■ EDUCACIÓN MATEMÁTICA ■ Vol. 5 - No. 3 • Diciembre 1993 ■ © GEI ■ Pág. 93 ■

Introducción de los Conceptos Fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral —Una Propuesta Didáctica

Primera Parte: Cálculo Diferencial

1. DISCUSIÓN DIDÁCTICA

1.1 Nuevas Tendencias en la Didáctica del Cálculo Diferencial

Si comparamos textos de Cálculo de los años 60 con los que se editan en los años 80, se pueden observar nuevas tendencias en el tratamiento metodológico que dan estos libros al contenido. Estas nuevas tendencias se reflejan en el intento de reemplazar las introducciones tradicionales al Cálculo, que consistían en un estudio formal de series, secuencias y límites por una intuitiva, haciendo referencia a las aplicaciones.

Parece que hay más conciencia entre los autores de textos y tratados didácticos del Cálculo, en cuanto a que el tratamiento tradicional es matemática y lógicamente exacto, pero no contribuye nada a la comprensión de los conceptos fundamentales del Cálculo. Las ideas básicas del Cálculo Diferencial e Integral permanecen escondidas bajo una capa de formalismo y "*deltas-épsilon*". De esta manera se niega al estudiante la posibilidad de una comprensión auténtica, y con ello la aplicación creativa, o lo que Freudenthal (1963) llama *matematizar*. Estas tendencias nuevas son un intento para solucionar un problema más profundo: el problema de dar significado a los contenidos aprendidos (Wenzelburger, 1992). El análisis matemático desarrollado en forma abstracta y con perfección

Elfriede Wenzelburger Guttenberger

Maestría en Educación Matemática
UNAM

matemática, no alcanza a tener un verdadero significado para la mayoría de los alumnos, sobretodo para los que más adelante van a ser usuarios de las matemáticas y no futuros matemáticos que estudian la ciencia matemática por amor a ella. Aquí se desea dar sugerencias a los maestros en torno a cómo desarrollar el concepto fundamental del Cálculo Diferencial en forma significativa, sin caer en inexactitudes matemáticas.

1.2 Desarrollo Histórico del Cálculo Diferencial y el Problema de la Continuidad

Los textos clásicos del análisis matemático que empiezan con sucesiones, series y límites, presentan el Cálculo Diferencial en forma lógico-matemática con mucha precisión y sistematización. De esta manera se asegura el autor que nadie lo pueda criticar por la falta de rigor matemático. Había una época en la historia de las matemáticas, la época de Newton y Leibnitz en el siglo XVIII, en la cual dicha falta era un problema grave: en las ciencias naturales del siglo XVIII se pretendía resolver, con la ayuda del nuevo cálculo infinitesimal, problemas que anteriormente parecían insolubles, pero muchas veces no se actuaba con la debida seriedad matemática. En el siglo XIX creó Cauchy la fundamentación matemática de los procesos infinitesimales, y todavía hoy en día determinan los conceptos de Cauchy como "*límites, convergencia, diferenciabilidad* la mayoría de las introducciones al Cálculo Diferencial e Integral. Pero tal tipo de introducción es la causa de la falta de comprensión de las ideas fundamentales del Cálculo por parte del alumno, ya que se pierde en la precisión matemática, las demostraciones rigurosas y en un lenguaje formal impecable. De esta manera tenemos muchos alumnos de Cálculo que saben manejar métodos, definiciones y reglas en forma rutinaria sin comprender el sentido de esas operaciones, reproduciendo los pasos, por ejemplo, de los métodos de diferenciación o integración más de memoria que en forma significativa. El estudiante tiene la impresión que el Cálculo siempre ha existido como un conjunto de definiciones claras y teoremas, y nunca tiene la oportunidad de reflexionar, que los métodos matemáticos del Cálculo representan el resultado final de un proceso de desarrollo largo, lento y penoso en la historia de las matemáticas. Si el alumno tuviera la posibilidad de experimentar las diferentes etapas de precisión, y la necesidad de más exactitud como resultado de problemas prácticos, podría comprender mejor el Cálculo. Así podría obtener, del proceso histórico de desarrollo del análisis matemático, indicaciones importantes acerca del fin y propósito de esta rama de las matemáticas.

La enseñanza del Cálculo se debía orientar en esta génesis, que tuvo lugar en la historia de esa ciencia: una formación lenta de conceptos matemáticos a través de la liberación de las percepciones sensoriales y la intuición primaria. El concepto de derivada es en realidad sólo el resultado de intentos para esquematizar nuestras impresiones sensoriales de las cantidades y variabilidades continuas. Esta esquematización ha progresado desgraciadamente de tal manera, que los métodos ingeniosos desarrollados por Newton y Leibnitz aparecen como manipulaciones algebraicas rutinarias.

Si consideramos el desarrollo del Cálculo Diferencial en la historia de las matemáticas, parece ser que una aspiración prematura hacia la precisión lógica puede tener un efecto negativo sobre el pensamiento creativo y sensato. Lo mismo se puede decir para la introducción del Cálculo en las escuelas. Las entradas deben ser intuitivas, razonables, haciendo referencia a aplicaciones, pero no necesariamente de rigor matemático. La necesidad de un mayor rigor surge en forma natural del empeño de facilitar la resolución de más problemas.

Un aspecto importante que fue concluido por Newton en 1711 en sus consideraciones, es el de la *continuidad*. La propiedad de continuidad de procesos cambiantes es una condición fundamental para poder aplicar el Cálculo Diferencial. La continuidad aquí no se entiende necesariamente en el sentido matemático, sino en el de una relación ininterrumpida entre dos magnitudes dependientes. La mayoría de los procesos en la naturaleza y las ciencias a las cuales se aplica el Cálculo, son continuas por partes y tienen sólo un número finito de saltos abruptos que se caracterizan matemáticamente como discontinuidades. Además se consideran muchos procesos que son de naturaleza discontinua (es decir, que se representan gráficamente como puntos inconexos) para fines de un análisis matemático como continuos; se unen o conectan simplemente los puntos por una curva. Si se justifica esta extrapolación, ello depende del aprovechamiento práctico de los resultados.

Newton también describió la condición fundamental del cálculo infinitesimal de la siguiente manera:

La suposición del Cálculo (infinitesimal) es que todas las magnitudes geométricas se generan a través de movimientos continuos. Podemos imaginarnos una línea como el resultado del movimiento de un punto, una superficie como el resultado del movimiento de una línea, un cuerpo como el resultado de una superficie que se mueve, y un ángulo en el plano, como generado por la rotación de una recta sobre un punto (Newton, 1711, citado en Boyer, 1959). Estos conceptos parecen expresar por primera vez la noción de la idea de continuidad. Newton también expresa la idea fundamental del Cálculo Diferencial mediante conceptos como *fluent* (fluente o magnitud fluyente) y *fluxion* (fluxión o intensidad de flujo). Intuitivamente existía para los inventores del Cálculo Diferencial, una relación estrecha entre los cambios continuos y la idea básica de éste. Posteriormente se sistematizó la idea de continuidad *matemáticamente*, y se le dio demasiada importancia, de manera que hoy en día representa la discusión *formal* de límite y continuidad, una etapa árida y difícil en la enseñanza del Cálculo. El aspecto intuitivo y la aplicabilidad se perdieron en gran parte. Es cierto que la continuidad representa un concepto fundamental del *análisis matemático*, pero este concepto no tiene aplicaciones inmediatas y se le hace difícil al alumno, menos interesado en las matemáticas; por eso es aconsejable no entrar al Cálculo con este concepto, sino tratarlo después.

1.3 Diferentes Introducciones al Cálculo

El Cálculo Diferencial es una materia tradicional en los planes de estudio de matemáticas a nivel preparatoria y universitario. Generaciones de alumnos pasaron por un curso de Cálculo sin realmente entender el significado y la utilidad de esta rama de las matemáticas. Esto se debe sobretodo a la manera abstracta y formal, en la cual se presenta normalmente la materia.

En este trabajo vamos a sugerir otro camino hacia el Cálculo. No queremos entrar a través de límites y una definición formal de continuidad, sino por un acercamiento intuitivo a los conceptos fundamentales de una matemática de los cambios.

Con esto se sigue el camino histórico que tomó el Cálculo Diferencial: primero se desarrolló una noción intuitiva de la razón de cambio, de la derivada o de la *fluxion*, como la llamó Newton. Mucho después se formalizó y se precisó lo que es límite, continuidad y convergencia.

Normalmente se usa el problema de la tangente geométrica como motivación para exponer lo que es la derivada. Este método tiene muchas desventajas porque no es fácil de entender que el límite de las pendientes de una familia de secantes, es la pendiente de la tangente a la cual se llama derivada. Además no se ve una conexión inmediata entre una tangente geométrica que es un fenómeno estático, y el dinamismo de una derivada que describe el cambio relativo de una magnitud con respecto a otra.

A veces también se introduce la derivada como "*factor de proporcionalidad*". Se trata de probar que la recta: $g: x \rightarrow f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ es la mejor aproximación lineal de la función f en una vecindad de x_0. Entonces la diferencia $g(x) - f(x_0)$ es proporcional a la diferencia $x - x_0$, con factor de proporcionalidad $f'(x_0)$.

Este método aritmético-algebraico tiene la desventaja de ser muy abstracto y de revelar poco acerca del concepto fundamental de una matemática de los cambios.

En casi todos los problemas reales en los cuales hay una dependencia funcional de magnitudes, no sólo interesan los valores de éstas, sino los cambios de aquellos, o más bien las razones de cambios promedio

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

de una función f. Para todas las razones de cambio promedio en una vecindad pequeña de a, se puede considerar la razón de cambio "*local*":

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

como una aproximación adecuada. Por eso creemos que el acceso más natural al Cálculo Diferencial es a través del problema de determinar razones de cambio "*locales*" o "*instantáneas*". El alumno debe tener la experiencia de cuantificar cambios mediante los métodos del Cálculo.

Si consideramos una función como gráfica, la vemos como algo estático, un objeto geométrico. Lo importante de una función es el aspecto dinámico, el hecho que representa el proceso de cambio de una magnitud en dependencia de otra. El proceso del cambio mismo se describe mediante esa función. La *rapidez* de estos cambios se determina mediante el Cálculo Diferencial.

1.4 La Concepción Didáctica de este Ensayo

La concepción de este tratado se basa en lo anteriormente dicho. Se desea presentar ideas para introducir los conceptos fundamentales del Cálculo en forma significativa, con un empleo mínimo de formalismo matemático al principio.

El concepto fundamental: "*la determinación de cambios de una magnitud que depende de una segunda, en relación con los cambios de esta segunda magnitud*", se deduce paso por paso. De la creciente precisión del concepto de razón de cambio se sigue en forma natural la necesidad de más formalismo matemático, como la notación funcional y el cociente diferencial. Una comprensión preliminar intuitiva del propósito básico del Cálculo Diferencial facilita grandemente el paso inevitable al rigor matemático.

Con este tipo de enseñanza significativa partimos de la premisa de que el concepto fundamental del Cálculo Diferencial, y el esquema cognitivo pertinente se usa en la vida diaria como categoría de pensamiento matemático que no presenta reflexión, pero que, sin embargo, funciona. Es meta y tarea de la instrucción matemática llevar al nivel de conciencia esta categoría ya existente a través de un proceso de reflexión, de manera que se reconoce una experiencia singular como un método general no útil para la resolución de otros problemas.

Concretamente: En la vida diaria se determinan razones de cambio de procesos, pero esto no se maneja en forma de un método matemático abstracto.

Si queremos enseñar la determinación de razones de cambio como una idea fundamental del Cálculo Diferencial, es necesario, para lograr un aprendizaje de claro entendimiento, referirse a las experiencias de la vida diaria, y sobrepasar éstas a través del desarrollo de aptitudes matemáticas. Debido a que los contenidos curriculares tienen para cada alumno un significado específico y personal, hay tantas interpretaciones de estos contenidos como estudiantes. Sin embargo, es posible crear un espectro amplio de significados para contenidos de enseñanza, si uno se refiere a experiencias comunes a todos.

2. LA IDEA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

2.1 Introducción

El Cálculo Diferencial forma, junto con el Cálculo Integral, una de las ramas más importantes de las matemáticas.

Vivimos en un mundo caracterizado por cambios continuos. Es importante desarrollar métodos matemáticos para cuantificar, describir y pronosticar esos cambios. Justamente esto es el propósito del Cálculo Diferencial, que es la *matemática de los cambios*.

Todo el Cálculo Diferencial se puede reducir a su concepto fundamental, la *razón de cambio*. Determinar razones de cambio de procesos continuos es muchas veces más importante que estudiar tales procesos. Siempre que dos magnitudes (variables) están conectadas mediante una relación funcional (función), se puede estudiar el cambio relativo de una de ellas con respecto a la otra.

