

Los modelos mentales que subyacen a la resolución de problemas algebraicos: un estudio transversal*

Inés Elichiribehety*
María Rita Otero*
María de los Ángeles Fanaro*

RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio transversal, desde una perspectiva cognitiva, acerca de los marcos de resolución que utilizan ($N = 264$) sujetos enfrentados a dos problemas matemáticos en el ámbito escolar. Para explicar el funcionamiento cognitivo de los sujetos, con relación a las representaciones que usan para razonar y al modo en que lo hacen, se emplea como referencial, la Teoría de los Modelos Mentales Johnson-Laird (1983, 1990a, 1990b, 1996). Se describen las resoluciones aritméticas y algebraicas realizadas por los sujetos de acuerdo con el año escolar al que pertenecen; que se interpretan como la ejecución de modelos mentales vinculados a cada uno de esos marcos. Los resultados muestran que un porcentaje elevado de sujetos de cada año escolar construye modelos mentales para comprender y resolver los problemas planteados.

ABSTRACT

In this paper a transversal study is presented, from a cognitive outlook, about the solving frameworks used by ($N=264$) students faced to two mathematical problems at school. Johnson-Laird's Theory of Mental Models (1983,1990a, 1990b, 1996) is used as a reference, to explain students' cognitive operation with relation to the representations they use and the way they do it. The arithmetic and algebraic solutions carried out by students according to the level they belong are described. They are interpreted as the performance of mental models linked to each of those frameworks. The results show that a high percentage of students of each level build mental models to understand and solve the problems posed.

RÉSUMÉ

Dans ce travail on présente un étude transversal a partir d'une perspective cognitive sur les cadres de résolution que les étudiants ($N=264$) utilisent face à deux problèmes mathématiques dans l'ambiance écolier. Pour expliquer le fonctionnement cognitif des étudiants, en rapport aux représentations qu'ils utilisent pour raisonner et la façon dont ils le font, on emploie comme référence la Théorie des Modèles Mentals Johnson-Laird (1983,1990a,1990b,1996). On décrit les résolutions arithmétiques et algébriques que les étudiants réalisent, selon l'année écolier dont il appartient, et on interprète comme l'exécution des modèles mentals rapporté à chacun de ces cadres. Les résultats montrent q'un pourcentage très haut d'étudiants de chaque année écolier construisent des modèles mentals pour comprendre et résoudre les problèmes que l'on pose.

RESUMO

Apresenta-se um estudo transversal, fundamentado numa perspectiva cognitiva, sobre os padrões de resolução de problemas que ($N=264$) sujeitos utilizam quando apresentados a dois problemas matemáticos no âmbito escolar. Para explicar o funcionamento cognitivo dos sujeitos, com relação às representações que utilizam para raciocinar e ao modo como o fazem, emprega-se como referencial a Teoria dos Modelos Mentais de Johnson-Laird (1983, 1990a, 1990b, 1996). As resoluções aritméticas e algébricas realizadas pelos sujeitos são descritas conforme a série escolar que frequentam e interpretadas como a execução de modelos mentais vinculados a cada um desses padrões. Os resultados evidenciam

* Fecha de Recepción: Noviembre de 2001

* GIEG (Grupo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias). Departamento de Formación Docente. Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

* Becaria de la Comisión de Investigaciones Científica de la Provincia de Buenos Aires (CIC)

que uma porcentagem elevada de sujeitos de cada série escolar constroem modelos mentais para compreender e resolver os problemas propostos.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo presentamos un estudio transversal, desde una perspectiva cognitiva, acerca de los marcos de resolución que utilizan sujetos enfrentados a dos problemas matemáticos en el ámbito escolar. Los modos de resolución son las manifestaciones externas de las representaciones internas (mentales) que las personas construyen para razonar. Las características de las representaciones externas que se emplean para favorecer el proceso de comprensión y, en consecuencia, la construcción de representaciones mentales adecuadas, serían aspectos relevantes que es preciso considerar. Una formulación rigurosa para explicar el funcionamiento cognitivo humano, con relación a las representaciones que usamos para razonar y al modo en que lo hacemos, es la Teoría de los Modelos Mentales para el razonamiento de Johnson-Laird (1983, 1990a, 1999b, 1996).

La pertinencia y potencialidad de esta teoría para la investigación en enseñanza de las ciencias ha sido establecida por trabajos pioneros en este campo (Greca, 1995; Greca y Moreira, 1996a, 1996b; Moreira, 1998; Greca y Mallmann, 1997; Greca y Moreira, 1998; Moreira y Lagreca, 1998; Greca y Moreira, 2000; Greca y Herscovitz, 2000) y por otros que les sucedieron adoptando el mismo referencial (Otero, 1998; Otero y Banks Leite, 1998; Rodríguez Palmero, 2000). En particular, este trabajo continúa el iniciado por Otero (1998a, 1998b, 1998c) en el área de Matemática, que realiza una investigación con el objeto de identificar modelos mentales en la resolución de problemas a lo largo de toda la escolaridad media.

Las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escolaridad obligatoria están lejos de ser resueltas; por esta razón ha sido necesario buscar nuevos referentes teóricos para dar cuenta de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra en la escuela media. Nos interesa analizar las representaciones que usan los sujetos para razonar y el modo en que lo hacen, cuando tienen que resolver dos problemas que usualmente se emplean en el ámbito escolar.

De acuerdo con la Teoría de los Modelos Mentales de Johnson-Laird (1983), comprender el enunciado de un problema y resolverlo efectuando inferencias, supone la construcción de un tipo particular de representación mental, que se denomina modelo mental. Según Johnson-Laird, las personas utilizan modelos mentales para razonar. *"Un modelo mental es una representación interna de informaciones que corresponde, análogamente, al estado de cosas que se están representando, sea cual sea el mismo. Los modelos mentales son análogos estructurales del mundo"* (Moreira, 1999 p. 7).

Los modelos mentales del mundo pueden ser construidos como producto de la percepción, del discurso, de la interacción social y de la experiencia interna manifestada en la habilidad del sujeto para construir modelos a partir de sus componentes primitivos, o de modelos análogos que ya poseía. Por lo tanto, todo nuestro conocimiento del mundo dependería de nuestra capacidad de construir modelos mentales. Las restricciones para la construcción de esos modelos derivan de cómo concebimos la estructura del mundo, de las relaciones conceptuales que gobiernan la ontología de lo real y de la necesidad de mantener el sistema libre de contradicciones (Johnson-Laird, 1983, p. 430).

Como se ha señalado: *"Johnson-Laird construye su teoría postulando un modo análogo de razonar, en oposición a la utilización de proposiciones y reglas de inferencia. El constructo Modelo Mental, es consubstancial a este modo de razonamiento. Al corroborar empíricamente las predicciones realizadas, Johnson-Laird establece la existencia de Modelos Mentales como representaciones mentales diferenciadas estructural y funcionalmente de las proposiciones e*

imágenes" Otero (1999).

Cuando una persona comprende un suceso real o un evento discursivo, es capaz de construir una representación mental significativa, sólo si tiene un conocimiento más general de esos acontecimientos. En términos de Piaget, diríamos que la comprensión depende del marco asimilador que posea el sujeto y en términos de Ausubel, afirmamos que dependerá de la presencia de los subsumidores necesarios en su estructura cognitiva.

