en situaciones donde se utilizó la integral en vez de las sumatorias infinitas, estableciendo los límites de integración.

Además, hubo dificultades sobre el significado de los procedimientos cuando se calculó el promedio con una cantidad finita o infinita de datos.

Finalmente, según las situaciones diseñadas, de alguna manera los participantes reconstruyeron significados a las integrales $\int_{t_0}^{t_f} F(t)e^{kt}dt$, $\int_a^b f(t)e^{kt}dt$, $\int_0^\infty t_n e^{-3t_n} dt$ y $\int_0^\infty te^{-kt}dt$. Este dato, en un sentido, ofrece indicadores acerca de la posibilidad de construir la integral de Laplace a través de las situaciones exploradas en este trabajo.

INDICADORES PARA UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LA TL

De acuerdo con la epistemología formulada y la exploración realizada en los cinco participantes, aparecen indicadores para orientar la descomposición genética, que consisten en los conceptos promedio y valor esperado, al igual que de la coordinación entre ellos, lo cual posibilite llevar a cabo la siguiente secuencia:

Promedio simple $\to$ Promedio de datos agrupados $\to$ Valores esperados discretos $\to$ Valores esperados continuos

Sin embargo, no debe ser entendida en forma lineal; depende del eje que ayude a establecer su coordinación, y aquí pudiera cumplir tal función los tres tipos de procedimientos que proveyó el análisis de la exploración:

Uno. La mayoría de los participantes mostró que podían recordar y aplicar la regla para calcular el promedio simple $\bar{x} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$, pero si había la necesidad de agrupar los datos mediante sus frecuencias relativas algunos no sabían cómo hacerlo, o bien, si recordaban la relación $\sum_{k=1}^{n} x_k f_k$ la aplicaban, mas dividiendo la suma anterior entre alguna cantidad.

Dos. El mismo procedimiento se detectó en algunos participantes cuando trataron de usar la expresión $\sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$. Muestra de ello puede verse en las expresiones siguientes:

$$\text{Promedio} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-e^{-t})t}{\sum_{i=1}^{n}}; \quad \text{Promedio} = F(t_1)G(t_1) + F(t_2)G(t_2) + \ldots = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} F(t_n)G(t_n)}{n}$$

Pareciera que, en ambos casos, cada vez que se accede a la secuencia el conocimiento es reorganizado a partir de la regla para el cálculo de promedios simples. Tal observación puede implicar que los participantes en realidad efectúan las siguientes etapas de construcción del conocimiento (véase Figura 1):

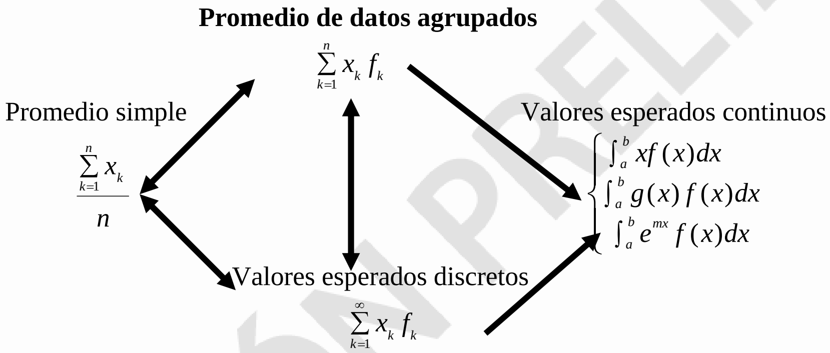
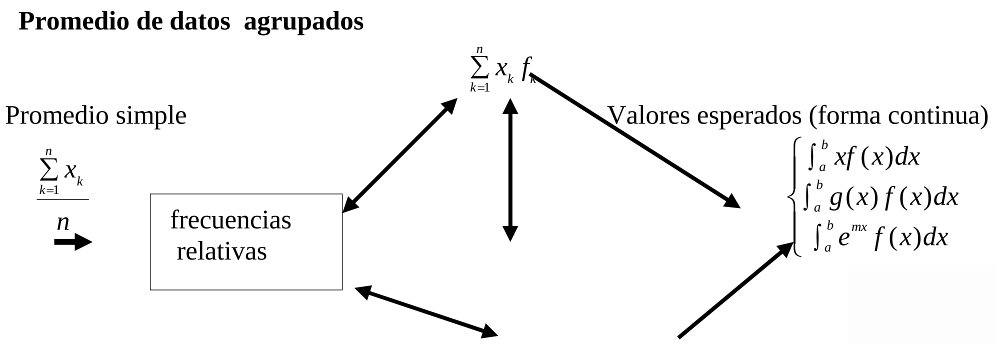