Un ejemplo típico de una razón de cambio es lo que físicamente se conoce como *velocidad*. Una velocidad es la razón (el cociente) entre una distancia y un tiempo, y describe el cambio en la posición de un cuerpo con respecto al tiempo transcurrido. Si consideramos el movimiento de un auto, es fácil ver que una velocidad grande (por ejemplo, 120 km por hora) significa un cambio grande de posición —un desplazamiento de 120 km en una hora. Una velocidad (por ejemplo, 30 km/h) se puede interpretar como un cambio pequeño de posición, solamente se avanza 30 km en una hora.

Ciertas razones de cambio tienen nombres especiales: la razón de cambio del tamaño de una persona se llama tasa de crecimiento. La razón de cambio de la posición de un vehículo con respecto al tiempo se llama velocidad. La razón de cambio de la temperatura de un líquido se llama velocidad de enfriamiento y calentamiento. En la economía interesan, por ejemplo, la razón de cambio del índice de precios a nivel nacional. Una importante razón de cambio es también la tasa de natalidad de una nación, que describe el incremento de la población.

Un aspecto fundamental de las relaciones funcionales cuyos cambios se estudian en el Cálculo Diferencial, es el de la continuidad. Esto significa que la relación es completa, sin interrupciones o saltos bruscos. Gráficamente estas funciones se representan como segmentos de rectas o curvas, y no como un conjunto de puntos inconexos.

Otro aspecto importante es el de la pendiente. Todos tenemos nociones intuitivas acerca de pendientes y cómo comparar diversas inclinaciones. Por ejemplo, sabemos que cuesta más trabajo subir una montaña muy empinada (pendiente grande), o que el agua de un río corre más rápido en su lecho si éste tiene pendiente grande. Lo que hay que explorar entre otras cosas es la manera en la cual la medida de una pendiente de una curva está relacionada con el concepto de la razón de cambio.

2.2 El Concepto de la Determinación de Razones de Cambio

Parece ser entonces que el concepto fundamental del Cálculo Diferencial está presente en la vida diaria, y que muchas personas efectúan operaciones intelectuales de acuerdo con tal concepto sin poder darle un nombre explícito, o reflexionar sobre las acciones cognoscitivas correspondientes. Hemos visto que este concepto fundamental es la razón de cambio y su determinación, pues vivimos todos en un mundo físico, biológico, económico, político y social que está caracterizado por cambios continuos: es muy útil describir y cuantificar estos cambios y variaciones a través de modelos matemáticos. Como ejemplo, veamos la gráfica de fiebre.

Una enfermera interpreta la razón de cambio de la temperatura como un cambio de los valores en el eje y, en °C, respecto a los intervalos de tiempo en el eje x, y toma las medidas terapéuticas correspondientes.

Para interpretar la Figura 1(a) no interesa tanto el valor absoluto de la fiebre cada hora sino el hecho que hubo un incremento fuerte entre las 19:00 y las 20:00 y que la fiebre no cambió de las 20:00 a las 22:00.

En muchas situaciones de la vida diaria se usa la misma manera de pensar; todas tienen en común la importancia de obtener información acerca del modo en el cual varía una magnitud respecto al cambio de otra, en un determinado intervalo. Por ejemplo, si sabemos que la gasolina de un tanque con 40 litros se acaba a las 14:00, y que estaba lleno a las 9:00, podemos pensar en un consumo promedio de 8 litros por hora, pero esto en realidad no dice mucho acerca

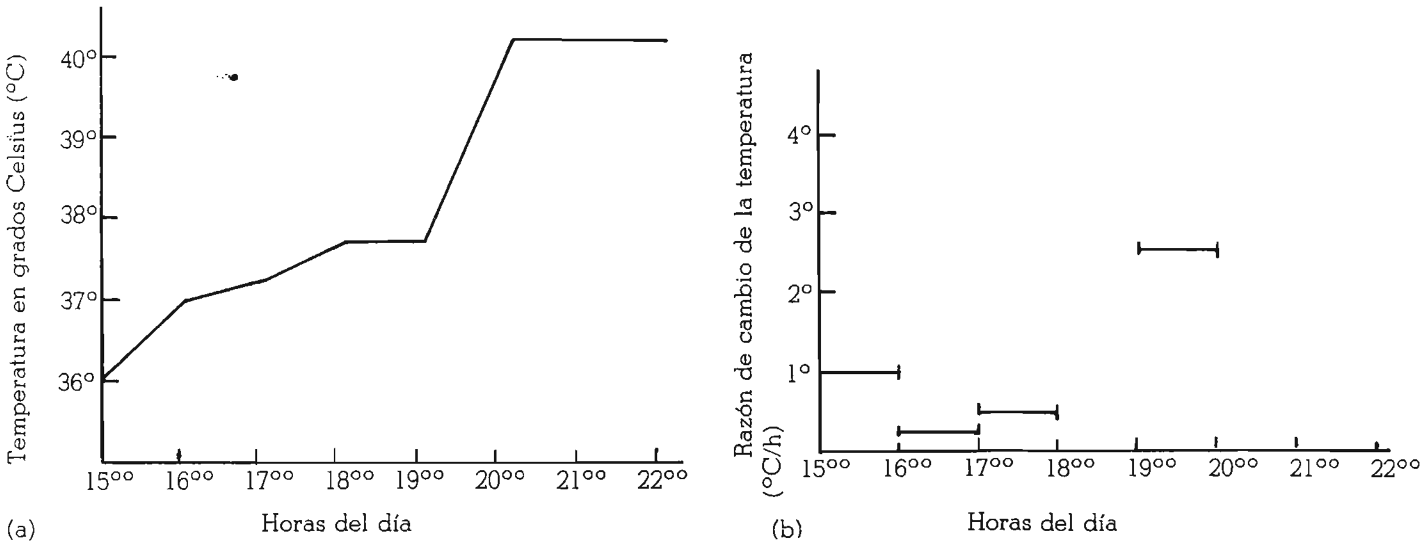


Figura 1

de los cambios que sufrió el consumo de la gasolina realmente. ¿Hubo incrementos repentinos? ¿Hubo variaciones entre valores extremos del consumo? Todas estas preguntas no se pueden contestar sin información adicional.

Podemos encontrar otros ejemplos de la vida diaria en los cuales se aplica el concepto de la determinación de razones de cambios: Los montañistas tienen que hacer más esfuerzo para subir por un monte muy empinado, y no interesa tanto la altura total sino la pendiente. Los médicos determinan muchas veces razones de cambio de procesos. Un electrocardiograma representa con una curva los latidos del corazón. Si el paciente hace ejercicios cambia la forma de la curva (este cambio determina el diagnóstico).

Las compañías de electricidad también determinan razones de cambio: el consumo de energía eléctrica se registra como una curva en función del tiempo; un aumento repentino de consumo se refleja en el aumento de la amplitud de la curva, lo que indica la necesidad de incrementar la capacidad eléctrica. Un caso interesante de la interpretación de una razón de cambio representa el polígrafo o detector de mentiras: un cambio repentino de pulso o de la respiración indica un cambio en el estado emocional del individuo, y de esto se obtienen conclusiones acerca de la reacción a las preguntas.

La determinación más común de razones de cambio de procesos ocurre en el hogar; por ejemplo, cuando el ama de casa observa los incrementos en los precios de ciertos artículos. Si los precios suben rápido, es una buena decisión comprar tales artículos para reserva. Para justificar esta decisión no importa tanto el valor absoluto del precio sino el incremento que ocurre.

De todos estos ejemplos se puede ver que el concepto de la determinación de razones de cambio no sólo está presente en forma intuitiva en la vida diaria, sino también que es muy útil interpretar las razones de cambios, ya que éstas poseen, en cierto modo, un valor pronóstico que permite tomar decisiones para el futuro.

En la próxima sección vamos a ver cómo elaborar el pronóstico a través de razones de cambio, con más precisión que únicamente en forma intuitiva.

2.3 Relación entre Razones de Cambio y Pendientes de Rectas

La descripción de cambios que sufren ciertos procesos, tiene más valor pronóstico si se pueden determinar las razones de cambio en forma general. Para lograr esto, efectivamente no es suficiente describirlas en un lenguaje común, sino que es necesario desarrollar algoritmos..

La ilustración del concepto fundamental del Cálculo a través de gráficas, es muy útil, ya que existe una relación estrecha entre pendientes y razones de cambios.

Supongamos que el precio de un artículo subió entre el primero y el tercer mes, de 600 pesos a 1,200 pesos (Tabla 1).

Mes	Precio
1	600 pesos
3	1200 pesos

Tabla 1

Podemos graficar estos datos (Fig. 2a) y suponer que el incremento es

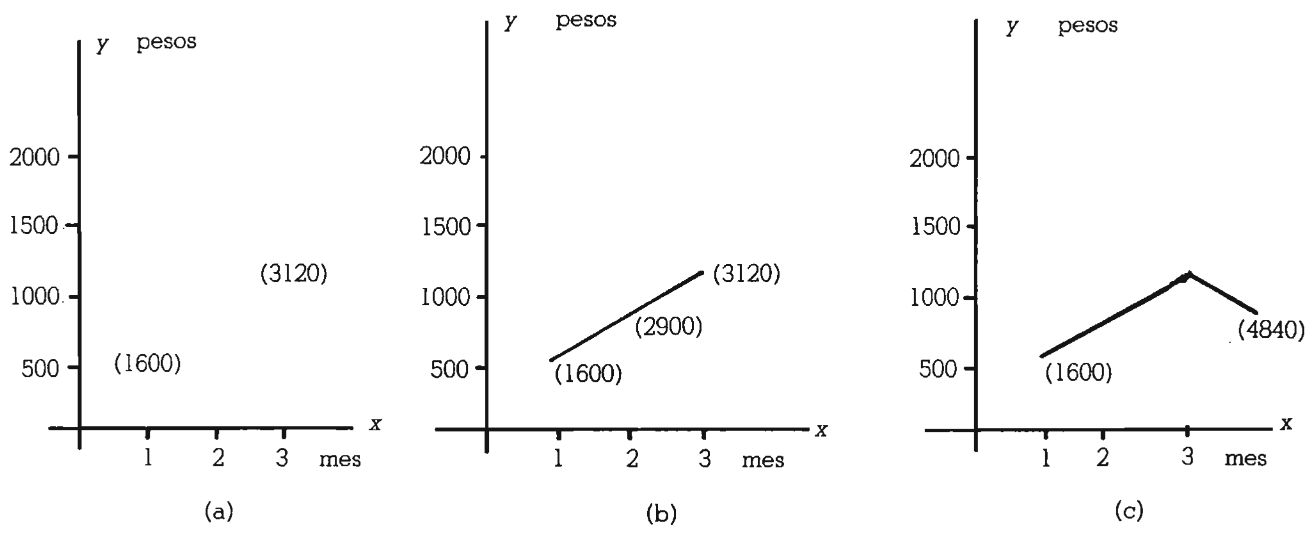


Figura 2

La razón de cambio del precio se define de la siguiente manera: se calcula el cambio en dirección vertical (1200 − 600) y se divide entre el cambio en dirección horizontal (3 − 1).

$$(1)\ \text{razón de cambio} = \frac{600}{2} = 300\ \text{(pesos/mes)}$$

Este valor numérico caracteriza el incremento de precio. En el cuarto mes se ofreció el producto con un 30% de descuento como promoción [Fig. 2(c)]. La razón de cambio en este mes es

$$(2)\ \text{razón de cambio} = \frac{840 - 1200}{1} = -\,360\ \text{(pesos/mes)}$$

Ahora consideramos un valor intermedio de tiempo; por ejemplo, 2 meses, y calculamos la razón de cambio en el 2o. mes.

$$(3)\ \text{razón de cambio} = \frac{900 - 600}{2 \quad 1} = \frac{300}{1} = 300\ \text{(pesos/mes)}$$

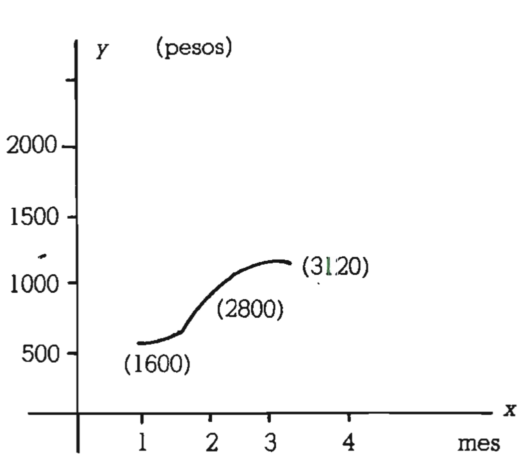
Esta razón de cambio es la misma que en (1).

