

Experiencias con el Uso de un Graficador en la Enseñanza del Cálculo en la Escuela Nacional Preparatoria

INTRODUCCIÓN

En los últimos años la Educación Matemática ha cobrado mayor importancia como disciplina que pretende explicar los procesos que ocurren durante la enseñanza de la matemática en el medio escolar. Existen numerosos trabajos de investigación en ese sentido, tanto a nivel internacional como nacional. Citemos por ejemplo los trabajos de Shoenfeld, Herscovics, Bergeron, Orton, Krutetskii y Freudenthal, Howson, entre otros. Algunos se han desarrollado en áreas muy específicas como la visualización y el uso de recursos electrónicos en la educación [Moses (1982) y Tall (1985)].

Uno de los procesos que resulta de particular interés en el bachillerato es el del aprendizaje de conceptos de Cálculo Diferencial. Es un problema que se presenta en nuestro país desde hace muchos años, la forma tradicional de su enseñanza, así como los programas diseñados para tal efecto, promueven más la manipulación de representaciones simbólicas no significativas para el alumno, que la comprensión de los conceptos de manera que los puedan interpretar y aplicar (Wright, 1987). Otro aspecto de la problemática del aprendizaje es la falta de motivación e interés, así como la participación pasiva del alumno (Chizón, 1990).

Hoy día es necesario utilizar un ambiente o entorno que promueva en él actitudes de investigación y exploración, dentro de un plan de trabajo que le ayude a organizar sus actividades, señalar los aspectos sobresalientes y evitar que lleve a conclusiones equivocadas.

La computadora personal forma parte de ese ambiente enriquecido que ayuda a que el alumno use las matemáticas para transmitir significados, explicar o ilustrar fenómenos y predecir resultados (Wright, op. cit.)

Patricia E. Balderas

Maestría en Educación Matemática
Universidad Nacional Autónoma de México

Un logro positivo del uso de la microcomputadora en el aprendizaje es el desarrollo de la habilidad matemática cuyos componentes, según Krutetskii, son las habilidades para: extraer la estructura formal de un problema matemático y operar con ella; generalizar a partir de los resultados matemáticos; operar con símbolos, incluyendo números; razonar lógicamente; acortar procesos del pensamiento; ser flexible en relación con el cambio de enfoque y con ello invertir secuencias del pensamiento; adquirir claridad, sencillez, economía y racionalidad en argumentos y demostraciones matemáticos. Además de la habilidad espacial y una buena memoria para el conocimiento e ideas matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas, desde el punto de opinión constructivista y reflexivo, en el nivel medio superior, puede valerse de la computadora para alentar el desarrollo de las habilidades espaciales, del razonamiento lógico, de la generalización, así como de la formación de conceptos que la mayoría de las veces no se logra por la carencia de conocimientos previos, los cuales pueden adquirirse a través de la simulación de situaciones significativas para el alumno.

El uso de un graficador está considerado en el marco conceptual (teórico) planteado anteriormente. Es decir, se trata de incidir mediante su uso, en la adquisición de habilidades perceptivas y matemáticas, así como de conceptos de Cálculo, por medio de la construcción de los mismos, como resultado de las actividades del alumno, organizadas y diseñadas de acuerdo con el graficador.

Un ejemplo del uso de un graficador puede verse en la graficación de polinomios (Kennedy, 1981) y en el estudio de la función mediante recursos gráficos (Wenzelburger, 1990). Existen varios graficadores, como el Math Cad, Calcula, Calculus, Eureka, Cactusplot, etc. Se seleccionó el Cactusplot, "A mathematics utility", porque permite la graficación simultánea de más de una función y tiene la posibilidad de trazar secantes dando un incremento en la variable, situación que está íntimamente ligada al concepto de derivada. Por tanto ofrece una simulación adecuada para la interpretación geométrica de ésta, para identificar funciones crecientes o decrecientes y comparar la gráfica de la función con la de su derivada.

Las reflexiones anteriores nos llevan a plantearnos la interrogante: ¿cuáles son los efectos del uso de un graficador en el aprendizaje de conceptos de Cálculo en la educación media superior?, ¿en particular los que se refieren a la interpretación geométrica de la derivada o la determinación de los máximos de funciones elementales?

METODOLOGÍA

Para investigar los efectos del uso de la computadora en el aprendizaje de los conceptos que se refieren a la interpretación geométrica de la derivada y la determinación de los máximos y mínimos de funciones elementales, se realizaron dos experimentos con alumnos de la Escuela Nacional Preparatoria, Plantel 5.