Quien comprende el enunciado de un problema, lo hace con base en informaciones, percepciones y representaciones vinculadas al hecho en sí, al contexto o situación en la que el suceso tiene lugar y a lo que podríamos denominar presupuestos cognitivos personales con relación al problema, que dirigen la recuperación de representaciones de la memoria para construir un modelo mental de la situación (Van Dijk, 1992). Sin embargo, los modelos mentales y las representaciones que se construyen como parte del proceso de comprensión, no son necesariamente los más adecuados. En cualquier caso, dichos modelos influyen sobre las conceptualizaciones posteriores y sobre las representaciones internas y externas generadas a partir de ellos. En particular, influyen sobre los Marcos de Resolución en los que se expresa la solución del problema.

Para esta investigación se utilizaron problemas precedidos por diferentes estudios exploratorios. El primero pertenece a una serie de tres, utilizados para indagar si los parámetros en una ecuación funcionan como variable didáctica (Elichiribehety et al., 1995) y, en consecuencia, provocan la necesidad de procedimientos algebraicos en la resolución de problemas.

El segundo fue abordado por Otero (1998a, 1998b, 1998c), quien realizó un estudio cognitivo dirigido a mostrar que los alumnos encuentran modos de resolución que pueden ser explicados a partir de la Teoría de los Modelos Mentales Johnson-Laird (1983, 1990a, 1990b, 1996). *"En un estudio transversal acerca de los modelos ejecutados desde los 12 hasta los 18 años en la resolución de un problema complejo, encontramos que los sujetos evalúan el modelo para un set dado de valores, parten siempre de un ejemplo particular que reúne las características del modelo, es decir el pensamiento basado en modelos maneja lo general como si fuera particular"* (Otero, 1999). También identificó modelos correspondientes a los marcos aritméticos y algebraicos, encontrándose que aparecen en todo el rango de la escolaridad media. Estos trabajos exploratorios posibilitaron seleccionar los problemas, reconocer los modelos mentales vinculados a las estrategias de resolución y contribuir al marco teórico para la enseñanza-aprendizaje del álgebra en el ámbito escolar.

Presentamos resultados de las estrategias de resolución y de los modelos mentales que inferimos están ligados a ellas, de acuerdo con el año escolar al que pertenecen los sujetos en una población de $N = 264$, correspondientes a tres escuelas de la ciudad de Tandil. El rango de edad es de 13 a 18 años.

2. PREGUNTAS DE LA INVESTIGACIÓN

1. ¿Pueden inferirse las características de los modelos mentales que ejecutan los sujetos de cada año escolar para resolver cada problema?
2. ¿A qué marcos de resolución se vinculan tales modelos según el año escolar?

3. METODOLOGÍA Y DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Diseñamos un estudio transversal que abarca los cinco años que

corresponden a la escuela media en el Sistema Educativo Argentino. Se solicitó a todos los alumnos, entre otras tareas, que resolvieran dos problemas en forma individual y anónima.

Se escogieron tres escuelas del radio céntrico de la ciudad de Tandil que tienen dos y tres turnos, en las cuales funcionan todos los niveles de la escolaridad. En la elección nos interesó que los cinco años funcionaran en la misma dependencia, que los establecimientos tuvieran tradición escolar y fuesen numerosos y abiertos a los diferentes segmentos sociales. Se seleccionaron al azar tres divisiones de cada año y siete sujetos de cada una sin tener en cuenta su desempeño en Matemática. En el momento de la selección los alumnos cursaban el tercer trimestre. De esta manera se constituyó una población efectiva de $N = 264$ sujetos que abordarían varias actividades; la presentación actual es una de ellas. Los alumnos recibieron los dos problemas que se muestran a continuación con la indicación siguiente.

"Explica cómo resuelves el problema y deja todas tus cuentas e intentos de solución en la hoja, no te preocupes por la prolijidad. Nos interesa todo tu razonamiento, aun cuando creas que no está correcto."

Problema 1:

"Pablo tenía 30 varillas todas iguales (no sabemos la longitud). Javier tenía 40 varillas también todas iguales y cada una medía 4 metros más que las de Pablo. Poniendo una

Problema 2:

"Se desea ubicar un grupo de alumnos en aulas: Si se distribuyen 40 alumnos por aula quedan 25 y si se ubican 42 por aula queda un alumno sin ubicar. Calcular el número de alumnos y de aulas que se dispone."

4. FORMULACIÓN Y DESCRIPCIÓN DE CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Una vez obtenidos los registros, realizamos un primer análisis para clasificar los $N = 264$ protocolos disponibles. Se definieron las siguientes categorías y sus respectivas subcategorías:

CANTIDAD DE PROBLEMAS ABORDADOS	NING: (No aborda ninguno)
	SÓLO P1: (Aborda sólo el Problema 1)
	SÓLO P2: (Aborda sólo el Problema 2)
	RDOS: (Aborda los dos Problemas)
MARCOS DE RESOLUCIÓN	ARIT: (Resuelve sólo en el marco aritmético)
	ALGE: (Resuelve sólo en el marco algebraico)
	AMBOS: (Resuelve en el marco aritmético y en el algebraico)
RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DEL PROBLEMA 1	NING: (No resuelve en ningún marco)
	SFE1: (Formulan la ecuación pero no operan)
	OCE1: (Operan con ecuaciones mal formuladas)
	FEO1: (Formulan y operan la ecuación de manera correcta)
RESOLUCIÓN	VER1: (Vinculan escasas relaciones del problema)
	DIV1: (Eligen la división para resolver el problema)
	RAUM1: (Reducen a la unidad mal)

		ALGO1: (Usan el enunciado para buscar algún algoritmo)
		RAUB1: (Reducen a la unidad para encontrar el resultado correcto)
RESOLUCIÓN ALGEBRAICA PROBLEMA 2	DEL	SFE2: (Formulan la ecuación pero no operan)
		OCE2: (Operan con ecuaciones mal formuladas)
		FEO2: (Formulan y operan la ecuación de manera correcta)
RESOLUCIÓN ARITMÉTICA PROBLEMA 2	DEL	VER2: (Vinculan escasas relaciones del problema)
		REP2: (Resta recursiva)
		RMT2: (Resuelven mediante dos tablas)
		ANA2: (Modelo de Ana)

Tabla 1

5. PRESENTACIÓN Y DISCUSIÓN DE DATOS

a. Cantidad de Problemas Abordados

La categoría *Cantidad de Problemas Abordados* se registra con el objetivo de conocer cuántos problemas intentaron resolver los sujetos. Esta categoría no se vincula con las estrategias de resolución; tampoco si son o no correctos los resultados que obtienen los sujetos. Sólo interesa si intentan abordar ninguno, uno, o los dos problemas.

Se clasificaron cuatro subcategorías: *No Aborda Ninguno* (NING), *Aborda sólo el Problema 1* (SÓLO P1), *Aborda sólo el Problema 2* (SÓLO P2) y *Abordan los dos Problemas* (ADOS). El gráfico 1 desagrega los resultados obtenidos para cada año escolar al que pertenecen los sujetos. Los porcentajes que aparecen en este gráfico asignan el 100% al total de sujetos pertenecientes a cada año escolar considerado.