Resumen de lo observado en (1), (2) y (3):

Una razón de cambio característica para una gráfica en forma de segmentos de recta sólo cambia si hay variación en la pendiente de ésta. Si asciende la gráfica, la razón de cambio (y la pendiente) son positivos; si desciende la gráfica, la razón de cambio (y la pendiente) son negativos. Para calcular las razones de cambio entre dos puntos de una gráfica se sigue el trazo de la curva y se ven los valores, primero el punto con la abscisa (valor en el eje horizontal) más grande, y después el punto con la abscisa más pequeña. Después se evalúa el cociente entre la diferencia vertical y la horizontal.

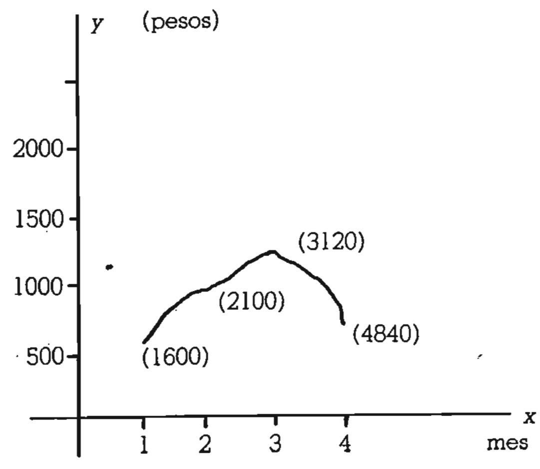
> La pendiente de una recta en un sistema de coordenadas x, y, es una medida de la razón del cambio de la variable y con respecto al cambio de la variable x.

Es una propiedad especial de las rectas el tener pendiente constante; es decir, la razón de cambio entre dos puntos cualesquiera es siempre la misma. No sería necesario usar el Cálculo Diferencial para determinar razones de cambio de puntos sobre una recta. En lo que sigue aplicamos las ideas principales del Cálculo Diferencial a la discusión de curvas (y no de rectas).



(a)

Figura 3a



(b)

Figura 3b

2.4 Razones de Cambio Variables entre Dos Puntos de una Curva

Una característica muy importante que distingue una relación lineal de una no lineal, es el hecho que la razón de cambio entre dos puntos cualesquiera de la curva que representa la relación no lineal entre dos variables, cambia a lo largo de la curva. Se desea primero desarrollar conocimientos previos necesarios para comprender estas razones de cambio variables entre puntos de una curva.

Se utilizará el mismo ejemplo que en la Sección 2.3. Es factible que los precios no hayan subido siguiendo una relación lineal, sino, por ejemplo, como en la Figura 3(a) o 3(b).

De acuerdo con la Figura 3(a) el precio al principio del 2o. mes parece ser de 800.00 pesos. Como la razón de cambio entre el precio al final del 1er. mes y del 2o. (600 a 800) tenemos

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{800-600}{1} = 200 \text{ (pesos/mes)} \quad (1)$$

Ahora calculamos la razón de cambio del precio en el 3er. mes.

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{1200-800}{3-2} = 400 \text{ (pesos/mes)} \quad (2)$$

El valor de la razón de cambio en (1) y (2) es diferente. Si repetimos el procedimiento para otros pares de puntos en la Figura 3(a), o en la 3(b), se obtendrán muchos valores diferentes.

La diferencia entre una curva y una recta es la variación *"continua"* de la razón de cambio a lo largo de la curva.

Si suponemos ahora que los precios cambiaron de acuerdo con la Figura 3(b), pueden observarse en la Tabla 2 las razones de cambio calculadas para intervalos de 1 mes.

Tabla 2

Mes	2o. Mes	3o. Mes	4o. Mes
Razón de cambio en (pesos/mes)	$\frac{1000-600}{1}$ 400	$\frac{1200-100}{1}$ 200	$\frac{840-1200}{1}$ −360

Estos valores describen a grandes rasgos el comportamiento de la curva *"precio en función de tiempo"*. En el 2o. mes el precio sube más rápido que en el 3er. mes, y decrece en el 4o. mes. Si calculamos la razón de cambio total del 1o. al 4o. mes:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{840-600}{3} = \frac{240}{3} = 80 \text{ (pesos/mes)}$$

Obtenemos una información equívoca —un valor positivo pequeño que no refleja la variación real del precio. Por eso se concluye que es necesario evaluar razones de cambio para intervalos *pequeños*, debido a que intervalos grandes no dan valores representativos para la descripción del cambio de una función a lo largo de la curva.

2.5 Determinación Gráfica de Razones de Cambio de Curvas y su Representación como Función

La idea principal de lo que sigue es ésta: Si logramos calcular para una función (dada en forma de una curva) sucesivamente las razones de cambio entre muchos pares de puntos muy cercanos, debe ser posible encontrar una relación funcional entre la variable independiente inicial y las razones de cambio.

Las dos variables iniciales en el siguiente ejemplo van a ser las magnitudes "*ganancia*" (variable dependiente) y "*unidades producidas*" (variable independiente).

La Figura 4(a) representa la ganancia en función de unidades producidas para una fábrica determinada*: Las unidades producidas se miden en millares y la ganancia en miles de pesos. Podemos ver que para la ganancia, su valor máximo es de 6'600,000.00 pesos para 24 000 unidades, y su mínimo de cero pesos para 4 800 unidades.

Los dueños de la fábrica desean saber no sólo el monto de sus ganancias, sino los intervalos en los cuales la producción es económicamente justificable u optimizable, dadas ciertas condiciones iniciales. Esta información se obtiene del análisis de los incrementos o decrementos de las ganancias para intervalos de 2000 unidades, y graficadas como función de la misma variable independiente de la Figura 4(a). Los puntos que se obtienen al calcular estas razones de cambio, se unen mediante una curva continua. Al comparar en la Figura 4 la gráfica (a) con la gráfica (b), observamos:

El máximo de ganancias corresponde a una producción de 24 000 unidades. Si fallan algunas máquinas o hay problema con los proveedores, la Figura 4(a) señala una baja en la producción, y la Figura 4(b) un decremento pequeño en las ganancias. Si baja la producción a 20 000 unidades, no hay problema, pero una producción de 8000 unidades produce un decremento fuerte de ganancias que se aleja más del máximo. También observamos que una sobreproducción produce pérdidas que aumentan rápidamente en la medida en que crece la sobreproducción. Esto es fácil de explicar: Con el aumento de la producción crecen los costos; por ejemplo, los de materia prima, transporte, bodegas, salarios, etc. Las pérdidas crecen lentamente hasta 28 000 unidades, pero aumentan rápidamente para una producción mayor.

En general podemos ver una relación clara entre las curvas en (a) y (b) —la función original y la función de las razones de cambio—, ambas tienen la misma variable independiente. Los puntos de la curva en 4(b) se obtienen con el método descrito en 2.3, 2.4 y 2.5.

* La función tiene la forma $G(x) = ax - bx^{2/3} + c$.

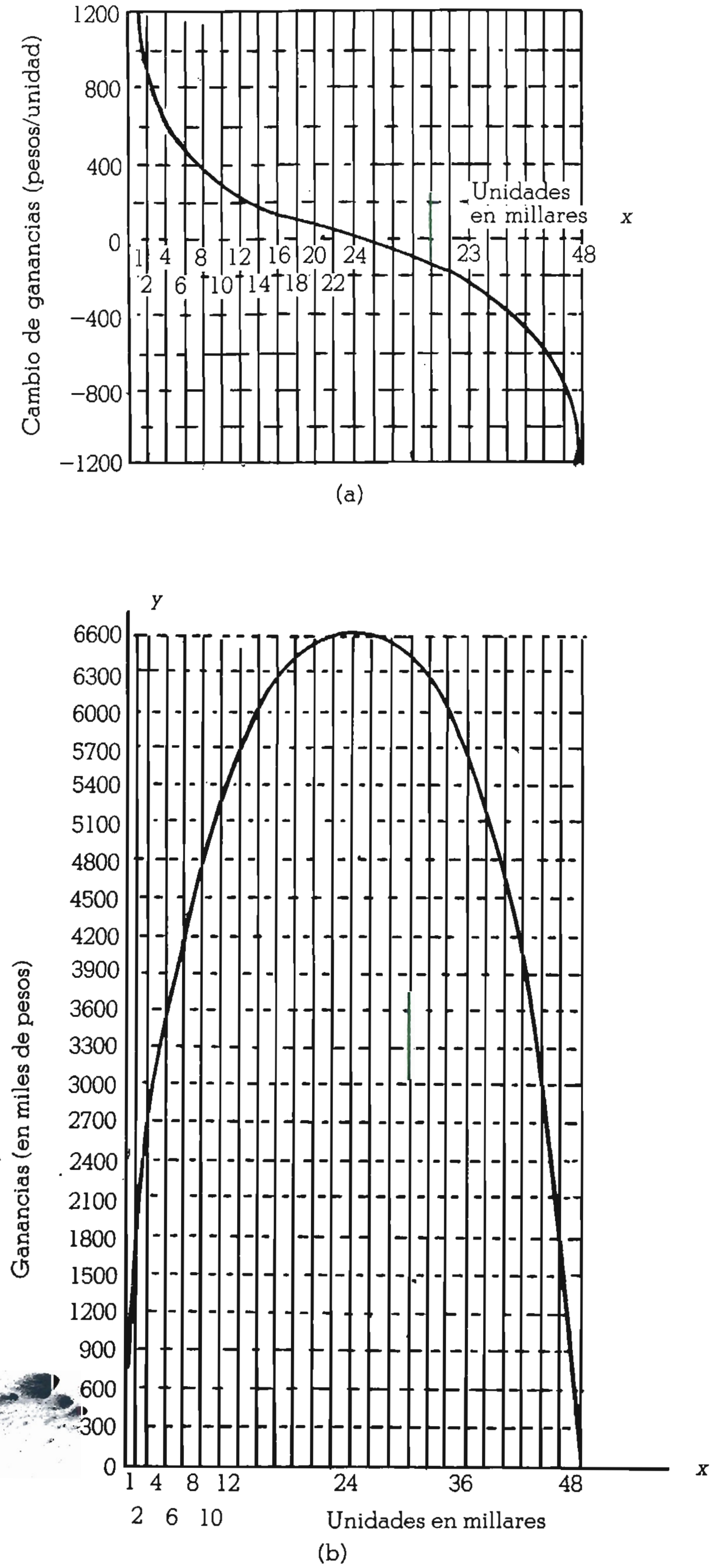

1200
800
400
0
−400
−800
−1200
Cambio de ganancias (pesos/unidad)
Unidades
en millares
x
1 4 8 12 16 20 24 23 48
2 6 10 14 18 22
(a)
y
6600
6300
6000
5700
5400
5100
4800
4500
4200
3900
3600
3300
3000
2700
2400
2100
1800
1500
1200
900
600
300
0
Ganancias (en miles de pesos)
1 4 8 12 24 36 48
2 6 10
Unidades en millares
x
(b)

Figura 4

Resumimos:

> En un sistema de coordenadas cartesianas, se definen —a partir de una función original— las razones de cambio como función de la variable x inicial, al formar cocientes de las diferencias algebraicas entre los valores de y, y los valores de x de puntos cercanos sucesivos
>
> $$\frac{(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}$$
>
> Estas razones se pueden graficar como función de la misma x inicial.

En el ejemplo anterior se usó un procedimiento netamente gráfico para representar la función original y para determinar las razones de cambio. Al aplicar tal método gráfico es importante determinar las razones de cambio para muchos puntos muy cercanos. De esta manera se toman en cuenta todas las características importantes de la curva original.

La función de razones de cambio respecto a la variable independiente original, se *deduce* o *deriva* de los valores de la función que se estudia: por eso se llama a esta nueva función la "*derivada*".