Estudio Piloto

El primero fue un estudio piloto (EP) con 29 alumnos del grupo 621 (área Químico-biológica) del ciclo escolar 89/90, quienes durante cinco sesiones vespertinas,

una por día y fuera del horario normal de clases del curso de Matemáticas VI (Cálculo Diferencial e Integral), realizaron las actividades que más adelante se detallan.

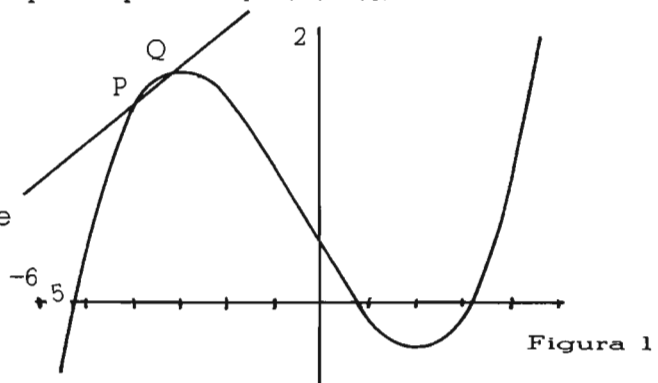
En dicho estudio se pretendió probar los materiales didácticos y los instrumentos de evaluación. El material didáctico se compuso de una guía para realizar actividades con el graficador Cactusplot, cuyos objetivos fueron la comprensión del significado geométrico de la derivada y la determinación de los máximos y mínimos relativos de funciones elementales. Se utilizó un diseño pre-experimental (*pretest-postest*) de un solo grupo (Campbell, 1970). El tratamiento experimental estuvo compuesto por las actividades a realizar con el graficador.

El examen diagnóstico (*pretest*) permitió medir el nivel de información de los temas a tratar que poseían los sujetos del estudio. El examen final (*postest*) tuvo como objetivo medir los logros obtenidos al final de las actividades. Algunos de los 22 reactivos del examen diagnóstico se ilustran en los Cuadros A y B.

CUADRO A

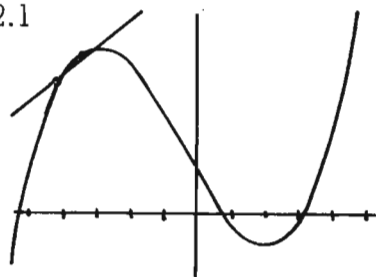
1. La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P[-4, f(-4)]$, $Q[-3, f(-3)]$ de la Figura 1 es:

- (a) $\frac{f(-3)}{f(-4)}$
- (b) $\frac{f(-3) - f(-4)}{-3 - (-4)}$
- (c) $\frac{-3 - (-4)}{f(-3) - f(-4)}$
- (d) Ninguna de las anteriores

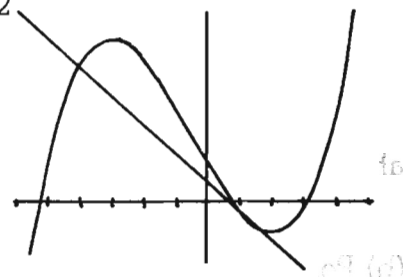


5. Elige de las figuras la que corresponda a la secante trazada por los puntos $P[-4, f(-4)]$ y $Q[-4 + 1, f(-4 + 1)]$.

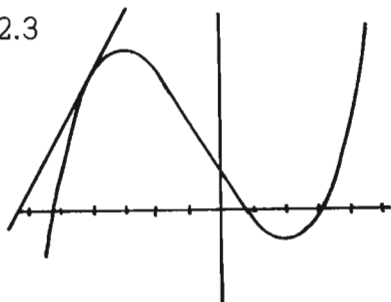
(a) Fig. 2.1



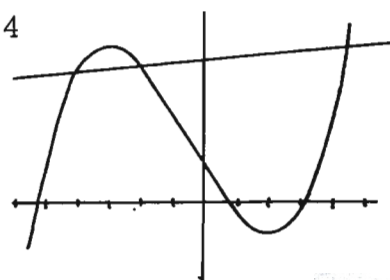
(b) Fig. 2.2



(c) Fig. 2.3



(d) Fig. 2.4



CUADRO B

12. La expresión que permite calcular la pendiente de la recta tangente en el punto $P[-4, f(-4)]$ es:

(a) $\frac{f(x) - f(-4)}{x - 4}$

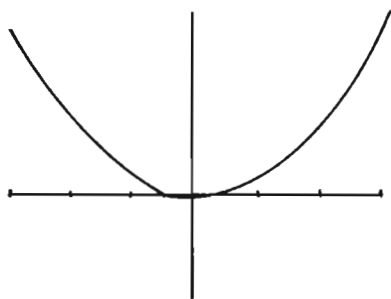
(b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-4 + h) - f(-4)}{h}$