INSERTAR "GRÁFICO 1"

Los resultados muestran que la subcategoría *No Aborda Ninguno* (NING) de los dos problemas, se registra en toda la escolaridad. Los bajos porcentajes se encuentran en Octavo y Noveno Año y aumentan considerablemente en Primero, Segundo Polimodal y Quinto Año. En este último, es elevado el número de sujetos que no resuelve ningún problema.

La subcategoría *Aborda sólo el Problema 1* (SÓLO P1) también se presenta en toda la escolaridad, el porcentaje es alto en Primero Polimodal y apenas inferior en Segundo Polimodal. Los bajos porcentajes se encuentran en Octavo, Noveno y Quinto Año.

La subcategoría *Aborda sólo el problema 2* (SÓLO P2) registra porcentajes muy bajos en Octavo, Primero Polimodal y Quinto Año.

La subcategoría *Abordan los dos Problemas* (ADOS) registra porcentajes elevados en todos los años. Independientemente de que las resoluciones sean o no correctas, los datos estarían indicando que los sujetos construyen algún modelo mental para representar y dar significado al discurso. Los indicadores más altos se presentan en Octavo y Noveno Año, seguidos por Quinto, Segundo y por Primer Año Polimodal, respectivamente.

Son muchos más, los sujetos que abordan los dos problemas en Octavo y Noveno Año, que en los años restantes. El origen de estos resultados, se debería a que los más pequeños están impedidos de buscar relaciones con los contenidos escolares que aún no poseen y utilizan la estrategia que tienen disponible. En cambio, los sujetos de mayor edad probablemente consideran que las estrategias de resolución de los problemas están

vinculadas con contenidos escolares. Como no pueden actualizarlas exitosamente optan por no exteriorizar la resolución en ningún marco.

b. Marcos de Resolución

Se establece la categoría *Marcos de Resolución* con el objetivo de describir a qué modelos mentales responderían los marcos de resolución que ejecutan los sujetos para ambos problemas. De acuerdo con los protocolos registrados se clasificaron cuatro subcategorías: *Resuelve sólo en el Marco Aritmético (ARIT)*, *Resuelve sólo en el Marco Algebraico (ALGE)*, *Resuelve en Ambos Marcos (AMBOS)* y *No resuelve en Ningún Marco (NING)*.

El análisis que se realiza en esta instancia es clasificar a los sujetos de acuerdo con el marco que utilizan para resolver los problemas. La modalidad *Resuelve sólo en el Marco Aritmético (ARIT)* identifica a los sujetos que intentan solamente este marco representacional. La subcategoría *Resuelve sólo en el Marco Algebraico (ALGE)* reconoce a los sujetos que intentan únicamente este marco de resolución.

La subcategoría *Ambos Marcos (AMBOS)* caracteriza a los sujetos que utilizan un marco distinto para cada problema. Son pocos los casos que emplean más de un marco representacional para el mismo problema. Sólo se han encontrado algunas producciones icónicas y/o verbales que en su mayoría acompañan al desarrollo aritmético, por esta razón las clasificamos dentro del Marco Aritmético. El gráfico 2 desagrega los resultados correspondientes a la categoría *Marcos de Resolución*; según el año escolar. Los porcentajes que aparecen en este gráfico corresponden al total de los sujetos pertenecientes a cada año escolar considerado.

INSERTAR " GRÁFICO 2"

Tanto el marco aritmético como el algebraico están presentes en toda la escolaridad. El marco aritmético prevalece en Octavo, Noveno y Segundo Año Polimodal sobre el marco algebraico. En Primer Año Polimodal no se encuentra una marcada diferencia entre ambos marcos y sólo en Quinto Año predomina el marco algebraico sobre el aritmético.

Entre puntas, los resultados indicarían que el marco aritmético desciende "en favor de" un incremento del marco algebraico cuando se consideran ambos problemas. Esta tendencia se interrumpe sólo en Segundo Año de Polimodal, en el que se advierte una paridad con los resultados de Octavo Año, tanto en el marco aritmético como en el algebraico.

Los datos mostrarían que a lo largo de la escolaridad no se encuentra el predominio de un solo marco. Sería deseable que el marco algebraico tuviera una frecuencia cada vez mayor en el transcurso de la enseñanza obligatoria, porque constituye un saber de enorme relevancia en la sociedad del conocimiento. La importancia de este saber justifica su inclusión como contenido escolar. Lamentablemente, la utilización del marco algebraico no es espontánea ni inmediata porque requiere de modelos mentales muy complejos para traducir el enunciado y expresar algebraicamente las relaciones de los problemas.

La subcategoría *No resuelve en ningún marco (NING)*, se encuentra en toda la escolaridad. Los menores porcentajes corresponden a Octavo y Noveno Año y aumentan en forma considerable en los cursos superiores.

Los datos estarían indicando que la mayoría de los sujetos, independientemente de la edad, emplean distintas estrategias cognitivas para resolver los problemas. Utilizar una estrategia determinada implica que el estudiante la tiene a su disposición, aunque la recíproca no es cierta. Se quiere destacar que los sujetos pueden hacer bastante más de lo que como

profesores solemos suponer. El marco de resolución que acaba siendo adoptado se vincularía con los modelos mentales que cada uno es capaz de construir. Es decir, con las estrategias de comprensión del discurso y con la capacidad de sostener más de un modelo en la memoria de trabajo.

El procesamiento del discurso es un proceso de naturaleza **estratégica**, en el cual una representación mental en la memoria es construida a partir de representaciones internas y externas con el objeto de interpretar y entender el discurso de otro. Los **procesos estratégicos**, como el proceso de comprensión del enunciado de los problemas, no tienen garantía de éxito ni proporcionan una representación única del texto; las estrategias aplicadas son como hipótesis operacionales eficaces acerca de la estructura y significado del discurso y pueden ser señaladas como incorrectas en procesos posteriores (Van Dijk, 1992, p. 23). Cuando además de comprender el discurso se pretende que se produzca una formulación en lenguaje algebraico y se resuelva el problema, la dificultad para los sujetos crece considerablemente.

6. DESCRIPCIÓN DE LOS RESULTADOS PARA CADA PROBLEMA

Los gráficos 3 y 4 representan porcentualmente la cantidad de resoluciones algebraicas, aritméticas y la ausencia de respuesta en cada año escolar para cada problema. Con relación a esta última posibilidad, es notable la diferencia encontrada entre el primero y el segundo de los problemas.

Para Octavo y Noveno Año la ausencia de respuesta en el segundo problema es mayor que la correspondiente al primer problema y asciende a porcentajes elevados en los tres últimos años. Estos resultados revelan que el segundo problema presenta mayor dificultad para los sujetos. Es sorprendente, al menos a primera vista, que estudiantes de cursos superiores se inhiban más de responder. ¿Cómo podría explicarse que quienes tienen mayor "capacidad cognitiva" y más tiempo de escolarización sean a la vez quienes parecen encontrarse en peores condiciones para resolver los problemas?

INSERTAR " GRÁFICO 3 "

INSERTAR " GRÁFICO 4"

Una respuesta hipotética a la pregunta anterior, se relaciona con el hecho de que cuando los sujetos de cursos superiores resuelven, lo hacen exitosamente, cualquiera que sea el marco. Estos resultados se analizarán a partir de la sección 6.1.