Entre una función y su derivada existe una relación especial:

Función Original	Función Derivada
Crece	Valor positivo
Decrece	Valor negativo
Queda igual (constante)	Valor cero

3. PROBLEMAS DE APRENDIZAJE EN LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA IDEA

3.1. El Problema de la Decisión Simultánea

Una de las dificultades principales en la conceptualización de la idea fundamental del Cálculo Diferencial, es el hecho de que al determinar la función derivada, el alumno tiene que considerar dos procesos complejos en forma simultánea:

a) Por un lado conocemos la relación entre dos magnitudes que varían [en forma de una gráfica, como tabla de valores, o como ecuación funcional $y = f(x)$]. La interpretación correcta de una relación funcional ya exige del alumno la capacidad de tomar decisiones simultáneas: Tenemos dos conjuntos de valores que se asocian en pares. Es necesario tener presente el resultado de esta asociación tal como la asociación misma, además de los valores individuales que se asocian y que se unen a causa de una continuidad real o supuesta para formar una gráfica. De esta manera se exige del alumno, permanentemente, pensar en varias relaciones y procesos en forma simultánea.

b) Por otro lado se establece una relación entre dos funciones al determinar la derivada: tenemos la función que se deriva y la función derivada cuyos valores dan información acerca de la razón de cambio de la función original. En la mayoría de los casos ocurre que la gráfica de la función original es muy diferente a la gráfica de la derivada. Es exactamente esta representación interna y simultánea de parte del alumno, de eventos que distan en el papel temporal y espacialmente, la que dificulta la conceptualización de la idea fundamental del Cálculo Diferencial.

Si queremos que el alumno comprenda en forma significativa los conceptos centrales del cálculo, no queda otra que discutir y experimentar con una función conocida, con métodos gráficos (que son esencialmente cualitativos), la relación entre la función y su derivada a partir de gráficas contiguas [Véase las Figs. 5(b), (c)].

3.2 El Desarrollo de la Capacidad de Tomar Decisiones Simultáneas al Derivar una Función

En la mayoría de los textos de Cálculo se representa la función y su derivada en forma simbólica; por ejemplo, el alumno aprende que la derivada de $y = x^2$ es $y = 2x$. Esta representación netamente algebraica impide que el alumno pueda ver la relación entre una función y su derivada, y tomar decisiones simultáneas de interpretación; más bien, la mayoría de los alumnos saben aplicar correctamente las fórmulas de derivación sin comprender el concepto de derivada. Con un ejemplo explicaremos cómo se puede enseñar a los alumnos la capacidad de la decisión simultánea en la interpretación de derivadas, para asegurar una comprensión significativa como condición necesaria para el uso de fórmulas posteriormente.

En este ejemplo no se trata de determinar gráficamente una derivada, sino de captar *cualitativamente* la conexión entre una función y su derivada.

Se da la gráfica de una trayectoria (altura contra tiempo) de un cohete y se discuten los puntos que destacan en la gráfica [Fig. 5(a)]. Por ejemplo, el momento en el que se acaba el combustible significa que el cohete sigue subiendo, pero su velocidad disminuye. A partir de este instante debemos notar un decremento en la función de las razones de cambio de la altura (función velocidad), mientras que antes de tal instante debe haber un incremento.

Durante el vuelo habrá un instante en el cual el cohete alcanza su altura máxima y se detiene antes de caer: la razón de cambio de la altura (velocidad) es cero. Después, el cohete desciende, y esto significa una razón de cambio negativa. El valor absoluto de la razón de cambio aumenta, ya que el cohete cae cada vez más rápido. En el momento en el cual se abre el paracaídas para evitar el impacto, se frena la caída. La razón de cambio sigue negativa, pero su valor absoluto disminuye. Después de esta discusión cualitativa de la trayectoria, podemos intentar trazar una gráfica aproximada de la derivada [Fig. 5(b), (c)]. Es importante trazar esta gráfica directamente abajo de la primera. Una dificultad puede ser la magnitud que va en el eje vertical de la Figura 5(c). Si tomamos en cuenta que la razón de cambio es un cociente (diferencia en altura sobre diferencia en tiempo), queda claro que la razón de cambio de la distancia respecto al tiempo es la velocidad. Estimamos como la razón de cambio más grande

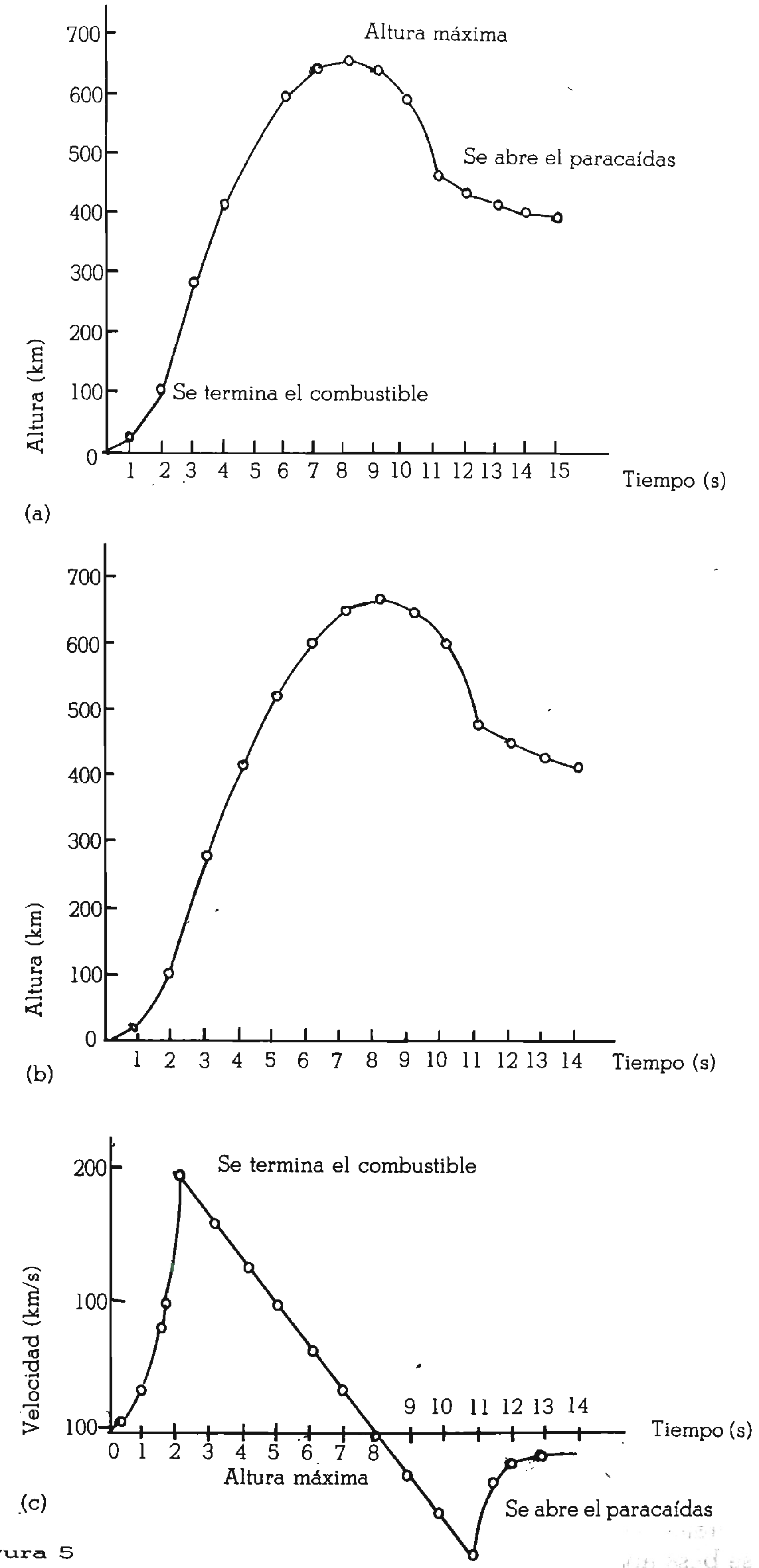

Altura máxima
Se abre el paracaídas
Se termina el combustible
Altura (km)
700
600
500
400
300
200
100
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
Tiempo (s)
(a)
Altura (km)
700
600
500
400
300
200
100
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
Tiempo (s)
(b)
Se termina el combustible
Velocidad (km/s)
200
100
100
0 1 2 3 4 5 6 7 8
9 10 11 12 13 14
Tiempo (s)
Altura máxima
Se abre el paracaídas
(c)

Figura 5

200 km/s, y como la más pequeña −100 km/s. Como gráfica de la derivada se obtiene la Figura 5(c).

Es muy importante practicar con los alumnos la interpretación de derivadas, al compararlas con las funciones que se derivan (Wenzelburger, 1992).

3.3 Otros Problemas Didácticos en la Introducción del Cálculo Diferencial

Estamos conscientes de que la comprensión significativa del Cálculo Diferencial trae más problemas consigo que el de la decisión simultánea, al buscar la conexión entre la función original y su derivada. Hay dificultades en el uso equívoco de reglas de derivación y en las aplicaciones. Por ejemplo: problemas de máximos y mínimos y problemas de razones de cambio relacionadas, en donde hay que encontrar relaciones entre variables y eliminar algunas para poder derivar. Otra dificultad didáctica representa la relación entre continuidad y diferenciabilidad. Pero aquí no se trata de analizar todos los posibles errores que pueden ocurrir en el aprendizaje del Cálculo, sino de abrir un camino significativo hacia las ideas fundamentales, y en esto la conexión entre función original y derivada desempeña un papel central.

Segunda Parte: Cálculo Integral

1. INTRODUCCIÓN

El Cálculo Integral, junto con el Cálculo Diferencial, son las dos áreas básicas de una rama de la matemática llamada análisis matemático. El Cálculo Diferencial se ocupa del estudio y de las aplicaciones prácticas de razones de cambio, y el Cálculo Integral ofrece métodos para la determinación de los resultados de estos cambios.

Al proponer un currículo matemático se plantea a veces la pregunta de la secuenciación del Cálculo Integral y del Cálculo Diferencial. Hay personas que defienden la opinión que el Cálculo Diferencial tiene que ir primero en un plan de estudios y otras que opinan lo contrario. Podemos citar al respecto al matemático inglés Greenhill (1982), quien dijo que al contemplar un bosque, uno no observa el crecimiento, sino primero lo que ha crecido. Esta cita relaciona muy bien la idea fundamental del Cálculo Diferencial con la del Cálculo Integral, ya que en el primero se estudia el proceso de crecer y en el segundo determinamos qué y cuánto creció. Otros argumentos que se emplean para justificar que el Cálculo Integral debería venir antes del Cálculo Diferencial, son geométricos e históricos: algunos métodos elementales de integración datan de 2000 años antes de la "*invención*" del Cálculo Integral, como lo muestran las obras de Eudoxo y Arquímedes.

A pesar de estas razones que aparentemente justificarían ubicar el Cálculo Integral antes del Cálculo Diferencial en los planes curriculares, la gran mayoría de autores de textos y planes de estudios prefiere introducir el Cálculo Diferencial primero y tratar la integración como un proceso "*inverso*" de la derivación. Esta tradición se basa aparentemente en Newton (1711), quien destaca en sus tratados dos problemas. El objeto del primero es determinar la "*fluxión*" de una magnitud dada, o más general, la relación entre *fluxions*, siempre que la relación de *fluents* esté dada. El término *fluent* significa magnitud "fluente" o cambiante, y "*fluxión*" es la rapidez de la magnitud fluente, es decir, su razón de cambio [Ball, 1908, 1960 (2)]. Newton delinea, con este su primer problema, lo que representa actualmente el Cálculo Diferencial.

El objeto del segundo problema es el de determinar la relación entre *fluentes* dada una ecuación que expresa la relación entre *fluxiones*. Esto corresponde a los métodos de integración, que Newton llama *métodos de cuadratura*, o a la resolución de ecuaciones diferenciales, que Newton llama el *método inverso de las tangentes*. El método de Newton y, de la misma manera, el procedimiento de Leibnitz, tenían —entre otros— el propósito de contestar preguntas que científicos ya se habían hecho en el siglo XIV, como, por ejemplo, si un objeto se mueve con velocidad variable, ¿qué distancia recorre en un intervalo dado de tiempo?; si la temperatura de un cuerpo varía de una parte a otra, ¿cuál es la cantidad total de calor presente en el cuerpo?

Aparte de responder a preguntas como éstas, la contribución más importante de Newton y Leibnitz consiste en la estructuración de problemas y métodos *diversos*, de manera que se formaron los fundamentos de una disciplina teórica y práctica de gran trascendencia, que es aplicable a muchas situaciones en donde se explora la naturaleza misma del universo.

Siempre que una magnitud regida por un principio continuo cambia (y muchos fenómenos naturales son de este tipo), podemos recurrir al Cálculo Diferencial para evaluar razones de cambio. A partir de la razón de cambio, se puede, con los métodos del Cálculo Integral, obtener la magnitud inicial. Expresado brevemente, el Cálculo Integral es un método que permite hallar la relación entre magnitudes que cambian según ciertas reglas.