(c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-4 + h)}{h}$

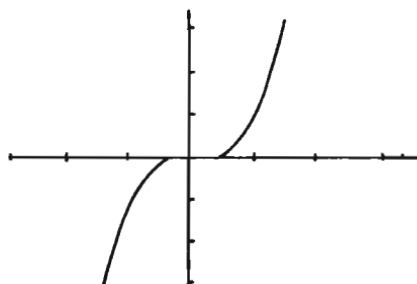
(d) Ninguna de las anteriores

14. ¿Cuál o cuáles de las gráficas corresponden a funciones crecientes en el intervalo $(0, 5)$?

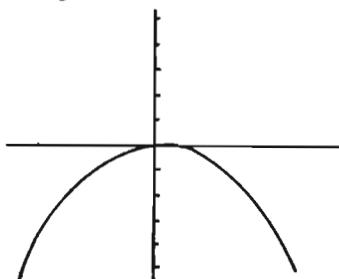
(a) Fig. 7.1



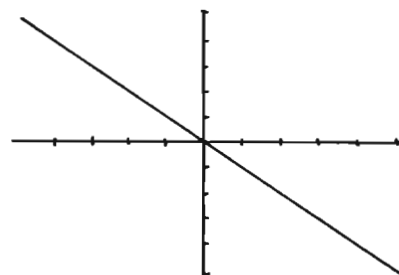
(b) Fig. 7.2



(c) Fig. 7.3



(d) Fig. 7.4



20. La función de la Figura 12 tiene un máximo en $x = -3$; por ello, ahí su derivada es:

- (a) Nula
- (b) Positiva
- (c) Negativa
- (d) Ninguna de las anteriores

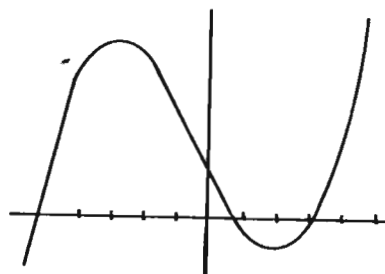


Fig. 12

En la primera sesión del EP se enseñó a los alumnos el manejo del graficador Cactusplot, teniendo en cuenta que algunos ni siquiera conocían el teclado.

Las cuatro sesiones restantes se ocuparon en que los participantes realizaran las seis actividades del material didáctico.

Algunas de ellas se muestran en los Cuadros C, D y E.

CUADRO C

ACTIVIDAD 1

1.1. Traza la gráfica de las siguientes funciones con el graficador "Cactusplot, a mathematics utility" en la microcomputadora y realiza lo que se te indica después para cada una de ellas.

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = x^4$

(d) $f(x) = x^5$

(e) $f(x) = x^6$

1.2 Ejecuta y contesta brevemente las cuestiones:

1.2.1 Traza una secante que pase por los puntos $P[2, f(2)]$ y $Q[2 + h, f(2 + h)]$ con $h = 1$, en la gráfica de cada una de las funciones.

1.2.2 Indica la pendiente de cada secante según la función.

(a) para $f(x) = x^2$ _____ (b) $f(x) = x^3$ _____

(c) $f(x) = x^4$ _____ (d) $f(x) = x^5$ _____

(e) $f(x) = x^6$ _____

1.3 Ejecuta y contesta:

1.3.1. Repite la actividad 1.2.1 considerando los siguientes valores de h : $h = 0.1$; $h = 0.01$; $h = 0.001$.

1.3.2 Completa el cuadro:

Función	valor de la pendiente de la secante si:		
	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$
$f(x) = x^2$	_____	_____	_____
$f(x) = x^3$	_____	_____	_____
$f(x) = x^4$	_____	_____	_____
$f(x) = x^5$	_____	_____	_____
$f(x) = x^6$	_____	_____	_____

1.4. Repite las actividades 1.1, 1.2 y 1.3 con las funciones:

- (a) $f(x) = x^2 + 5$ (b) $f(x) = x^3 + 5$ (c) $f(x) = x^4 + 5$
 (d) $f(x) = x^5 + 5$ (e) $f(x) = x^6 + 5$

1.5 Contesta brevemente:

1.5.1 ¿A qué valor se aproxima la pendiente de cada secante cuando h se hace cada vez más pequeño?