Probablemente los que no responden intentan vincular estrictamente la respuesta a los problemas con los conocimientos escolares. Como no encuentran la relación buscada y no consiguen actualizar los contenidos requeridos, que sí han sido abordados en algún momento de la escolaridad como se prescribe en el currículo y en estudios de esta misma investigación que están siendo procesados, estos sujetos optan por no responder para no correr el riesgo de equivocarse. A veces los alumnos consideran que una *"respuesta matemática requiere de fórmulas"* (Otero, 1998). Esto también se observa en nuestro trabajo, por ejemplo en el protocolo A7(18:V). Los sujetos más pequeños, y por lo tanto menos influenciados por el "cuerpo teórico" residual de la instrucción, intentarían resolver "a su aire", sin considerar las interferencias de estas informaciones contextuales.

En Octavo Año predomina el marco aritmético sobre el algebraico para ambos problemas. Son pocos los sujetos que consiguen construir modelos mentales para el problema de las varillas en el marco aritmético. Los que optan por el marco algebraico logran modelos funcionales de la situación. Para el problema de las aulas muy pocos optan por el marco algebraico. En su mayoría eligen el marco aritmético con modelos apropiados para encontrar la

solución.

Para Noveno Año predomina el marco algebraico en el problema de las varillas. Son pocos los sujetos que logran modelos adecuados. En el marco aritmético no consiguen construir modelos mentales apropiados para encontrar la solución al problema. En cambio, para el problema de las aulas los sujetos adoptan en su mayoría y con éxito el marco aritmético. Si bien son muy pocos los que resuelven algebraicamente, éstos consiguen formular y operar la ecuación de manera correcta.

En Primer Año Polimodal para el problema de las varillas, los resultados muestran que prevalece el marco algebraico sobre el aritmético. Son pocos los sujetos que construyen modelos mentales adecuados en ambos marcos. Para el problema de las aulas, los escasos sujetos que resuelven logran construir modelos mentales adecuados del problema.

Para Segundo Año Polimodal el marco aritmético prevalece sobre el algebraico en ambos problemas. En el problema de las varillas, los resultados muestran la construcción de modelos mentales apropiados tanto en el marco aritmético como algebraico. Si bien son muy pocos los sujetos que abordan el problema de las aulas, los que lo hacen en el marco algebraico, formulan y operan la ecuación de manera correcta. Quienes adoptan el marco aritmético, también elaboran modelos adecuados para este problema.

Los intentos de resolución de los sujetos de Quinto Año se producen mayoritariamente en el marco algebraico para ambos problemas. Son pocos los sujetos que abordan el primer problema usando el marco aritmético; es destacable que lo hacen con éxito. Los porcentajes más elevados de no respuesta para el primer problema pertenecen a los sujetos de Quinto Año. Quienes responden el problema de las aulas, tanto en el marco algebraico como aritmético, construyen modelos mentales apropiados para explicar las relaciones del problema.

Para responder las cuestiones planteadas en este estudio transversal, se analizaron los problemas por separado y de acuerdo con el marco utilizado. Se construyeron cuatro categorías: *Resolución Aritmética del Problema 1*, *Resolución Algebraica del Problema 1*, *Resolución Algebraica del Problema 2* y *Resolución Aritmética del Problema 2*. Presentamos a continuación las respuestas discriminadas para cada problema de acuerdo con las subcategorías señaladas.

6.1 Resolución Aritmética del Problema 1 (RAR1)

Para esta categoría definimos cinco subcategorías para el primer problema: *Vinculan Escasas Relaciones del problema* (VER1), *Eligen la división para resolver el problema* (DIV1), *Reducen a la unidad mal* (RAUM1), *Usan el enunciado para buscar algún algoritmo* (ALGO1) y *Reducen a la unidad para encontrar el resultado correcto* (RAUB1).

El gráfico 5 describe la categoría *Resolución Aritmética del Problema 1 (RAR1)* con sus respectivas subcategorías de acuerdo con el año escolar al que pertenecen los sujetos indagados. Las cantidades que aparecen debajo de cada año escolar en el eje horizontal indican el número de sujetos que abordan el problema de las varillas utilizando el marco aritmético. El eje vertical señala la cantidad de sujetos clasificados en cada subcategoría.

INSERTAR " GRÁFICO 5"

Son muy pocos los sujetos de Quinto Año que abordan el primer problema en el marco aritmético, mientras que la mitad de los sujetos pertenecientes a Segundo Año Polimodal optan por este marco. También es importante la cantidad de sujetos de Octavo y Noveno que eligen el marco aritmético; disminuyendo en Primero Polimodal.

A partir del gráfico se observa que la subcategoría *Vinculan escasas relaciones del problema* (VER1) se presenta en toda la escolaridad. Esta subcategoría identifica a los sujetos que realizan operaciones de manera confusa, indicando que comprenden parcialmente el enunciado y estructura del problema. La subcategoría (VER1) reconoce un modelo mental muy precario o limitado; porque los sujetos relacionan sólo algunos elementos del problema. Esta categoría se ejemplifica con el protocolo de A1(13:8)¹, quien asigna la medida de 4 metros a las varillas de Pablo y 8 metros a las de Javier. La única relación que el protocolo permite inferir es que las varillas de Javier miden 4 metros más que las de Pablo. Sin embargo, como consideramos que presenciábamos algún proceso comprensivo, se decidió considerarlo un modelo mental.

Insertar "FIGURA 1"

La subcategoría *Eligen la división para resolver el problema* (DIV1) se presenta en toda la escolaridad. La estrategia, de elegir la división, es característica de Octavo, Noveno y Primer Año Polimodal. Estos sujetos no pueden implementar la relación de diferencia entre las longitudes de las varillas, y su estrategia se basa en realizar una división. La subcategoría describe a quienes hacen una división para comenzar a resolver, consideran la longitud total (1000 m) y luego dividen: algunos por el total de varillas (70), como se observa en A2(17:I); otros, por las varillas de Javier (40), como en el caso de A3(18:II). Al resolver no tienen en cuenta la diferencia entre ambas varillas, sólo al expresar el resultado. Esta subcategoría permite inferir una evolución en la complejidad de los modelos mentales que ejecutan los sujetos.

A continuación se presentan dos protocolos correspondientes a esta subcategoría. Es destacable que el trabajo de A2(17:I) se encuentra entre las escasas producciones que utilizan diferentes marcos de resolución: verbal, pictórico y aritmético para un mismo problema. Cabe señalar que en ningún caso se encontraron resoluciones en el marco geométrico. En este estudio, algunos sujetos emplearon el marco aritmético para un problema y el marco algebraico para el otro, pero no producciones mixtas para un mismo problema. El uso simultáneo de más de un marco es una característica de los "expertos", que debería propiciarse en el ámbito escolar.

Insertar "FIGURA 2"

Insertar "FIGURA 3"

En orden de complejidad creciente, se registra un tercer modelo basado en la consideración de la diferencia entre las medidas de las varillas y en la estrategia de reducción a la unidad. Se ha diferenciado en las subcategorías *Reducen a la unidad mal* (RAUM1) y *Reducen a la unidad y encuentran el resultado correcto* (RAUB1). En estos casos, los sujetos multiplican 4 m x 40 y restan el valor que resulta de la longitud total.