En la mecánica se pueden determinar distancias integrando velocidades, y velocidades integrando aceleraciones. En geometría podemos reducir a la integración los métodos de "*cuadratura*" y determinación de áreas con sumas. Cavalieri (1635) y otros mostraron que a partir del cociente diferencial y valores correspondientes de magnitudes se puede encontrar la relación entre las magnitudes mediante el uso de sumatorias. Pero este proceso algebraico de sumar resulta ser muy complicado y requiere de muchas fórmulas. Por ello era crucial para un desarrollo de procedimientos ágiles en Cálculo Integral, el reconocimiento de la reversibilidad de la derivación.

Podemos concluir que el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral consisten en métodos matemáticos importantes estrechamente ligados entre sí.

El hecho de que Newton y Leibnitz no buscaban la fundamentación lógica de sus métodos, no los inhibió en recurrir con gran éxito a su intuición. La creatividad en matemáticas a veces depende más de conocimientos surgidos de una comprensión intuitiva, que de un rigor lógico absoluto. El Cálculo Integral y Diferencial en sus inicios no fue muy elegante y refinado pero, sin embargo, sumamente eficaz. Obviamente, después de 150 años, notamos en el desarrollo histórico una creciente precisión y sofisticación de los métodos propuestos en aquella época. En vista de lo dicho anteriormente, se justifica desde el punto de vista didáctico, regresar a las fuentes del Cálculo Integral, y poner en relieve sus conceptos básicos, sin tomar el camino a través de una fundamentación matemática estricta, tal como el estudio formal de funciones, continuidad y definiciones de límites con ε y δ.

Se desea evitar que el alumno llegue a repetir mecánicamente que la integral de x^3 es igual $\frac{x^4}{4}$ + C, y que la derivada de $\frac{x^4}{4}$ + C es otra vez x^3, si haber entendido lo que es una derivada y una integral. El enfoque propedéutico al Cálculo Integral que se propone, es intuitivo y relacionado con aplicaciones, pero también lento e inicialmente sin mucho rigor matemático. Sin embargo, se espera que las ideas aquí presentadas puedan ayudar al profesor que quiere hacer el Cálculo Integral más comprensible para sus alumnos.

De cierto modo se reconstruye didácticamente el desarrollo histórico del Cálculo Integral, ya que se parte de sumas. Sin embargo, se realiza esta tarea bajo el lema "*efectos de cambios*", para aludir a la relación existente entre los cálculos integral y diferencial. La discusión del Cálculo Integral en este trabajo se restringe a integrales de Riemann de funciones elementales que se consideran continuas o con un número finito de discontinuidades.

Primeramente se introduce la integral definida que se presenta como límite de una suma (interpretado geométricamente como área). Se determinan las sumas con métodos gráficos y numéricos, después algebraicamente para intervalos dados finitos. Al trabajar con intervalos semiabiertos, resulta una relación funcional entre el valor de la suma y la longitud del intervalo. De esta manera se prepara el concepto de la integral indefinida.

2. LA IDEA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

2.1 El Concepto de "efectos de cambio"

El Cálculo Integral se introduce normalmente como el método "*inverso*" del Cálculo Diferencial, lo cual se puede justificar y comprobar desde el punto de vista matemático. Sin embargo, para muchos alumnos permanece el concepto abstracto de un Cálculo Diferencial "*inverso*" sin significado, ya que no pueden relacionar fácilmente la derivación y la integración como tales procesos inversos. Solamente una construcción de conceptos que se apoya en la intuición y visualización, hace que ésos sean accesibles para los estudiantes.

Igual que en el caso del Cálculo Diferencial, está el concepto fundamental del Cálculo Integral presente en las experiencias diarias de muchas personas, aunque quizás en forma inconsciente. También hay actividades sencillas que ayudan a objetivizar este concepto. Una didáctica de la matemática puede proponerse la tarea de tomar como punto de partida los preconceptos de la idea fundamental del Cálculo, y hacerla consciente a través de un proceso de reflexión.

Esta idea fundamental del Cálculo Integral es la determinación de *resultados o efectos de cambios o procesos*. Mientras que en el Cálculo Diferencial interesa el cambio instantáneo de una magnitud, usamos el Cálculo Integral para determinar los resultados totales de procesos de cambio.

La determinación de "*resultados totales de procesos de cambio*" está presente de una u otra forma en la vida diaria y siempre se procede de la misma manera: se considera primero un "*corte*" instantáneo del proceso de cambio. Después uno se refiere a experiencias previas con este proceso, las que indican cómo transcurre normalmente; por ejemplo, visto gráficamente con pendiente grande o pequeña. A partir de este "*corte momentáneo*" es posible hacer la suma de los cambios durante un intervalo más largo y determinar el resultado.

Los vinicultores toman pruebas de los vinos, y a partir del contenido alcohólico en un momento dado, deducen conclusiones acerca del añejamiento de la bebida, ya que conocen todo el proceso de cambio que experimenta ésta. Al descargar un acumulador de automóvil, es suficiente conocer una descarga instantánea y la curva que describe el proceso de descarga, para saber cuándo se terminará su capacidad de almacenamiento de carga eléctrica.

Conocer resultados de cambios es muy importante para el suministro de electricidad. Si sabemos la razón de cambio mensual del consumo de energía eléctrica en kilowatts-hora y si podemos suponer un incremento constante, es posible pronosticar las necesidades para un intervalo de tiempo determinado.

La planeación para la producción de materias primas sería casi imposible si no se usara la información que representan las tasas instantáneas de consumo.

2.2 Dos ejemplos simples del cálculo de resultados de cambios

Se usará el ejemplo de una cuenta bancaria y del movimiento de un vehículo para aclarar los conceptos que son importantes para entender la idea fundamental del Cálculo Integral. Hablaremos de resultados, efectos, o de efecto total de los cambios. Un estado de cuenta reporta diversas entradas o salidas de dinero cada día; en general, durante un mes. La Figura 6 muestra los movimientos de dinero en miles de pesos por día durante una semana.

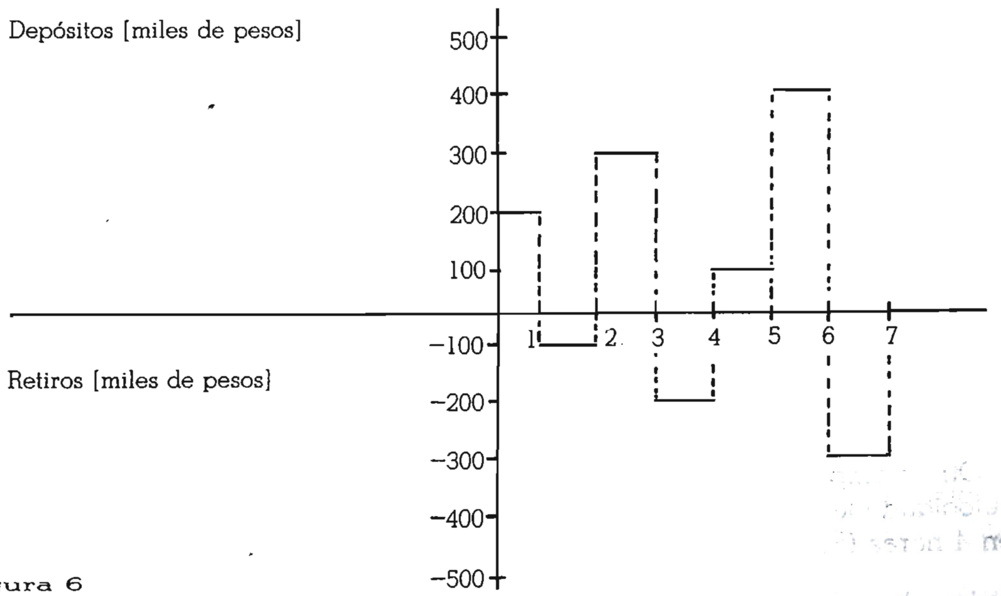


Figura 6

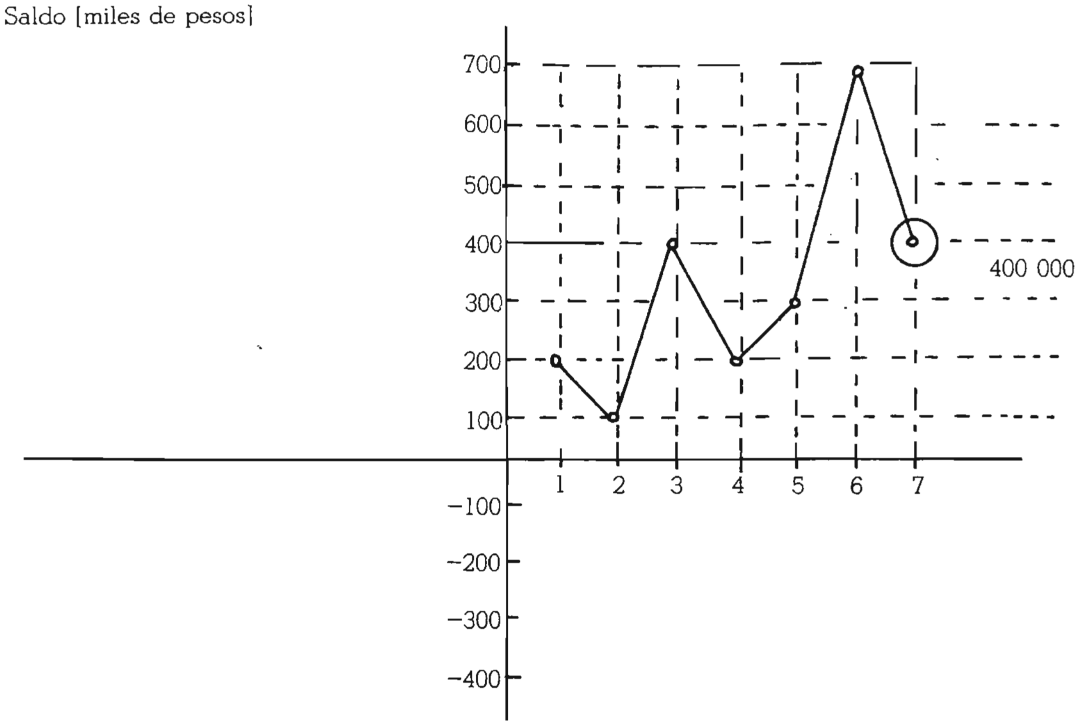


Figura 7

Los movimientos diarios representan la razón de cambio promedio por día; es decir, se calcula como el total de depósitos y retiros para un cierto día. Pero a un cliente de un banco no le interesan sólo los movimientos diarios, sino su saldo al final de la semana, y queremos calcular los *"efectos de los cambios"* y el *"efecto total"*.

La Figura 7 muestra los saldos al final de cada día y a la semana. Para calcular se procede en forma muy natural: Al saldo inicial de 200,000.00 se le restan 100,000.00, se suman, 300,000.00, etc.

En cuanto al cálculo de resultados acumulados de razones de cambio, esto se puede interpretar como una suma de productos:

200,000 (pesos/día) × 1 día + [−100,000 (pesos/día)] × 1 día + 300,000 (pesos/día) × 1 día + [−200,000 (pesos/día) × 1 día + 100,000 (pesos/día) × 1 día + 400,000 (pesos/día) × 1 día + [−300,000 (pesos/día) × 1 día = 400,000 pesos.

En general, la suma de los productos de las razones de cambio multiplicados por el intervalo, es el resultado acumulado o total de un proceso de cambio.

Otro ejemplo sería el movimiento de un automóvil. La Figura 8, muestra su velocidad media en cada hora. Se quiere calcular la distancia total recorrida en 4 horas (Fig. 9).