Cuando: $f(x) = x^2$ _____, $f(x) = x^3$ _____, $f(x) = x^4$ _____
 $f(x) = x^5$ _____, $f(x) = x^6$ _____

1.5.2 ¿Cómo debe ser el valor de h para que la secante se parezca más a una tangente? _____

CUADRO D

ACTIVIDAD 2

2.1 Traza una tangente en el punto $P[2, f(2)]$ en la gráfica de cada una de las funciones de las actividades 1.1 y 1.4.

2.2 Contesta brevemente:

¿Qué valor de h consideraste en cada caso?

Para

- | | |
|------------------------|------------------------|
| $f(x) = x^2$ _____ | $f(x) = x^3$ _____ |
| $f(x) = x^4$ _____ | $f(x) = x^5$ _____ |
| $f(x) = x^6$ _____ | $f(x) = x^2 + 5$ _____ |
| $f(x) = x^3 + 5$ _____ | $f(x) = x^4 + 5$ _____ |
| $f(x) = x^5 + 5$ _____ | $f(x) = x^6 + 5$ _____ |

Analizando los ejercicios anteriores podemos concluir que: si $f(x) = x^2$ y $x = 2$, entonces:

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = 4$$

es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto $[2, f(2)]$ y la razón de cambio instantánea en dicho punto.

CUADRO E

ACTIVIDAD 6

6.1 Traza la gráfica de cada función y la de su derivada en la misma figura.

(a) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

(b) $f(x) = -x^2 + 16$

(c) $f(x) = x^4 - 1$

(d) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$

(e) $f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 48x + 2$

6.2 Compara la gráfica de la función con la de su derivada, en cada caso.

6.3 Contesta brevemente:

6.3.1. ¿Cuáles son los valores extremos de cada función?

(a) _____ (b) _____

(c) _____ (d) _____

(e) _____

6.3.2. ¿Cómo es la derivada (positiva o negativa) en valores a la izquierda y a la derecha de cada valor extremo?

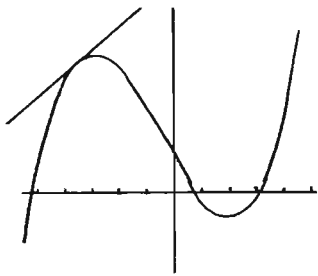
	Valor extremo	a la izquierda	a la derecha
(a)	_____	_____	_____
(b)	_____	_____	_____
(c)	_____	_____	_____
(d)	_____	_____	_____
(e)	_____	_____	_____
	_____	_____	_____
	_____	_____	_____

6.3.3. Por lo tanto, la función $f(x) = x^2 - 4x - 5$ tiene un _____
 _____ en _____.
 . . . , etc.

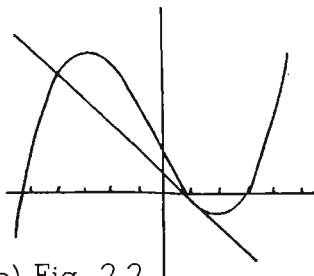
La última parte del estudio piloto (EP) consistió en la aplicación del examen final (en el salón de clase, con papel y lápiz). Algunos de sus 42 reactivos están en el cuadro F.

CUADRO F

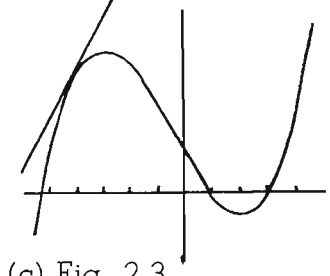
5. Elige de la Figura 2 la gráfica que corresponda a la secante trazada por los puntos $P[-4, f(-4)]$ y $Q[-4 + 1, f(-4 + 1)]$.