Figura 1

Tres. El uso de la integral en aquellos problemas donde el estudiante tendría que pasar de la expresión $\sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$ a la integral $\int_a^b xf(x)dx$ no resultó ser obstáculo para algunos participantes, puesto que recurrieron a la integral para resolver problemas de valores esperados con la idea de que la integral definida es la herramienta que permite remediar situaciones donde aparecen funciones continuas, mientras que las sumas infinitas solucionan problemas con funciones discretas, aunque la mayoría de las veces no supieron explicar porqué es así.

Adicionalmente, el análisis de datos indica que los participantes tuvieron problemas con las frecuencias relativas. La falta de compresión de este concepto originó formulaciones erróneas para el cálculo de promedios y valores esperados. Por tanto, se deberá añadir a las etapas de las construcciones anteriores una intermedia entre el promedio simple y los valores esperados, en la que la frecuencia relativa de los datos se relacione con los promedios (véase Figura 2):



Valores esperados (forma discreta)

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$$

Figura 2

Esta relación de construcciones compone una epistemología de la integral de Laplace, y pudiera ser la base de su descomposición genética.

Las etapas de construcción pudieran ayudar a coordinar las construcciones mentales necesarias para alcanzar un entendimiento de la integral de Laplace. A continuación, formulamos las siguientes etapas:

a) Las personas desarrollan un entendimiento de los procesos del cálculo de promedios simples (datos no agrupados)
b) Se analiza la forma de integrar los datos para obtener sus frecuencias relativas. Se relacionan las frecuencias relativas con la probabilidad de ocurrencia de un evento
c) Se formulan reglas para calcular promedios de conjuntos finitos de datos ponderados por su frecuencia relativa o probabilidad de ocurrencia
d) Los procesos anteriores deben ser generalizados a fin de calcular los promedios de conjuntos infinitos de datos
e) En otro nivel de entendimiento, se deberán asociar los procesos de sumas discretas infinitas de la forma $\sum_{k=0}^{\infty} f(x_k)g(x_k)$ en integrales definidas $\int_a^b f(x)g(x)dx$, donde $f(x)$ representa la probabilidad, y si se particulariza $f(x)=e^{kx}$, surge $\int_a^b g(x)e^{kx}dx$.

Sería tarea para un trabajo posterior construir una descomposición genética basada en la epistemología anterior y diseñar su implantación.

A MANERA DE CONCLUSIÓN

La investigación se planteó como objetivo principal encontrar las ideas y problemas que dieron origen y significado a la TL y, por ende, para implantar esa epistemología a los estudiantes se acudió a la teoría APOE.
Pero, por la naturaleza de dicho método, la descomposición genética está compuesta por construcciones mentales que hacen referencia a un concepto matemático. Esto obliga a considerar como marco de referencia del concepto los objetos y las relaciones que establecen. Sin embargo, de acuerdo con la epistemología formulada en el estudio, estos límites podrían ampliarse debido a que aparece una reconstrucción de significados que, a priori, no estaba en las definiciones de la TL. Se trató, por tanto, de ver la posibilidad de construir una descomposición genética basada en esa epistemología. Y el cuestionamiento consistió en que las etapas de construcción pudieran ser el eje que ayude a coordinar las diferentes colecciones de construcciones mentales que necesariamente se den.