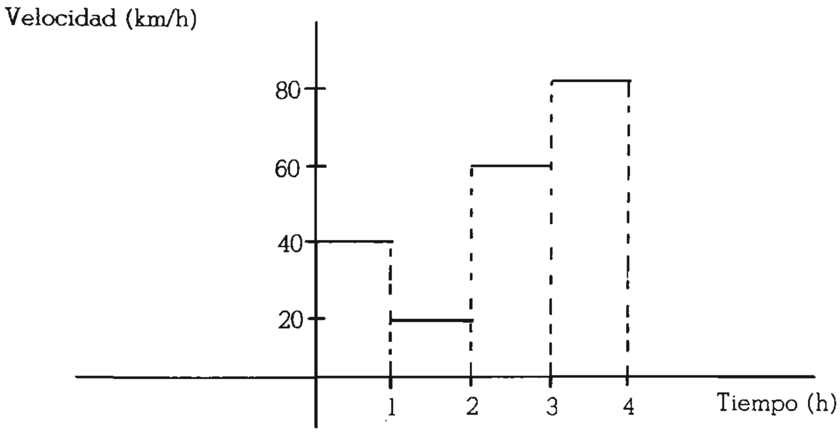


Figura 8

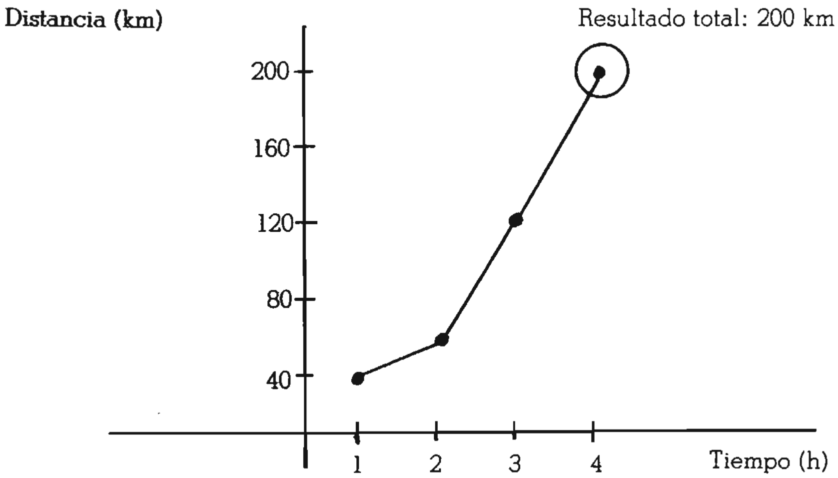


Figura 9

Otra vez se multiplica la razón de cambio de la posición del automóvil, es decir, su velocidad en cada intervalo, por el intervalo:

$$40 \text{ km/h} \cdot 1 \text{ h} + 20 \text{ km/h} \cdot 1 \text{ h} + 60 \text{ km/h} \cdot 1 \text{ h} + 80 \text{ km/h} \cdot 1 \text{ h} = 200 \text{ km}$$

En la gráfica distancia-tiempo, el último punto representa el resultado total del cambio. En estos dos ejemplos simples está presente la idea fundamental del Cálculo Integral, pero el método indicado se puede aplicar sólo a casos en los cuales la razón de cambio se considera constante en todo un intervalo. Sin embargo, la mayoría de las aplicaciones importantes del Cálculo Integral no son tan sencillas, sino las funciones que representan razones de cambio tienen gráficas poligonales o curvas.

2.3 Dos ejemplos más complejos del cálculo de resultados de cambios

En el siguiente ejemplo se trata la producción y venta de un artículo. La Figura 10 muestra el número de artículos vendidos por año. Se desea conocer la venta total en 4 años.

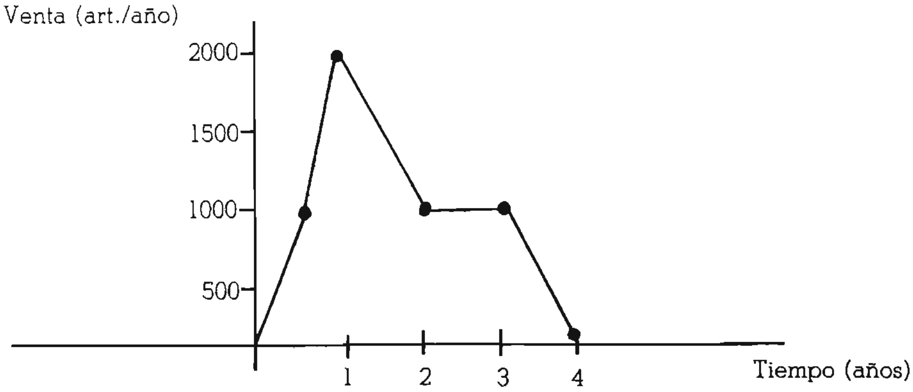


Figura 10

Se observa que las ventas aumentan durante el primer año, disminuyen en el segundo, se mantienen constantes en el tercero y decrecen en el cuarto, hasta que el producto es retirado del mercado.

Para calcular el número total de artículos vendidos, no se puede aplicar directamente el método de la suma de productos descrito en la sección anterior, pero el método de aproximación que se usa, es básico para la comprensión intuitiva del Cálculo Integral.

Reemplazamos la gráfica en la Figura 10 por la indicada en la Figura 11. Para lograr esto, dividimos el periodo de 4 años en intervalos de medio año. Luego buscamos el punto medio de cada intervalo, y se toman las ventas en este punto como representativas para todo el intervalo. Después se forma nueva-

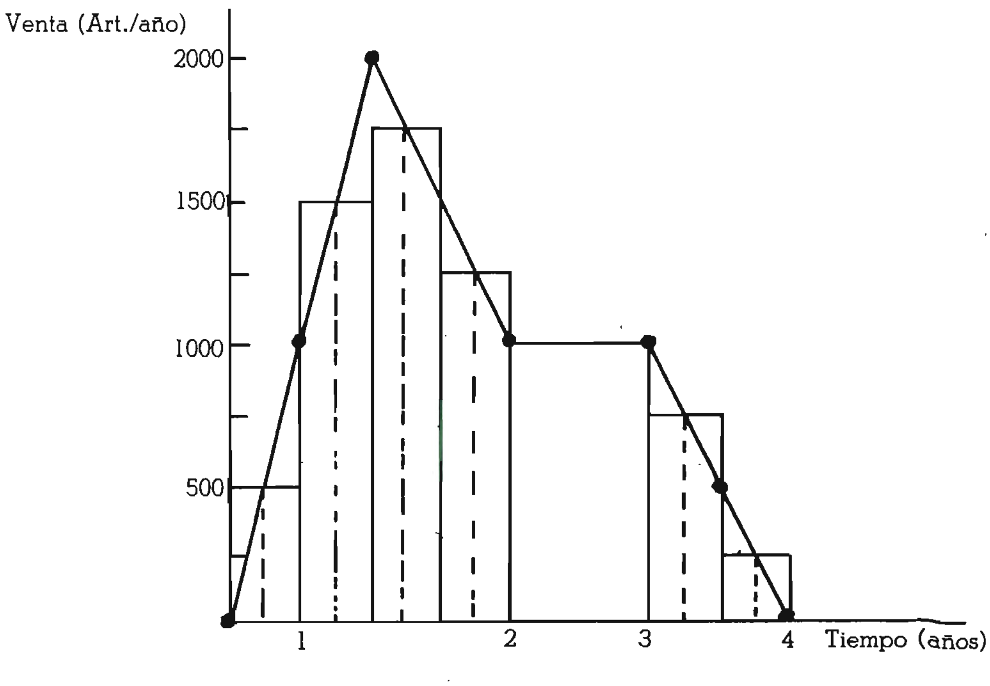


Figura 11

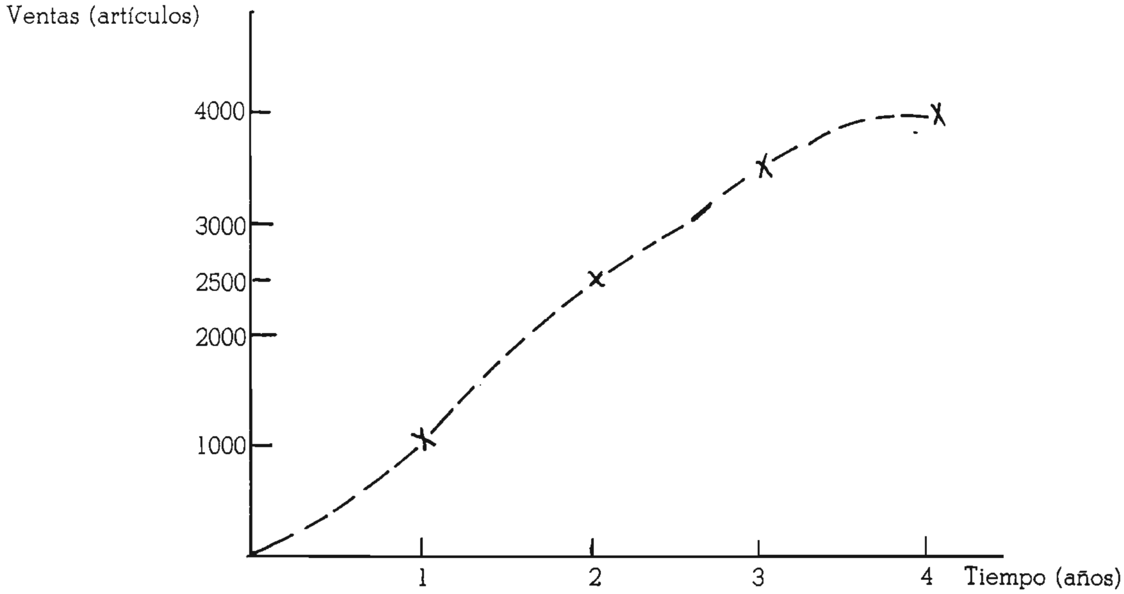


Figura 12

mente el producto de cada intervalo (½ año) por las ventas, y sumamos todos los productos para obtener la venta total:

$$\tfrac{1}{2}\,[\text{año}] \times 500\ (\text{art./año}) + \tfrac{1}{2}\cdot 1500 + \tfrac{1}{2}\cdot 1750 + \tfrac{1}{2}\cdot 1250 + 1\cdot 1000 + \tfrac{1}{2}\cdot 750 + \tfrac{1}{2}\cdot 250 = 4000 \text{ artículos}$$

Es posible representar gráficamente la acumulación de los resultados de este proceso de cambio (Fig. 12):

TABLA 1

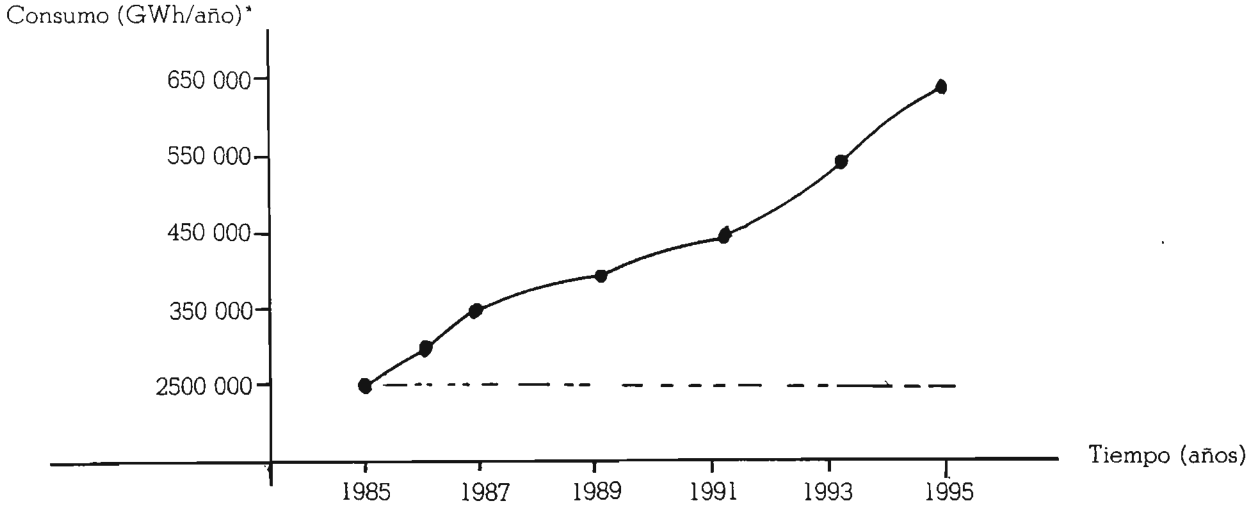
Ventas en 1 año	1000
Ventas en 2 años	2500
Ventas en 3 años	3500
Ventas en 4 años	4000

En el ejemplo siguiente se consideran razones de cambio que están representadas por curvas. La gráfica (Fig. 13) representa las tasas estimadas de incremento del consumo de energía eléctrica en un país, de 1985 a 1995.

Se desea calcular el consumo total en estos diez años. Datos de este tipo se manejan en la planificación de redes de suministro eléctrico.

Nuevamente aproximamos la curva que representa las tasas de consumo anual por una "*escalera*", a fin de poder calcular el efecto total de este proceso de cambio del consumo de energía. Hay varias maneras de trazar las "*escaleras*" (como indican las Figuras 14 y 15): una se trazó bajo la curva, y otra, por encima.

En la Figura 14 nos fijamos en la tasa de consumo al final de cada intervalo de un año y la tomamos como *representativa* para todo el año. En la Figura



* GWh = gigawatt-hora, 1 millón de KWh.