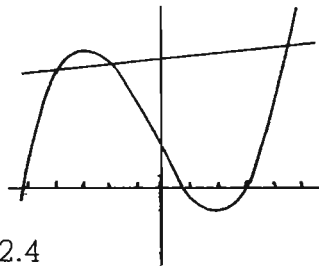
(a) Fig. 2.1



(b) Fig. 2.2



(c) Fig. 2.3



(d) Fig. 2.4

17. ¿Cómo es la derivada de la función $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 1$ en el intervalo $(-2, 1)$? Ver Figura 9.
 (a) Positiva (b) Nula (c) Negativa
 (d) Ninguna de las anteriores

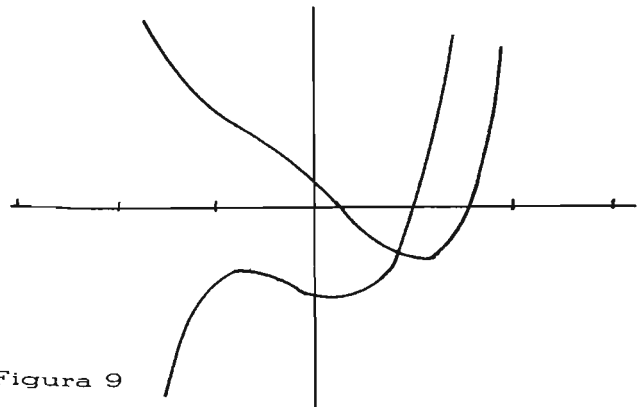


Figura 9

35. Si una función $f(x)$ tiene derivada $f'(x)$, positiva en un intervalo, entonces ahí es:
 (a) Decreciente (b) Constante (c) Creciente (d) Ninguna de las anteriores
39. La Figura 11 es la gráfica de $f'(x)$, de ahí que $f(x)$ tenga un mínimo en:

- (a) $x = 0$ (b) $x = 3$ (c) $x = 1$ (d) $x = -1$

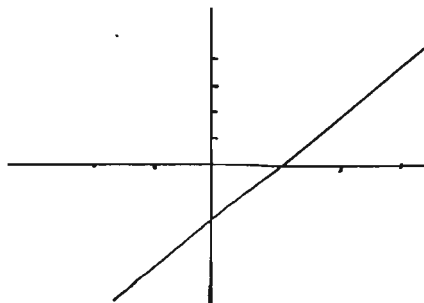


Figura 11

Es importante señalar que previamente al estudio piloto se dio a los alumnos, en el curso normal, la notación y los conceptos básicos mínimos necesarios, para que pudieran leer y entender los materiales del experimento.

Estudio Principal

El segundo estudio fue el estudio principal al cual nos referiremos como estudio experimental (EE). Se realizó con una muestra semejante compuesta de 54 alumnos, del grupo 607 de la misma escuela (ENP, Plantel 5), del ciclo escolar 90-91 del área económico-administrativa, subdivididos aleatoriamente en dos grupos, a los cuales se llamarán *grupo experimental* (GE) y *grupo control* (GC).

Se usó como modelo de investigación el diseño experimental de grupo de control *pretest-postest* (Campbell, op. cit.). En este estudio se consideró también como *pretest* al examen diagnóstico, como *postest* al examen final y como tratamiento experimental la guía de las actividades para realizar con el graficador, en el caso del GE, y con papel y calculadora para el GC.

La guía de actividades y los exámenes *pretest* y *postest* se redactaron de acuerdo con las observaciones que se obtuvieron del estudio piloto¹. Por ejemplo, al comparar los resultados del examen final con las actividades en el estudio piloto (Tabla 1) se decidió cambiar, reducir y aumentar algunas actividades como las que se refieren a la determinación de los máximos y mínimos de una función y al trazo y manejo de la gráfica de la función derivada.

El número de reactivos (de opción múltiple) de los exámenes *pretest* y *postest* fue de 40, presentados en orden diferente. El objetivo del examen *pretest* fue medir el nivel de información de cada alumno en relación con los temas y conceptos que se consideran en el tratamiento.

Con el *postest* se tuvo la finalidad de medir los efectos de la variable en relación con el desarrollo de las habilidades espacial, numérica, del razonamiento lógico, la operación simbólica y la generalización.