Conforme se avanzó en el estudio epistemológico de la integral de Laplace, se llegó a la suposición de que uno de los caminos posibles para que un estudiante pueda construirla o entenderla sería por medio de algún modelo cognitivo (de ahí la descomposición genética), donde se consideren las sumas infinitas $\sum_{k=1}^{\infty} t^k f_k$ como una de las ideas para construir las integrales de la forma $\int_a^b t^x f(x)dx$.

Bajo tal consideración, se diseñó un conjunto de situaciones para explorar los diferentes niveles de desarrollo del conocimiento a través de la triada que los participantes llevaron a cabo para entender la integral de Laplace. Se tomó a los promedios como eje para dar significado a un conjunto de construcciones que debieran llevar a la integral mencionada.

En la actualidad, la TL se enseña a partir de la definición integral $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ como una expresión cuya aparición en el medio escolar no es explicada, pero en razón de los objetivos de este trabajo se encontraron otras maneras de definir esa integral sobre la base de sus aspectos epistemológicos. Tales motivaciones para la enseñanza podrían partir de varias ideas, siguiendo los caminos mencionadas en este trabajo (la de los factores integrantes, la de la generalización de las series de potencias a las integrales, la de las soluciones de ecuaciones mediante series y su generalización).

Habría que pensar si la vía para introducir la integral de Laplace por medio de promedios y de valores esperados es una buena elección en términos didácticos, ya que en el sistema escolar la TL se imparte por primera vez en los cursos de Ecuaciones Diferenciales. En este trabajo se eligió una posible alternativa para su enseñanza en contextos de probabilidad (o estadística).

Un aspecto relevante que esta investigación no consideró directamente es el estudio cognitivo acerca de lo que significa pasar de lo discreto a lo continuo.

También se puede decir que las dificultades para explicar la integral de Laplace se atribuyen a que en el sistema escolar la integración es construida solamente por la vía de las sumas de Riemann. En consecuencia, esto debería sugerir la posibilidad de incluir en el programa de estudios otras maneras de motivar la construcción de la integral definida. Existen trabajos con este acercamiento. Por ejemplo, en Czarnocha (1998) se discute dos maneras distintas en las que una persona puede llegar a intuir o entender la integral definida (las sumas de Riemann y el principio de Cavalieri), y a la vez están registradas en la historia como parte de las ideas que llevaron a la construcción de la integral definida.

Otra tarea más, posterior a este trabajo, será la exploración del entendimiento de la integral de Laplace de acuerdo con las construcciones proporcionadas por los factores de integración. En la actualidad, existe un trabajo, en Hernández (1998), donde se motiva la construcción de la integral de Laplace siguiendo la ruta de los factores integrantes, la cual consiste en la construcción de la TL bajo el argumento de multiplicar una ecuación diferencial por un factor exponencial para obtener indirectamente una variante de la integral de Laplace.

BIBLIOGRAFÍA

Abel, N. (1881). Sur les fonctions géneratrices et leurs déterminantes. Oewres. En G. Birkhoff (Ed.), *A source book in classical analysis*. Cambridge, USA: Harvard University Press.

Asiala, M., Devries, D., Brown, A., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education II*, 1-32.

Bateman, H. (1910). The solution of a system of differential equationes occurring in the theory of radiactive transformations. *Trans. Camb, Phil., Soc. 15*, 423-427.

Benitez, M. L. (1993). *Significación de los objetos matemáticos centrado en las ecuaciones diferenciales lineales de 2o. orden.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Berg, E. J.(1936). *Heaviside's operational calculus, as applied to engineering and physics* (2a. edición). New York, USA: Mc Graw-Hill.

Birkhoff, G. (1973). *A source book in classical analysis*. Cambridge, USA: Harvard University Press.

Boole, G. (1859). *A treatise on differential equations* (5a. ed). London, England: Chelsea Publishing Company.

Boyce, W. & DiPrima, R. (1990). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* (3a edición). México: Limusa-Noriega.

Braun, M. (1990). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Breidenbach, D.; Dubinsky, E.; Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the process conceptions of function. *Educational Studies in Mathematics*, 247-285.

Carslaw, H. S. (1928). Operational methods in mathematical physics. *The Mathematical Gazzete 14.*

Carson, J., (1926). *Electric circuit theory and the operational calculus* (1a. ed.). New York, USA: Mc

Graw Hill.