La subcategoría RAUM1 presente sólo en Noveno Año, se caracteriza por constituir una versión fallida de la estrategia de reducción a la unidad, porque los sujetos dividen por la cantidad de varillas de Pablo (30) en lugar de dividir por (70). El protocolo de A4(15:9) evidencia la ejecución de un modelo mental incompleto característico de quienes no pueden establecer todas las relaciones del problema. El modelo identificado con la subcategoría RAUM1, es similar al modelo construido por los sujetos clasificados en la subcategoría *Operan con ecuaciones mal formuladas* (OCE1). Como se observará en A11(15:9), las estrategias son las mismas, sólo cambia el marco utilizado.

Insertar "FIGURA 4"

También se encuentra en toda la escolaridad la subcategoría *Usan el enunciado para buscar*

¹ Se designa a los sujetos con las siglas A1, A2, etc., seguidas por paréntesis que indican la edad y el año que cursan, respectivamente.

algún algoritmo (ALGO1). En nuestros datos, como muestra el gráfico 5, esta subcategoría es característica de Quinto Año. La estrategia consiste en utilizar el enunciado como un algoritmo, que deriva en un procedimiento iterativo de búsqueda de la solución.

El uso reiterado de esta estrategia para valores diferentes consume mucho tiempo y posiblemente supera la capacidad de carga de la memoria de trabajo, que se reduce cuando todos los intentos se anotan, como lo muestra el protocolo de A5(13:8) que describe esta subcategoría.

Insertar "FIGURA 5"

El sujeto comienza probando con dos números cuya diferencia es cuatro, multiplica 30 y 40 respectivamente, y controla los resultados, reiterando el proceso y deteniéndolo cuando la suma total da 1000. Es claro que A5(13:8) tiene en cuenta simultáneamente todas las relaciones del problema, y las representaciones que elabora como parte del proceso de comprensión del enunciado constituyen un modelo mental de la situación, que lo conduce a la solución correcta.

Finalmente, en los tres últimos años de la escolaridad se presenta la subcategoría *Reducen a la unidad y encuentran el resultado correcto* (RAUB1), que predomina en Segundo Año Polimodal, en Quinto Año, y en menor proporción, en Primer Año Polimodal. El protocolo de A6(16:II) se propone como ejemplo.

El procedimiento utilizado por los sujetos comienza de igual manera que el anterior descrito en (RAUM1). Estos sujetos se distinguen porque al dividir lo hacen por el total de varillas (70), reduciendo a la unidad. Al resultado le suman cuatro e indican que es la medida de la varilla de Javier y verifican el resultado. Los protocolos mostrarían que cuando los sujetos no pueden realizar una traducción del enunciado del problema en el marco algebraico, emplean el aritmético y tienen en cuenta todas las relaciones del problema.

Se observa que las relaciones que ejecutan los sujetos para resolver el problema se encuentran muy próximas a las correspondientes a la formulación algebraica. En consecuencia, constituirían un excelente punto de partida si se estuviera dispuesto a considerar lo que piensan los alumnos.

Insertar "FIGURA 6"

6.2 Resolución Algebraica del Problema 1 (RAL1)

Para describir las resoluciones en el marco algebraico, se adoptan subcategorías comunes en ambos problemas. Para el problema 1 las subcategorías son: *Formulan la ecuación pero no operan* (SFE1), *Operan con ecuaciones mal formuladas* (OCE1) y *Formulan y operan la ecuación de manera correcta* (FEO1) y se presentan en el gráfico 6. Las cantidades que aparecen en el eje horizontal debajo de cada año escolar representan el número de sujetos pertenecientes a ese año que abordan el problema algebraicamente. Con relación al gráfico 2, se observa que la mayoría de los sujetos pertenecientes a Noveno y Quinto Año (más de la mitad del total) optan por el marco algebraico para resolver el primer problema. En Primero Polimodal los sujetos que eligen el marco algebraico es mayor que los que escogen el aritmético. Mientras que en Octavo y Segundo Año Polimodal es pequeño el número de sujetos que optan por el marco algebraico.

INSERTAR " GRÁFICO 6"

La subcategoría *Formulan la ecuación pero no operan* (SFE1) se encuentra presente en Octavo, Noveno y Quinto Año. Esto indicaría que los sujetos comprenden el

discurso porque transforman el enunciado verbal en formulación algebraica, pero no consiguen operar con ecuaciones.

Los siguientes protocolos ejemplifican esta subcategoría; se observa que los sujetos pueden formular la ecuación, pero abandonan su resolución. El sujeto A7(18:V), quien cursa el último año de la escolaridad secundaria, luego de plantear el sistema explica que "*se resuelve por igualdad y esos métodos pero no lo sé hacer*". Es de destacar que A7(18:V) es el único caso encontrado que plantea un sistema de ecuaciones para el primer problema. Como se ha dicho, los sujetos de años superiores buscan identificar los problemas con los contenidos que han aprendido en la escuela. De igual modo, A8(13:8), sujeto que cursa Octavo Año, formula la ecuación y continúa con estrategias aritméticas; asigna un valor para x y al comprobar, se da cuenta de su error y abandona la resolución.

Insertar "FIGURA 7"

La subcategoría *Operan con ecuaciones mal formuladas* (OCE1) se presenta en toda la escolaridad. Los indicadores más elevados se encuentran en Noveno Año y Primer Año Polimodal, en menor proporción en Quinto Año y con cantidades similares de sujetos en Octavo y Segundo Año Polimodal. Esta subcategoría se relaciona con la comprensión parcial del discurso o con errores de sintaxis. Es el caso de A9(14:9) quien aparentemente olvidó el paréntesis al plantear la ecuación, o sólo consideró la diferencia para una sola varilla. Luego, cuando resuelve, supone que todas las varillas son iguales y formula la ecuación de manera incorrecta. Sin embargo, cuando escribe la respuesta expresa la diferencia de las varillas.

Los sujetos establecen algunas relaciones del problema para formular la ecuación, operan y en algunos casos al escribir el resultado, aparece la idea de la diferencia entre las varillas, como se observa en A10(16:II). En el protocolo de A3(18:II) presentado en la resolución aritmética para la subcategoría (DIV1) se observó la misma estrategia que en A10(16:II), la diferencia reside en el marco utilizado.

Insertar "FIGURA 8"

El protocolo de A11(15:9) corresponde a un sujeto que cursa Noveno Año. Se observa que establece algunas relaciones del problema, a otras las considera como dato: "*Las varillas de Javier miden 4 metros (como ya habían dicho)*". En consecuencia, formula la ecuación sólo para Pablo, tiene en cuenta la diferencia de las varillas de Javier para su resolución y considera como dato que la varilla de Javier mide 4 metros.

Insertar "FIGURA 9"

La última subcategoría *Formulan y operan la ecuación de manera correcta* (FEO1) se encuentra en toda la escolaridad, con indicadores muy altos en Octavo, Segundo Polimodal y Quinto Año. En esta subcategoría se identifica un modelo adecuado con respecto a los anteriores, que lleva al resultado correcto. Los sujetos comprenden el enunciado del problema con base en informaciones y conocimientos algebraicos que pueden recuperar para construir un modelo mental de la situación.

Este modelo contiene los elementos del problema, las relaciones entre ellos, las informaciones requeridas para implementar la formulación (incógnita, variable, ecuación, operación) sintáctica algebraica, las relaciones de transformación entre los elementos y relaciones propiamente dichas en el problema y su expresión algebraica. Es evidente que este modelo es mucho más complejo que los que subyacen a las formulaciones aritméticas.