Este modelo de investigación usa la inferencia estadística, para probar que la "adquisición de conceptos de Cálculo, en particular la interpretación geométrica de la derivada y la determinación de máximos y mínimos de funciones elementales, por parte del alumno de educación media superior, se logra mejor con la ayuda de un graficador en microcomputadora que sin este auxiliar didáctico", con dos muestras aleatorias independientes (los resultados de los dos grupos, experimental y control) y la prueba estadística *t* de Student (Haber y Runyon, 1973), puesto que se comparan dos medias muestrales que se supone han sido extraídas de una población con distribución normal, y con varianzas iguales la confiabilidad del examen final fue calculada por medio del método "split half".

$$R = \frac{2r}{r + 1}$$

¹ Las actividades y los reactivos del *postest* se clasificaron por habilidad.

donde r es el coeficiente de correlación entre las dos mitades en que se divide el examen, la primera del reactivo 1 al 20 y la segunda del 21 al 40.

La hipótesis nula establece que no hay diferencias entre el aprendizaje de los tópicos de Cálculo (en cuestión) con la ayuda de un graficador para microcomputadora que sin él; es decir la media del examen final del grupo experimental μ_1 es igual a la del grupo control μ_2 .

Por lo tanto, como hipótesis alterna se enuncia que existe diferencia en el aprendizaje, en la dirección $\mu_1 > \mu_2$, en donde se obtiene una hipótesis alterna unilateral. Los parámetros que se consideran son la media y la desviación estándar. Además se hicieron otras observaciones en relación con el sexo de los estudiantes, a sus opiniones y a los índices de facilidad de los reactivos de ambos tests.

El EE duró ocho semanas con tres sesiones por semana, dos de ellas en el salón de clases y con ambos grupos. La tercera sesión se realizó con el GE en el laboratorio de cómputo del plantel, y con el GC en la biblioteca.

En las sesiones del salón de clases se discutieron y analizaron las cuestiones que se plantearon en el laboratorio o en la biblioteca. Además, se realizaron más ejercicios similares a los del material didáctico (guía de actividades).

Las sesiones en el laboratorio de cómputo fueron la parte esencial para el grupo experimental. Con ellas se pretendió crear un ambiente lo más cercano posible a un micromundo², de manera que el alumno tuviera la oportunidad de investigar y verificar los conceptos previamente planteados y discutidos.

Simultáneamente los alumnos del grupo control trabajaron en la biblioteca de manera libre, algunos en forma individual y otros en equipo; sólo se controló que no acudieran a la asesoría de un profesor.

Al término de las actividades se aplicó el examen final a los dos grupos, al mismo tiempo y en el mismo lugar.

Para analizar los resultados se tomaron en cuenta las diferencias pareadas (en la mayoría de los casos fueron ganancias) entre el *postest* y el *pretest* con las cuales se calculó la t de Student.

Otros análisis se realizaron agrupando los datos de las actividades y del *postest*, de acuerdo con la habilidad que cada uno promueve o valora de manera más destacada; es claro que un reactivo puede pertenecer a una o más de las categorías. Y por otro lado se registraron también los índices de facilidad y los errores más y menos frecuentes en el *postest* (Balderas, 1992). Se compararon los resultados del *postest* por sexo tanto en el grupo experimental como en el de control.

Por último, se aplicó un cuestionario de opinión al grupo experimental para conocer su punto de vista en cuanto al trabajo con la computadora.

² Medio computacional basado en el aprendizaje interactivo; es decir, donde el que aprende construye su sistema de prerrequisitos y se desempeña de manera interactiva en la construcción de su aprendizaje.

RESULTADOS

Estudio Piloto

El estudio piloto tuvo como finalidad la de probar el material que se utilizaría en el estudio experimental, por lo que las actividades y los exámenes *pretest* y *postest* se compararon y se clasificaron por tema.

Los temas fueron:

1. Concepto de funciones crecientes y decrecientes.
2. Identificación y trazo de tangentes a una gráfica.
3. Identificación y trazo de secantes a una gráfica.
4. Concepto de pendiente de una recta.
5. Determinación de máximos y mínimos relativos de una función.
6. Concepto de razón de cambio.
7. Trazo y manejo de la gráfica de la derivada.
8. Cálculo de la derivada de una función.

Los resultados de acuerdo con dicha clasificación se presentan en las Tablas.

TABLA 1
CALIFICACIONES PROMEDIO POR TEMA (Estudio Piloto)

Temas	1	2	3	4	5	6	7	8
Examen final	6.03	6.02	5.49	5.71	3.07	6.61	3.81	*
Actividades	9.60	6.34	8.56	5.96	9.60	2.04	9.87	1.17

* El examen final no tuvo reactivos de este tema.