Clark, J. M.,; Cordero, F.; Cottrill. J.; Czarnocha, B.; DeVries, D.; Denny St., John; Tolias, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: the case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior 14* (4).

Cottrill, J.; Dubinsky, E.; Nichols, D.; Schwingendorf, K.; Thomas, K. & Vidakovic, D. Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema (in press). *Journal of Mathematical Behavior*.

Czarnocha, B.; Dubinsky, E.; Loch, S.; Prablau, V. & Vidakovic, D. (1998). Calculus students intuition of area an the definite integral: copping up or sdweeping out. *College Mathematics Journal*, march 2001.

Deakin, M. (1980). Euler's versión of the Laplace transform. *Am. Math. Monthly* 87.

Deakin, M. (1981). The development of the Laplace transform: 1737-1937. *Arch. Hist. Ex Sci. 25*.

Deakin, M. (1982). The development of the Laplace transform: 1737-1937. *Arch. Hist. Ex Sci. 26.*

Denis, M. & Papin (1969). *Matemáticas generales* (novena edición). Montaner y Simón (tomo II).

Derrick, G. (1981). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. México: Addison Wesley Iberoamericana.

Doetsch, G, (1943). *Theorie und anwendung der Laplace transformation*. New York, USA: Dover Publicationes (versión de la edición alemana de 1937).

Edwards & Penney (1986). *Ecuaciones diferenciales elementales, con aplicaciones*. México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Euler, L. (1769). *Institutiones calculi integralis* (vol. II).

Feller, W. (1985). *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones* (2a ed., volumen 2). México: Limusa.

Gardner, M. & Barnes, J. (1942). Transient on linear systems, studied by the Laplace transformation (vol. 1). London, England: John Willey & Sons.

García, P. & De la Lanza, C. (1984). *Ecuaciones diferenciales y en diferencias*. México: Limusa UNAM.

Gary, R. J. (1983). *Linear systems fundamentals*. New York, USA: Mc Graw Hill.

Harel, G. & Kaput, J. (1991). The role of conceptual entities and their symbols. In David Tall (Editor), *Building advanced mathematical concepts*. Mathematics Education Library, Kluwer Academic Pub.

Heaviside, O. (1925). On resistance and conductive operators and their derivatives, inductance and permittance, especially in connection with electric and magnetic energy. *Phil. Mag* (1887), 479 (recopilación en *Electrical papers* (vol. 2), The Copley Publishers, 355-358).

Hernández, A. (1998). La transformada exponencial: un puente entre los factores de integración y la transformada de Laplace. *Memorias del Noveno Seminario Nacional de Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática*.

Jeffreys, H. (1946). *Operational methods in mathematical physics* (3a. ed.). Cambridge, USA: Bertha Swirles (Reimpresión de un artículo de 1927).

Kamen, E. (1990). *Introducction to signals and systems* (2a. ed.). USA: Mc Millan.

Kaplan, W. (1972). *Cálculo avanzado*. México: Cecsa.

Kolmogórov, A. N. & Fomin, S. V. (1975). *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*

(2a. ed.). Móscú, Rusia: Mir.

Koroliuk, V. (1981). *Manual de la teoría de probabilidades y estadística matemática*. Móscú, Rusia: Mir.

Laplace, P. (1812). *Théorie analytique des probabilités*. Paris. France: M. V. Courcier, Imprimeur Libraire pour les mathématiques.

Laplace, P. (1988). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades* (traducción de Pilar Castillo). México: Alianza Editorial.

Mathews, D. (1996). "Successful students'. Conceptions of mean, standard deviation, and the central limit theorem".

Mc Lachlan, N. W. (1962). *Modern operational calculus*. Dover, USA (edición de 1948).

Miranda, E. (2001). *Entendimiento de la transformada de Laplace. Caso de una descomposición genética*. Tesis doctoral, Cinvestav, México.

O'Neil, P. (1994). *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (3a. edición, volumen 1). México: Cecsa.

Ogata, K. (1970). *Ingeniería de control moderna*. México: Prentice Hall.