Cuando los sujetos pueden, además, explicitar el enunciado del problema en el lenguaje algebraico, ejecutan sucesivas revisiones recursivas del modelo que

contribuyen a su reformulación. La explicitación es una parte del proceso de explicación que evidencia un nivel de comprensión que podríamos denominar algebraico. Si también se produce la verificación, de nuevo se revisa en forma recursiva el modelo interno y posiblemente se producen reformulaciones o confirmaciones del propio modelo interno y de sus predicciones. Por tanto, en nuestros protocolos la verificación se considera un indicador de comprensión.

Un modelo de la complejidad reseñada puede ser sostenido en la Memoria de Trabajo, gracias a que el álgebra opera "*mediante el trazo escrito de ciertos usos de la memoria humana permitiendo, además, la explicitación y la manipulación de la estructura del problema tratado*" (Gascón, 1999, p. 79).

Ciertos protocolos evidencian diferentes niveles de competencia algebraica. Esto se manifiesta en la manera de resolver, el modo de aplicar propiedades y la presentación de la resolución, como en el caso A12(18:V).

Los protocolos presentados a continuación pertenecen a sujetos que cursan Quinto Año A12(18:V) y Octavo Año A13(14:8), respectivamente. Sus trabajos indican que la construcción de modelos es una característica del pensamiento que no está vinculada a la edad de los sujetos porque se presenta en toda la escolaridad. La paridad de los resultados entre Octavo y Quinto Año permite sostener esta conclusión.

Insertar "FIGURA 10"

Insertar "FIGURA 11"

6.3 Resolución Algebraica del Problema 2 (RAL2)

Sólo 52 sujetos del total ($N = 264$) optaron por el marco algebraico como estrategia de resolución para el problema de las aulas. Sin embargo, quienes lo hacen tienen un alto grado de competencia algebraica como se observa en el gráfico 7. El mayor número de sujetos que aborda el problema de las aulas en el marco algebraico se presenta en Quinto Año, en menor proporción en Noveno Año, y en los otros cursos son muy pocos los sujetos que eligen este marco de resolución.

Los pocos sujetos que intentan resolver en dicho marco el segundo problema, estaría indicando que para los estudiantes es más complejo resolver en el marco algebraico el segundo problema que el primero. Los dos problemas son descripciones de sistemas o estados posibles del mundo real que los sujetos "mapean" en el proceso de comprensión. Los modelos mentales son representaciones internas que los sujetos construyen para representar las situaciones descritas en los enunciados. La comprensión que hemos denominado "algebraica" supone modelos internos de un orden de complejidad muy superior al nivel de comprensión de las relaciones aritméticas.

INSERTAR " GRÁFICO 7"

La subcategoría *Formulan y operan la ecuación de manera correcta* (FEO2) se presenta en toda la escolaridad. En Segundo Polimodal es la única subcategoría encontrada, aunque son pocos sujetos optaron por este marco, los que lo hicieron arribaron al resultado correcto. También prevalece esta subcategoría en Noveno y Quinto Año con indicadores altos y paridad de resultados entre ellos, seguido por Primer Año Polimodal y en menor proporción por Octavo Año.

Presentamos aquí las producciones de A14(14:8) sujeto que cursa Octavo Año, mientras que A15(17:V) cursa Quinto Año. Como se observa en los protocolos, no se encuentran marcadas diferencias entre los sujetos que abordan el marco algebraico. La ejecución

del marco algebraico dependería entonces de la existencia de informaciones y conocimientos que provienen de la enseñanza. Si ese conocimiento está en los sujetos y lo actualizan, podrán resolver la situación, independientemente del año escolar al que pertenezcan.

Insertar "FIGURA 12"

La subcategoría *Operan con ecuaciones mal formuladas* (OCE2) predomina en Octavo Año, seguido por Primero Polimodal y en menor proporción en Noveno y Quinto Año. Se refiere a los sujetos que operan con ecuaciones mal formuladas. La comprensión parcial del discurso conduce a ejecutar modelos mentales que tienen en cuenta algunos elementos del problema que los sujetos no pueden integrar en relaciones correctas, se observa en A16(17:1) y A17(13:8); una evidencia adicional de la falta de comprensión algebraica se manifiesta por el hecho de que la solución encontrada no se relaciona con el enunciado.

Insertar "FIGURA 13"

Por último, la subcategoría *Sólo formulan la ecuación* (SFE2) se encuentra sólo en Octavo Año.

6. 4 Resolución Aritmética del Problema 2 (RAR2)

Para el problema de las aulas clasificamos las subcategorías: *Vinculan escasas relaciones del problema* (VER2), *Resta recursiva* (REP2), *Resuelven mediante dos tablas* (RMT2) y *Modelo de Ana* (ANA2). Se encontraron estrategias de resolución similares a las identificadas por Otero (1998a, 1998b, 1998c), que para nuestro estudio están representadas por las subcategorías (REP2) y (ANA2).

En el gráfico 8 se visualizan las subcategorías anteriores para $N = 109$ sujetos que eligieron el marco aritmético para resolver el segundo problema, desagregados de acuerdo con el año escolar al que pertenecen. Con relación al total ($N = 264$) aumenta considerablemente la cantidad de sujetos que intentan resolver el segundo problema en el marco aritmético con respecto al marco algebraico. Más de la mitad de los sujetos de Octavo y Noveno resuelven en el marco aritmético este problema, seguidos por Segundo y Primer Año Polimodal, respectivamente. Sólo en Quinto Año es menor la cantidad de sujetos que intentan resolver en el marco aritmético.

INSERTAR " GRÁFICO 8"

La subcategoría *Vinculan escasas relaciones del problema* (VER2), se presenta en los cuatro primeros años de la escolaridad. Las tres subcategorías restantes *Resta recursiva* (REP2), *Resuelven mediante dos tablas* (RMT2) y *Modelo de Ana* (ANA2) representan modelos mentales de diferente complejidad, que en todos los casos conducen a la solución satisfactoria.

La subcategoría *Resta recursiva* (REP2) es característica de los sujetos de Quinto Año, así como para Segundo Año Polimodal. En cambio, para Octavo y Noveno es la subcategoría menos representativa. El modelo que ejecutan los sujetos para resolver el problema consiste en una resta recursiva para obtener el número de aulas, luego reemplazan y obtienen el número de alumnos como se muestra en el protocolo A18(15:9). Este protocolo y los siguientes, muestran la riqueza y potencial cognitivo que poseen los sujetos escolares y que no deberían ignorarse en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. El esquema 1 muestra la interpretación realizada por Otero (1998, 1999) del modelo utilizado.

Insertar "FIGURA 14"

El sujeto A19(17:V), quien cursa Quinto Año, señala con "barras paralelas"

cómo ubica los 25 alumnos que le sobran, quedando uno sin ubicar como en el caso de A18(15:9). Luego, ambos obtienen correctamente la cantidad de alumnos, evidenciando la comprensión adecuada de las relaciones formuladas en el enunciado.