Los resultados generales de las actividades y de los dos instrumentos de evaluación fueron:

TABLA 2
CALIFICACIONES MEDIAS (Estudio Piloto)

	<i>Examen Diagnóstico</i>	Actividades	Examen Final
Calificación media	3.85	6.7	5.21

El índice de facilidad promedio del examen final fue de 0.55; para un reactivo se obtuvo dividiendo el número de aciertos entre el total de respuestas al mismo. Por último, la confiabilidad del examen final fue de 0.23 calculada por medio del método "split half".

Estudio Principal

El estudio experimental pretendió medir los efectos que un graficador para computadora tenía en la adquisición de conceptos de cálculo en relación con el

desarrollo de las habilidades: Espacial (E), Numérica (N), del Razonamiento Lógico (R), para Operar con símbolos (O) y para Generalizar (G).

Algunas observaciones que se hicieron durante las sesiones del experimento, con base en el plan de trabajo para el Grupo Experimental fueron las siguientes.

La primera sesión (febrero 1) causó gran inquietud y expectativa en los alumnos, quienes mantuvieron una actitud de interés que les permitió trabajar de manera dinámica.

En la segunda sesión (febrero 8), los alumnos interactuaron con la computadora y con los compañeros más cercanos; se destacaron como monitores tres alumnos quienes tenían más experiencia en el uso del teclado. El avance, en cuanto a la realización de las actividades fue lento, en parte debido a dificultades en el manejo del graficador.

En la tercera sesión (febrero 15) una de las interrogantes que más se presentó es la de por qué se obtiene la misma pendiente de la secante PQ con la función $f(x) = x^2$ que con $f(x) = x^2 + 5$. En cuanto al tiempo de la sesión se observó que no era suficiente para realizar todas las actividades propuestas.

En la cuarta sesión (febrero 22), los estudiantes se preguntaban con qué opción del graficador (menú) podían trazar rectas tangentes, situación que los hizo reflexionar en torno a la capacidad de simulación del mismo. En esta sesión se presentó, de manera generalizada, una confusión entre el valor de la pendiente de la secante y el valor de la función.

También se hicieron evidentes sus dificultades con la aritmética, ya que al elegir valores cada vez más pequeños para el incremento de la variable (h), dudaban en decidir qué número era menor que otro, ambos escritos en forma decimal. Otra de las dificultades fue la evaluación de funciones en distintos valores de la variable.

Quinta sesión (marzo 1), los efectos de la simulación para trazar tangentes no fueron interiorizados por el alumno, ya que pretendieron evaluar expresiones

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

de manera directa, como en la secante, por sustitución de $h = 0$.

También se observaron en el alumno las carencias de algunos conceptos algebraicos, así como la imposibilidad de vincular y evocar otros.

En la sexta sesión (marzo 8) se observó un mejor dominio del graficador. Sin embargo, sólo una minoría de los alumnos pudo calcular la derivada de una función mediante el cálculo del límite correspondiente, es decir, alcanzó cierto grado de generalización.

Hasta la séptima sesión (marzo 15) los alumnos eligieron la escala más adecuada para obtener una mejor visión de la gráfica de una función, lo que significa que determinaron más fácilmente el dominio y el contradominio (rango) de la misma:

En cambio, mostraron dificultades para entender el significado de "valor extremo", para identificar qué parte de la gráfica de la función derivada era positi-

va, cuál negativa y en algunas ocasiones, dónde era nula. En este último caso, creían que si la función era nula entonces la variable valía cero.

Durante esta sesión y todas las anteriores se observó mucha disposición para la exploración con el graficador, por "ensayo y error", pero poca hacia la reflexión. En los casos en que se hizo un trabajo reflexivo se logró la independencia del monitor más rápido.

A pesar de lo anterior, por momentos, se dio una gran inquietud por no ser suficiente el tiempo asignado para la realización de las actividades, situación que los obligó a completar los datos solicitados en las actividades sin hacer una reflexión de las cuestiones planteadas.

En la última sesión (marzo 18), conforme el alumno llegaba al resultado esperado, lograba mayor seguridad en el manejo del graficador, motivándolo a plantearse otras interrogantes que continuamente comentaba con sus compañeros.

A los alumnos del Grupo Control se les observó en dos ocasiones, destacándose lo siguiente:

Durante una sesión adicional que se concedió al Grupo Control, dado que su avance era mucho más lento que el del Grupo Experimental, se manifestó su desacuerdo con trabajar sin la guía y exposición del profesor, así como de poca disposición para realizar el estudio reflexivo del material.