Poincaré, H. (1885). Sur les equations lineaires ordinaires et aux differences finies. *Am. Journal of Math VII*, 218-221.

Shtokalo, I. Z. (1976). *Operational calculus*. Elmsford, New York, USA: Pergamon Press Inc.

Sierpinska A. (1996). Problems related to the design of the teaching and learning process in linear algebra. *Research Conference in Collegiate Mathematics Education*. Michigan: USA: Central Michigan University.

Simmons, G. (1993). *Ecuaciones diferenciales, con aplicaciones y notas históricas* (2a. ed.). México: Mc Graw Hill.

Spiegel, M. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas.* México: Prentice Hall Hisp.

Widder, D. V. (1929). A generalization of Dirichlet's series and of Laplace's integrals by means of a stieltjes integral. *Trans Amer Soc 31*, 694.

Widder, D. V. (1947). *Advanced calculus*. USA: Prentice Hall.

Ziemer, R. E.; Tranter, W. & Fannin, R. (1993). *Signals and systems: continous and discrete* (3a. ed). USA: Mc Millan.

Zill, D. (1986). *A first course in differential equations with applications* (3a. ed.). USA: PWS-Kent.

ANEXO

Situación 1 *A*
La integral definida: Relaciones entre lo discreto y lo continuo.
Categoría: sumas de productos (promedios)

Concepciones: promedios, frecuencias relativas, sumas infinitas.

Niveles:
- Procesos finitos
- Procesos infinitos

Nivel 1: Procesos finitos

- Observaciones en la entrevista: Se deberá poner atención a la
- Identificación de las distintas formas de representar un mismo problema

1. Calcula el promedio de los números 2, 3, 4 y 5 si se repiten 5, 10, 30 y 25 veces, respectivamente.
1.1 Una persona dispone de cierto capital para invertir. Un analista le propone invertir en acciones. Tiene una probabilidad de 0.7 de ganar $ 4000, pero también un 0.3 de perder $1000. Determina la cantidad promedio que espera ganar esta persona.
1.2 Da una formulación general para el cálculo de promedios. Explícala.

Nivel 2: Procesos infinitos
Observaciones de la entrevista: En este caso, se deberá identificar en la persona:
- El uso de los operadores $\sum$ y $\int_a^b$ como formas de sintetizar procesos de sumas infinitas

2 La siguiente tabla muestra los tiempos que dura un cliente en ser atendido y la probabilidad de que esto suceda:

Tiempo					..	...
Probabilidad	$-e^{-1}$	$-e^{-2}$	$-e^{-3}$	$-e^{-4}$	..	...

¿Cómo calcularías el tiempo promedio que dura un cliente en ser atendido?
2.1 Se ha encontrado que la probabilidad de que un foco dure más de 100 horas está dada por $f(t) = e^{-3t}$. Determina la duración esperada de los focos.

2.2 Da una formulación al problema de hallar promedios en situaciones como los anteriores.

Situación 1B
La integral definida: Relaciones entre lo discreto y lo continuo.
Categoría: sumas de productos (valores esperados)

Concepciones: promedios, frecuencias relativas, sumas infinitas.

Nivel: Procesos infinitos
Observaciones: Para la entrevista, se tratará de identificar:

- Patrones de comportamiento
- Explicaciones sobre las posibilidades de intercambiar sumas infinitas por integrales

3. En un supermercado se ha determinado que el número de personas [$F(t_k)$], que llega al local en un

instante $-t_k$, en horas– tiene probabilidades dadas por la siguiente tabla:

No. de personas	(t_1)	F (t_2)	F (t_3)	F (t_4)	....
Probabilidad	(t_1)	G (t_2)	G (t_3)	G (t_4)	....

Determina la forma de calcular la cantidad promedio de personas que llega a la tienda en un tiempo determinado.

3.1 La probabilidad de que un número $f(t)$ de personas llegue al mercado es $g(t) = e^{kt}$, donde k es un parámetro que depende de la hora y el día de la semana. Estima la manera de calcular el número promedio de personas que llega en cualquier instante.