Insertar "FIGURA 15"

La subcategoría *Resuelven mediante dos tablas* (RMT2) aparece en toda la escolaridad. La subcategoría (RMT2) designa un modelo similar a un algoritmo que genera una tabla recursiva, donde la variable es el número de aulas. Algunos sujetos tienen en cuenta los alumnos que quedan fuera del aula como en el caso A20(16:I). En cambio, en el trabajo de A21(16:II) parece que el control de la igualdad es realizado mentalmente, y luego de verificar recuadra el resultado.

Insertar "FIGURA 16"

Posiblemente la instrucción y la mediación escolar tenga relación con la ejecución de esta estrategia recursiva que constituye este modelo mental.

Según muestra el gráfico 8, la subcategoría *Modelo de Ana* (ANA2) está presente en de toda la escolaridad. Es característica de los sujetos de Primero Polimodal y Noveno Año. Debido a su similitud con la formulación algebraica se considera que esta estrategia de resolución es un indicador del modelo mental más aproximado en el marco aritmético.

Insertar "FIGURA 17"

Insertar "FIGURA 18"

Insertar "FIGURA 19"

Según se observa, A22(14:8) resuelve en el marco aritmético y aporta la descripción verbal de su razonamiento. La resolución es correcta y posee las características que se interpretan en el esquema 2. En la sección de las resoluciones algebraicas se mostró el protocolo correspondiente a A14(14:8), quien también resuelve correctamente este problema. Ambos sujetos cursan Octavo Año de la E.G.B. y tienen 14 años de edad, sus resoluciones conducen a la pregunta por la diferencia de marco utilizado. Es evidente que ambos poseen la competencia cognitiva requerida para comprender y manejar la complejidad del problema en el marco adoptado.

Entonces, ¿a qué se puede atribuir la diferencia?, ¿poseen estos sujetos niveles de comprensión diferentes?, ¿qué tiene uno que no posee o no actualiza el otro? Parece claro que quien fue capaz de formular algebraicamente comprendió las características estructurales del problema, ya que no es posible obtener la formulación a partir de una "traducción literal". Se requiere tomar en cuenta las características del "reparto" que se está efectuando y al escribir una igualdad, también está claro que se reconoce la invariancia del total de alumnos. Además, se conoce la técnica operatoria requerida y se tiene la habilidad de verificar. Por otra parte, quien resolvió aritméticamente también captó las relaciones del problema, y lo hizo de manera sustantiva como se refleja en su protocolo.

La diferencia entre ambos se puede explicar a partir de la teoría de Johnson-Laird. Toda nuestra capacidad de comprensión depende de la construcción de modelos mentales. La comprensión puede ser aritmética o algebraica, que deriva en la ejecución de modelos mentales aritméticos o algebraicos que predicen y explican. Las explicaciones de quienes conocen modelos aritméticos, se expresan de manera verbal o numérica. En cambio, en los modelos algebraicos las explicaciones requieren informaciones vinculadas a las formulaciones y operaciones algebraicas. Es decir, hay modelos dentro de modelos. La revisión recursiva de estos modelos permite a los sujetos seleccionar o activar las estrategias necesarias para

interpretar y resolver los problemas.

El cuestionamiento de la supuesta espontaneidad, linealidad y simplicidad del proceso de adquisición de competencias algebraicas, es una de las claves para modificar su tratamiento didáctico en el ámbito escolar.

El esquema 2 es una interpretación que refleja la estructura común a las resoluciones prototípicas de A22(14:8), A23(16:II) y A24(15:I). Existe una evidente proximidad entre la resolución de A23(16:II) y la estructura de la ecuación. Los grafismos del protocolo son equivalentes a la ecuación, faltaría escribir el objeto incógnita. Sin embargo, este salto cognitivo que emplea la noción de variable no es trivial, sino un proceso de largo aliento; al que contribuyen de manera esencial los diversos marcos que aparecen y la toma de conciencia metacognitiva entre lo que cada uno representa con relación al problema. La proximidad entre estos procedimientos y la modelización algebraica debe ser percibido por los profesores e institucionalizado para los alumnos, en pro de una comprensión del álgebra como *un instrumento al servicio del trabajo matemático* (Gascón, 1999).

El trabajo que se haga en el aula no puede ignorar la indudable riqueza cognitiva que se manifiesta en las resoluciones espontáneas de los alumnos; basadas en un instrumento en el que ellos son competentes, como la aritmética y en la capacidad cognitiva de comprender y construir modelos mentales funcionales y efectivos del discurso presentado en los problemas.

7. CONCLUSIONES

En páginas precedentes hemos inferido a través de las producciones de los sujetos, las características comunes de los modelos mentales que ejecutan cuando resuelven los dos problemas planteados. Un porcentaje elevado de sujetos intenta algún tipo de solución, orientado por los procesos estratégicos de comprensión del enunciado, independientemente del año escolar al que pertenecen.

Los marcos de resolución adoptados son las manifestaciones externas de las representaciones mentales (internas) que los sujetos construyen para comprender y resolver. En todos los segmentos de la escolaridad considerados, los sujetos construyen modelos mentales relacionados con procedimientos algebraicos y/o aritméticos. Nuestras inferencias se refieren a las características comunes de esos modelos mentales y no al modelo mental de un sujeto en particular, que es inaccesible. La interpretación del enunciado del problema que realiza cada estudiante genera modelos idiosincráticos, diferentes y personales para cada sujeto. Sin embargo, las resoluciones permiten identificar características comunes en las producciones de los sujetos de todos los años escolares.

Se identifican modelos mentales con diversos grados de adecuación. Los más limitados corresponden a sujetos que realizan operaciones de manera confusa y que representan parcialmente algunos elementos del problema y pocas relaciones. Los modelos que consideramos adecuados son aquellos que conducen a la predicción del resultado correcto, tanto en el marco aritmético como algebraico. Para comprender y resolver problemas como los planteados en este trabajo, se requiere que los estudiantes construyan modelos mentales adecuados que les permitan no sólo predecir sino explicar la solución. Comprender el problema implica construir un modelo mental que será usado para predecir y explicar.

En este trabajo se han identificado procesos de comprensión algebraica y de comprensión aritmética. Tanto uno como el otro requieren la construcción de modelos mentales de diferente complejidad y estructura. Los procesos de comprensión aritmética están más vinculados a la predicción del resultado y a la construcción de un modelo que mapea las relaciones entre los elementos del problema sin incluir otras relaciones, que podríamos llamar de

segundo orden, y están orientadas a la formulación algebraica. Estos procesos de comprensión aritmética pueden detectarse en el aula, cuando casi inmediatamente después de proponer el enunciado de un problema, algunos estudiantes son capaces de "dar el resultado" de modo espontáneo. Esto ocurre aun cuando se utilizan cantidades elevadas con la intención de obstaculizar las resoluciones aritméticas.

Cuando se solicitó al sujeto una explicación escrita del modo en que resolvió la prueba de lápiz y papel, como ocurre en este trabajo, se le impulsa a explicitar externamente. Como se ha mostrado, si la comprensión es aritmética, la explicación se formula empleando un lenguaje numérico y verbal. Presumiblemente la necesidad de formular una explicación para otro, dispara nuevas ejecuciones recursivas del modelo y podría conducir a reformulaciones más ajustadas, sobre todo si el sujeto interactúa con otros.