Figura 13

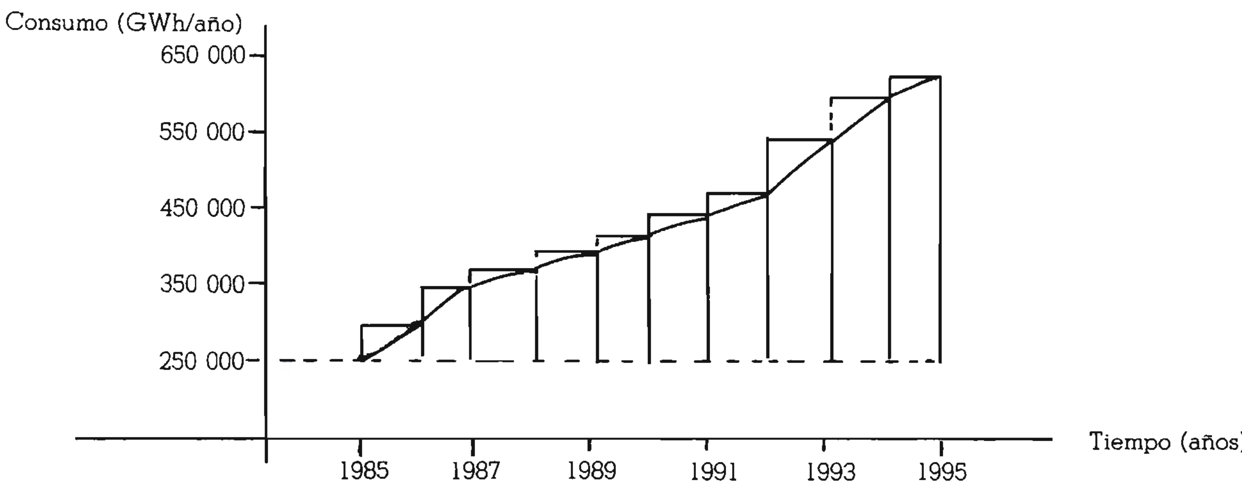


Figura 14

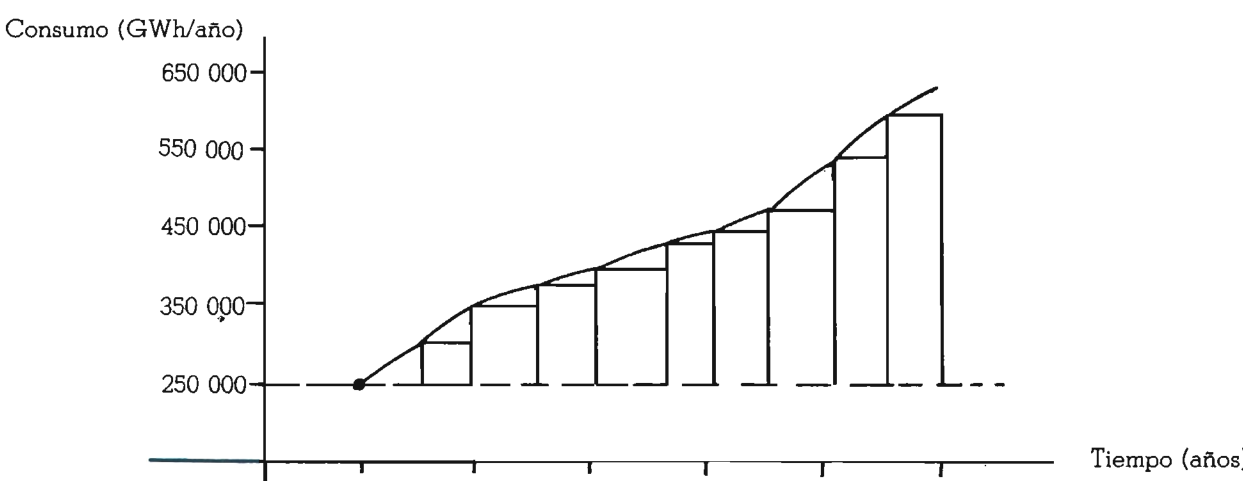


Figura 15

15 se toma la tasa de consumo al inicio del año como representativo para el año. Con base en estas gráficas escalonadas podemos calcular dos aproximaciones del consumo total.

Consumo total según la Figura 14:

$$300\,000\ (\text{GWh/año}) \times 1\ [\text{año}] + 350\,000 \times 1 + 550\,000 \times 1 + 560\,000 \times 1 + 580\,000 \times 1 = 4\,520\,000\ \text{GWh}$$

Consumo total según la Figura 15:

$$250\,000\ (\text{GWh/año}) \times 1\ [\text{año}] + 300\,000 \times 1 + 560\,000 \times 1 = 4\,190\,000\ \text{GWh}$$

En cada caso se multiplica la tasa de consumo anual por el intervalo (1 año) y se suman luego esos productos.

Obviamente el valor 4 520 000 GWh es demasiado grande, y el valor 4 190 000 GWh, demasiado pequeño. El valor real C del consumo cae en el intervalo: $4\,190\,000 < C < 4\,520\,000$.

A partir de los valores de la Tabla 2 puede trazarse una gráfica de los consumos acumulados año por año. El punto final de esta gráfica representa el consumo total en diez años.

TABLA 2

	Periodo	Consumo según Fig. 9
Hasta 1986	1 año	300 000
Hasta 1987	2 años	650 000
Hasta 1988	3 años	1 050 000
Hasta 1989	4 años	1 480 000
Hasta 1990	5 años	1 920 000
Hasta 1991	6 años	2 370 000
Hasta 1992	7 años	2 830 000
Hasta 1993	8 años	3 380 000
Hasta 1994	9 años	3 940 000
Hasta 1995	10 años	4 520 000

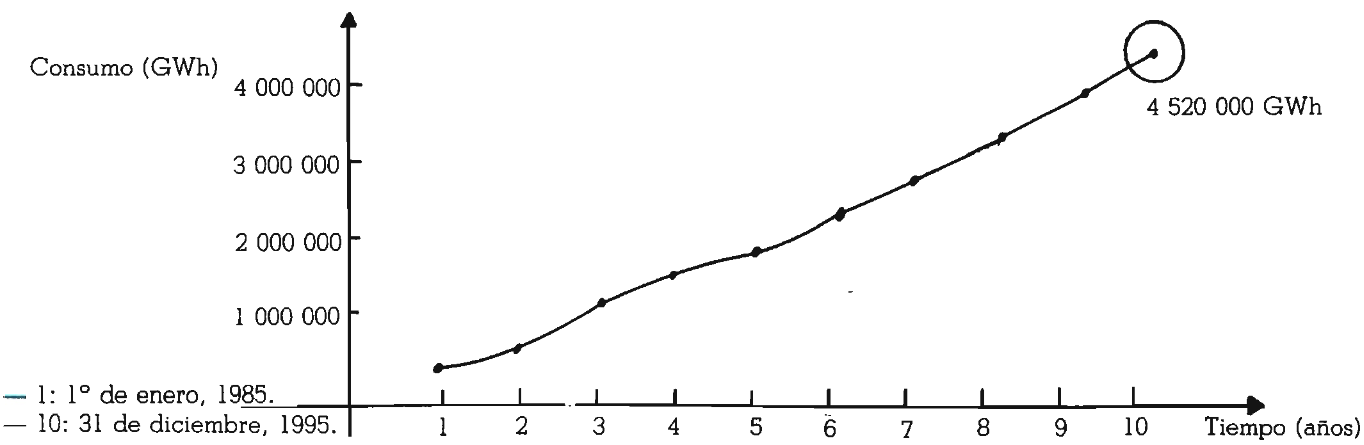


Figura 16

Después de analizar varios ejemplos de *"integración gráfica"* se relacionan los resultados acumulados con el cálculo de áreas. En seguida se introduce la noción de que $\sum_{i=1}^{n} f(x)\,\Delta x$ se aproxima a la $\int_a^b f(x)\,dx$ para n muy grande, con lo cual se introduce la noción de integral definida.

Se hace variar b y se tiene a la noción de integral indefinida. El enfoque es intuitivo, gráfico y siempre a través de problemas concretos.

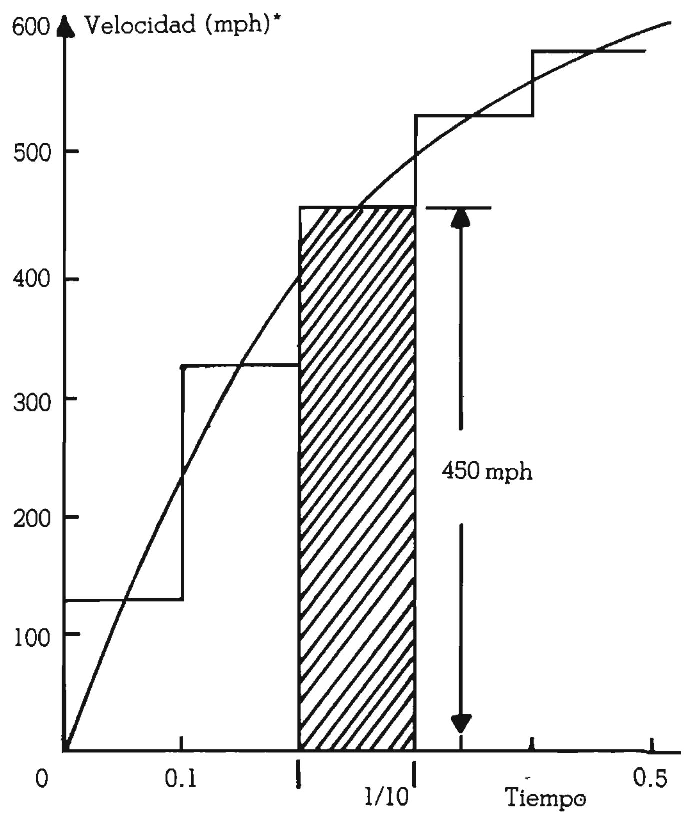
2.4 Determinación de áreas

En lo anterior usamos una *"escalera"*, de rectángulos para aproximar el resultado *"acumulado"* de un proceso que varía en un intervalo de tiempo.

Ahora, aparentemente vamos a cambiar de tema, pues calcularemos áreas. Pero a pesar de las apariencias, se harán los mismos tipos de cálculo que antes, porque los resultados de cambios y las áreas son desde el punto de vista matemático, exactamente lo mismo. En geometría se aprende lo que es el área de una figura plana, y también se dan fórmulas para calcular las áreas de triángulos y cuadriláteros.

Aquí se explorará cómo determinar áreas de figuras más complicadas; por ejemplo, el área bajo una curva cualquiera de la cual en algunos casos conocemos la ecuación y en otros nada más su gráfica.

La figura corresponde a la gráfica de la velocidad de vuelo de un avión.



* mph = millas por hora (mi/h)

Figura 17

Hay que considerar las siguientes preguntas:

a) ¿A qué corresponde físicamente el área del rectángulo marcado en la figura?

b) ¿Qué representa físicamente el área total bajo la curva en la figura?

c) ¿Cómo podemos obtener un resultado más exacto para el área bajo la curva (o la distancia total recorrida)?

En los ejemplos anteriores se vio que el área bajo de la curva de las razones de cambio representa el resultado de los cambios. Si incrementamos el número de intervalos, es decir, hacemos una subdivisión más fina, obtenemos una mejor aproximación al valor real.

Los dos procedimientos:

— Determinár el área debajo de la curva y
— Obtener la distancia total recorrida como en el ejemplo anterior son exactamente lo mismo.

Hemos establecido aquí la idea fundamental del Cálculo Integral: el área bajo una curva se puede aproximar con rectángulos, cada vez más estrechos y esta aproximación puede hacerse tan exacta como se la necesite.

La interpretación del "*área*" depende del problema planteado (puede representar una distancia, una velocidad final, el trabajo físico, las ganancias de una compañía, etc.). Todo depende de lo que represente la curva o función que se está "*integrando*".

2.5 La integral y la función área

Vimos cómo aproximar el área bajo una curva (o cualquier cantidad que puede ser representada como un área) con "*escaleras*" de rectángulos.

Ahora se introducirá una nueva notación para formalizar este procedimiento y aplicarlo para resolver diversos problemas.

Vamos a emplear los siguientes símbolos:

Δx	:	ancho de un rectángulo
n	:	número de rectángulos
$f(x)\Delta x$	:	área de un rectángulo
$f(x_1) = y_1$	:	altura del 1er. rectángulo
$f(x_2) = y_2$	:	altura del 2o. rectángulo
$\sum_{i=1}^{n} f(x)_i \, \Delta x$	:	suma de las áreas de n rectángulos
$\int_a^b f(x)dx$	:	integral de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$

Si se retoma el ejemplo de la distancia recorrida por un avión, puede escribirse una fórmula para la distancia total recorrida usando la nueva notación.

El proceso de encontrar el valor al cual se aproxima la sumatoria

$$\sum_{i=1}^{n} f(x)_i \, \Delta x, \text{ cuando } \Delta x \text{ tiende a cero } (\to 0).$$

se llama *integración*, y el resultado de este proceso se llama *integral*.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x)_i \, \Delta x \quad \longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx$$
$$\Delta x \to 0$$

Gráficamente esto se puede interpretar como sigue:

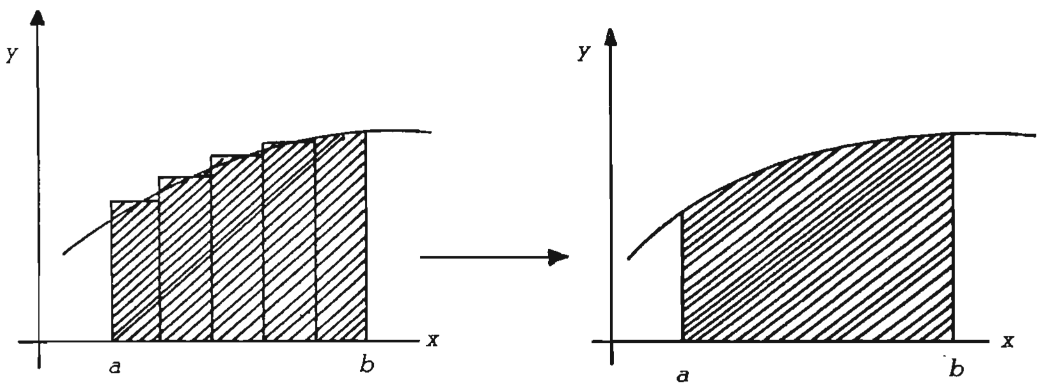


Figura 18

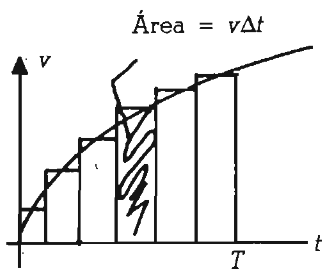
Utilizando símbolos y palabras:

la suma de las áreas de los rectángulos entre a y b	se aproxima al	área bajo la curva entre a y b
$\sum f(x)\, \Delta x$	$\to$	$\int_a^b f(x)\, dx$

En muchas aplicaciones de la integración no se está interesado en el área bajo la curva, sino en lo que tal área representa:

1. Si se grafica la velocidad de un automóvil con respecto al tiempo, el área representa la distancia recorrida en el tiempo T, variable:

   Distancia recorrida hasta el tiempo $T = s_{(T)} = \int_0^T v dt$



   $s_{(T)}$ expresa el recorrido en función del tiempo T.

Figura 19

2. Si se grafica la intensidad de flujo q con la cual cae agua a un tanque, con respecto al tiempo, el "*área*" representa el volumen V de agua existente en el tanque al tiempo T.

   Volumen de agua
   al tiempo $T = V_{(T)} = \int_0^T q\,dt$

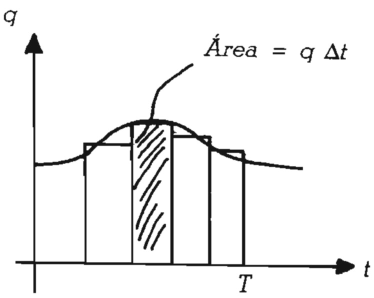


Figura 20

$V_{(T)}$ expresa el volumen de agua en función del tiempo T.

En los ejemplos anteriores se evalúa una función que puede ser un saldo, un consumo, una distancia recorrida, etc., mediante un proceso que habíamos llamado integración. Por eso, a esta función se le llama *función integral* (o también *antiderivada*).

2.6 Integración y diferenciación como procesos opuestos

Empezamos con una gráfica o una función, se integra, y después se deriva la integral. El resultado es la gráfica o función original.

Este hecho se expresa en el **Teorema Fundamental del Cálculo**, que se puede representar con el siguiente diagrama:

Una función o gráfica	Integración →	La integral de la función	Derivada →	La función original

La figura ilustra esto:

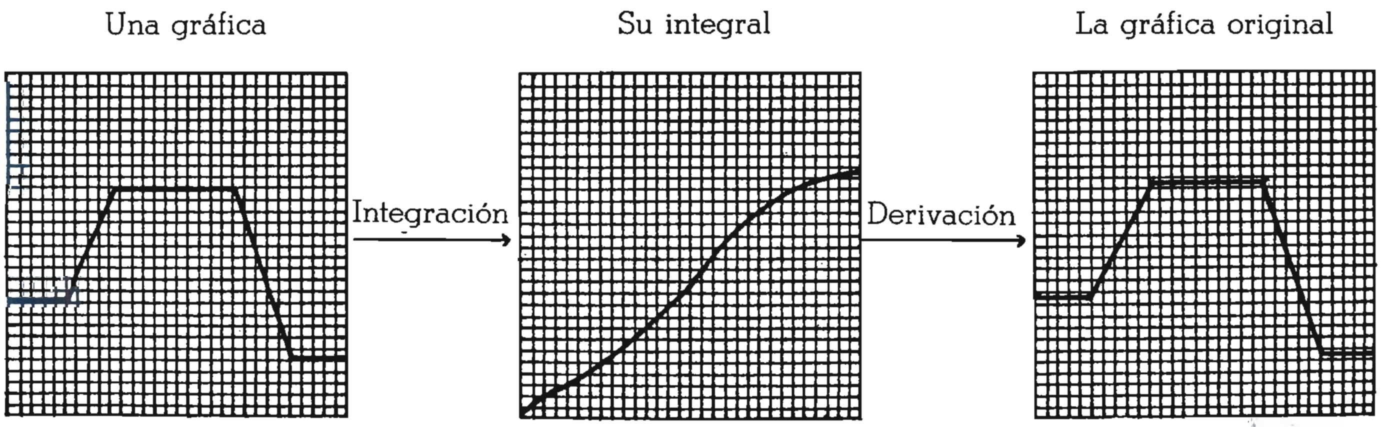


Figura 21

La integración también se llama a veces *antiderivación*. La *antiderivada* de una función es una nueva función cuya derivada es la función original.

Por ejemplo, una antiderivada de x es $\frac{x^2}{2}$, porque la derivada de $\frac{x^2}{2}$ es x.

Veamos el diagrama de la Figura 22.

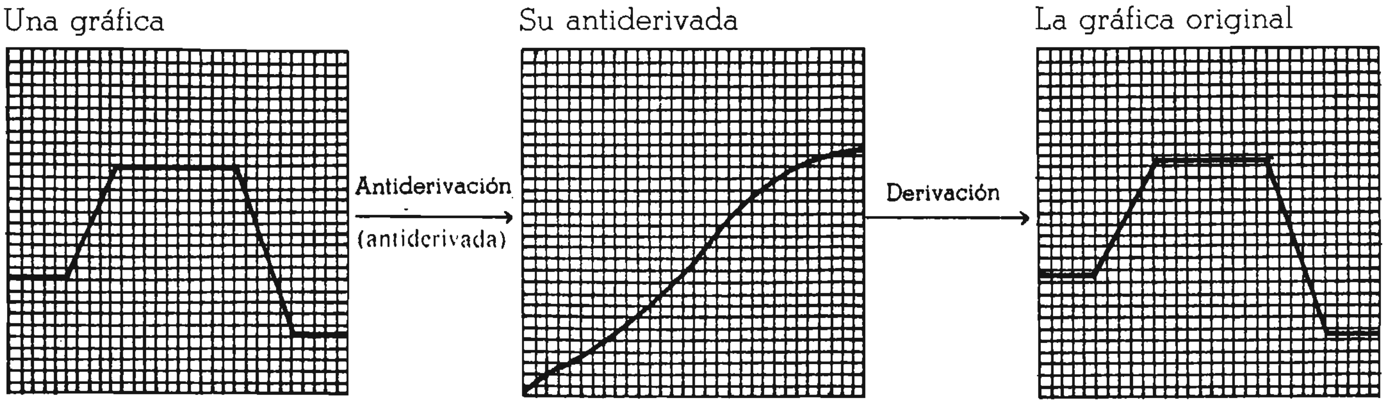


Figura 22

Resumen de las ideas fundamentales del Cálculo

Integración

(a) Método para obtener una distancia recorrida si conocemos la variación de la velocidad.
En general: Un método para determinar un resultado acumulado de una razón de cambio.

(b) El número al cual se tiende cuando $\Delta x \rightarrow 0$

(c) Un método para evaluar áreas.

Diferenciación

(a) Método para obtener una velocidad si conocemos la variación de la distancia recorrida.
En general: Un método para determinar la razón de cambio a partir de un resultado acumulado.

(b) El número al cual tiende un cociente de diferencias cuando $\Delta x \rightarrow 0$

(c) Un método para evaluar pendientes.

BIBLIOGRAFÍA

Ball, Rouse W.W. *A short account of the history of mathematics*, New York, 1960. (Dover).

Beatty, William E.; Gage, R. William. *Introductory calculus for business and economics*. Morristown N.J., 1973. (General Learning Press).

Boyer, Carl B. *The history of the calculus and its conceptual development*. New York, 1959. (Dover).

Bussmann, Hans; Malwitz-Schütte, Magdalena; Wenzelburger, Elfriede. Uberden Zusammenhang Zwischen "Bedeutung" von Unterrichtsinhalten und kognitiven Handlungsformen". In: *Zeitschrift für Pädagogik*, 22 (1976) 6, S. 881-888.

Bussmann, Hans; Wenzelburger, Elfriede. *Anschauliche Differentialrechnung*, München, 1977.

Campbell, Hugh G.; Spencer, Robert E. *A short course in calculus with applications*. New York .1975 (Macmillan).

Freudenthal, Hans. *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart 1973.

Kiel Karl A., et al.: *Analysis 1*. Mun chen, 1976.

Kiel Karl A., et al.: *Infinitesimalrechung*. München 1975.

Kirsch, Arnold. "Ein geometrischer Zugang zu den Grundbegriffen der Differentialrechnung". In: *Der Mathematik-Unterricht*, 6. 1960. Heft 2.

Koch, Aries. "Eine propädeutische Behandlung der Analysis". In: *Der Mathemathik Unterricht* 5, 1968, S. 12-37.

Lietzmann, W. *Methodik des mathematischen Unterrichts*. (2. Teil). Leipzin, 1923.

Locher-Ernst, Louis. *Differential-und Integralrechnung im Hinblick auf ihre Anwendungen.* Basel-Stuttgart, 1948.

Loomis, Lynn. *Introduction to calculus*. Reading, Mass. 1973 (Addison-Wesley).

Luschberger, Helmut, et al.: "Mathematik in der studienbezogenen Sekundarstufe II: Uberblick über den Stand der didactischen Diskussion. In: *Die Deutsche Berufs-und Fachschule*, 72 (1976) 9, S. 665-671.

Mayer, J.T.: Vollständiger Lehrbegriff der höbern Analysis. Göttingen 1918.

Merriell, David M. *Calculus —A programed text*. Vol. 1. Menlo Park Ca. 1974. (Benjamin).

National Council of Teachers of Mathematics: *Historical topic for the mathematics classroom*. Washington, 1969.

Pickert, Günter. "Analysis in der Kollogstufe". In: *Jahresbericht*, DMV 77, 1976, S. 173-192.

Schools Council sixth Form Mathematics Project: *Calculus Applicable* (*Students' Unit*). London, 1976 (Heinemann).

Schweizer, Wilhelm, et al.: *Analysis, Mathematisches Unterrichtswerk*. Stuttgart, 1968.

Smith, D.E. *History of mathematics*. Vol. 2. New York 1925 (Dover).

Wagner, Klaus. *Analysis I (Differentialrechnung)*. Düsseldorf, 1974.

Walton, William U., et. al.: *Module I-Integration*. EDC/Project Calc., Newton Mass., 1975.

Walton, William U., et. al.: *Module II-Diferentiation*. EDC/Project CALC. Newton Mass., 1975.

Walton, William U., et. al.: *Module III, Relating Integration and Differentiation EDC/Project CALC. Newton Mass. 1975.*

Wenzelburger, Elfriede. *Didáctica del Cálculo Diferencial*. México. 1992. (Grupo Editorial Iberoamérica), 1992.

Wiedling, Hartmut. "Zur Rolle der anwendungsbezogenen Mathematik in Schulunterricht". In: PM17, 1975/76, S. 143-148.

Wörle, Karl, et. al.: *Infinitesimalrechnung*, München 1974.