El proceso de comprensión algebraica estaría más centrado en la modelización del problema y, en consecuencia, supone un modelo con relaciones de primer y segundo orden, o quizás más de un modelo simultáneo. En este caso, el proceso comprensivo está guiado no sólo por los "datos" presentes en el enunciado, sino por las informaciones generales vinculadas a la formulación y a las operaciones algebraicas, que conducen a expresar el problema en lenguaje algebraico y a resolverlo.

Si bien el marco aritmético y el algebraico se encuentran en toda la escolaridad, funcionan de modo diferente en cada problema. Esta diferencia se vincularía con la estructura de los problemas y con la manera en que están formulados. En el primero, que hemos denominado "el problema de las varillas", las transformaciones requeridas para expresar el enunciado verbal en forma algebraica parecen más sencillas. En el segundo, que denominamos "problema de las aulas", las transformaciones requeridas para resolver en el marco algebraico serían más complejas. En consecuencia, muchos sujetos adoptan el marco aritmético o desisten de resolver.

Luego de varios estudios exploratorios con estos problemas, en los que se habían identificado los modelos mentales que atribuimos a los sujetos, este trabajo se centró en confirmar su presencia generalizada en toda la escolaridad, empleando como instrumentos pruebas de lápiz y papel. Al parecer, los procesos de explicitación son cruciales para conseguir que los estudiantes mejoren su comprensión del problema y vuelvan a producir elaboraciones del modelo interno.

La explicitación requiere la manifestación externa en algún lenguaje, de los intentos de resolución del problema. Cuando se resuelve algebraicamente, la explicitación es parte de la resolución y supone la construcción de modelos mentales complejos. Un primer paso para conseguir una comprensión algebraica de los problemas parecería requerir la habilidad de explicitar la solución en lenguajes familiares a los sujetos, como la aritmética o la simple verbalización, o en representaciones que los propios sujetos generen. Se requiere revalorizar los procesos de comprensión aritmética en lugar de desestimarlos. La Teoría de los Modelos Mentales permite explicar la indeterminación y el carácter estratégico de esos procesos, que sin el recurso de la lógica permiten al sujeto hacerse una idea de la situación que el problema plantea y hasta predecir la solución correctamente.

El reconocimiento del carácter estratégico, indeterminado y poco seguro del proceso comprensivo al que subyace la construcción de un modelo mental adecuado, al que nunca accedemos directamente, exige una revalorización de las resoluciones aritméticas. La adopción de estos principios modificaría en gran medida el abordaje didáctico de la resolución de problemas algebraicos, y en esta dirección sería necesario plantear futuras investigaciones.

BIBLIOGRAFÍA

Elichiribehety, I. & Papini, C. (1995). Los procedimientos algebraicos en la

resolución de problemas, *XLV Reunión Anual de Unión Matemática Argentina y XVIII Reunión de Educación Matemática* (p. 55), Río Cuarto, Córdoba, 16 al 20 de octubre.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática* 11(1), 77-88.

Greca, I. M. (1995). *Tipos de representações mentais - modelos, proposições e imagens - utilizadas por estudantes de física geral sobre o conceito de campo eletromagnético*. Porto Alegre: Curso de Pós-Graduação em Física -UFRGS. Diss. maestr. Física.

Greca, I. & Moreira, M. A. (1996a). The kinds of mental representations- models, propositions and images- used by college physics students regarding the concept of electromagnetic field. *International Journal of Science Education* 19 (6), 711-724.

Greca, I. M. & Moreira, M. A. (1996b). Tipos de modelos mentales utilizados por físicos en actividad. En: *Actas del Simposio de Investigadores en Enseñanza de la Física 3* (p. 10), Córdoba. Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba, Argentina.

Greca, I. M. & Mallmann, L. (1997). Modelos mentais do conceito de força. En M. A. Moreira, et al. (Orgs.), *Atas Encontro Nacional de Pesquisa em Ensino de Ciências* (pp.280-293), Águas de Lindóia. Porto Alegre, Brasil: Instituto de Física -UFRGS.

Greca, I. M. & Moreira, M. A. (1998). Modelos mentales y aprendizaje de física en electricidad y magnetismo. *Enseñanza de las Ciencias* 16(2), 289-303.

Greca, I. M. & Moreira, M. A. (2000). Mental models, conceptual models, and modelling. *International Journal of Science Education* 22 (1), 1-11.

Greca, I. M. & Herscovitz, V. E. (2000). Mecânica quântica e intuição. En O. Pessoa Jr (Org.), *Simpósio David Bohm, São Paulo. Fundamentos da física 2* (pp. 85-91). São Paulo, Brasil: Livraria da Física.

Johnson-Laird, P. (1983). *Mental models*. Cambridge: Cambridge University Press.

Johnson-Laird, P. (1990a). *Mental Models*. En M. Posner (Ed.). *Foundations of Cognitive Science*. (pp. 469-499). Cambridge: MIT Press.

Johnson-Laird, P. (1990b). *El ordenador y la mente*. Barcelona, España: Paidós.

Johnson-Laird, P. (1996). Images, Models, and Propositional Representations. En M. de Vega, M. J. Intons Peterson, P. Johnson-Laird, M. Denis & M. Marschark: *Models of Visuospatial Cognition*, (Cap. 3, pp. 90-126), New York, Oxford, Oxford University Press.

Moreira, M. A. (1996). Modelos mentais. *Investigações em Ensino de Ciências* 1(3), 193-232. Disponible en Internet: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>

Moreira, M. A. & Lagreca, M. do C. B. (1998). Representações mentais dos alunos em mecânica clássica: três casos. *Investigações em Ensino de Ciências* 3(2), 83-106. Disponible en Internet: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>

Moreira, M. A. (1999). *Modelos Mentales*. Programa Internacional de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias: Universidad de Burgos, España; UFRGS, Brasil. Texto de Apoyo n° 8.

Otero, M. R., Papini, M. C. & Elichiribehety, I. (1998a). Las representaciones mentales y la resolución de un problema: un estudio exploratorio. *Revista Investigacoes em*

Ensino de Ciências. Instituto de Física, Universidad Federal de Rio Grande do Sur, Porto Alegre, Brasil.

<http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol3/n1/7indice.htm>.

Otero, M. R. & Banks Leite, L. (1998b). *Buscando Modelos Mentales*. Disertación de Maestría. Fac de Cs. Humanas. UNICEN-UNICAMP.

Otero, M. R., Papini, M. C. & Elichiribehety, I. (1998c). Las representaciones mentales y la Enseñanza de la Matemática. *Educación Matemática* 10(3), 90-102.

Otero, M. R. (1999). Psicología Cognitiva, Representaciones Mentales y Enseñanza de las Ciencias. *Revista Investigoes em Ensino de Ciências* Instituto de Física, Universidad Federal de Rio Grande do Sur. PortoAlegre, Brasil. Disponible en Internet:

http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol4/n2/v4_n2_a2.htm

Otero, M. R. & Moreira, M. A. (1999). *Representaciones Mentales y Significados en el Aprendizaje de la Física*. Proyecto de Tesis de Doctorado, Presentado en el marco del Programa Internacional de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias de la Universidad de Burgos, España.

Rodríguez Palmero, M. L. (2000). *Modelos Mentales de Célula: Una aproximación a su tipificación con estudiantes de COU*. Tesis Doctoral, La Laguna, Tenerife. España.

Van Dijk, T. A. (1992). *Cognição, Discurso e Interação*. S. Paulo, Brasil: Editora Contexto.