Esa actitud se reforzó por el uso de un material que no proporcionaba el conocimiento como un producto terminado, sino que le exigía experimentar y buscar respuestas. Tampoco contaba con ejemplos que le permitieran repetir procedimientos, por lo que no podía calificar de correcto o incorrecto su trabajo, situación que le originó mucha inseguridad.

Los alumnos lograron un avance lento, aunque por las circunstancias fue un poco más reflexivo que en el Grupo Experimental; pero al realizar todos los cálculos necesarios para obtener las gráficas, se cansaban y perdían interés. Lo anterior ocasionó que se interrumpiera la secuencia en el aprendizaje.

Pocos alumnos se plantearon cuestiones fuera de las propuestas en el material; la mayoría se dedicó a realizar operaciones.

Los resultados del *pretest* y del *posttest* fueron los siguientes:

TABLA 3
RESULTADOS DEL EXAMEN FINAL POR HABILIDAD (Estudio Principal)

<i>Habilidades</i>	E	N	R	O	G
Cantidad de reactivos	25	9	28	11	12
Calif. Prom. GE	4.9	5.2	5.2	5.7	5.9
Calif. Prom. GC	4.2	4.7	4.4	5.1	5.3
Diferencias	0.7	0.5	0.8	0.6	0.6

Los resultados globales del examen final para los dos grupos se presentan en la Tabla 4.

TABLA 4
CALIFICACIÓN PROMEDIO Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR DEL
PRETEST Y POSTEST (Estudio Principal)

	<i>Examen</i> <i>Diagnóstico</i>		<i>Examen</i> <i>Final</i>		<i>Índice de</i> <i>Confiabilidad</i>
	<i>x</i>	<i>σ</i>	<i>x</i>	<i>σ</i>	
Grupo Experimental	4.02	0.83	5.5	0.96	0.71
Grupo Control	4.01	1.02	4.9	1.12	0.65

También en este estudio se dividió al *postest* en dos partes, de la pregunta 1 a la 20 como primera, y de la 21 a la 40 como segunda, para calcular el coeficiente de correlación.

Se analizó la *t* de Student sobre las ganancias entre el examen diagnóstico y el examen final de cada grupo, a un nivel de significación $\alpha = 0.1$, con 52 grados de libertad, $n_1 = 27$ y $n_2 = 27$.

Por tratarse de una hipótesis alterna unilateral el valor crítico de *t* es $t_\alpha = 1.2988$, valor que se obtuvo por interpolación.

La *t* calculada resultó igual a 1.4642, por lo que se rechaza la hipótesis nula; es decir, existe una diferencia entre el aprendizaje del Grupo Experimental y el aprendizaje del Grupo Control, en la dirección $\mu_1 < \mu_2$.

La probabilidad de error por rechazar la hipótesis nula es de 10%.

Los reactivos del *postest* clasificados por habilidad produjeron los siguientes índices de facilidad promedio en cada una.

TABLA 5
ÍNDICES DE FACILIDAD PROMEDIO DE LOS REACTIVOS DEL
POSTEST POR HABILIDAD (Estudio Principal)

<i>Habilidades</i>	E	N	R	O	G
Grupo Experimental	0.50	0.55	0.54	0.59	0.61
Grupo Control	0.42	0.49	0.47	0.54	0.55
Diferencias	0.08	0.06	0.07	0.05	0.06

Otro elemento de estudio fue el cuestionario de opinión que se aplicó al Grupo Experimental. La primera pregunta fue para saber si considera mejor el estudio con la computadora (si o no). La segunda, en relación con su preferencia para estudiar con ayuda del (a) profesor, (b) libro, o (c) del material para la computadora. La tercera, si considera aprender más con (a) el profesor, (b) el libro, o (c) el graficador. Y la última, sobre su preferencia para realizar las gráficas en (a) papel, o (b) computadora.

Los datos que se obtuvieron de dicho cuestionario fueron:

TABLA 6
RESPUESTAS AL CUESTIONARIO DE OPINIÓN DEL GRUPO EXPERIMENTAL
(Estudio Principal)

Pregunta Número	Respuestas %		
	1	sí 51.85	no 48.15
2	a 77.78	b 3.70	c 18.52
3	a 77.78	b 7.41	c 14.81
4	a 40.74	b 59.26	

DISCUSIÓN

La decisión de realizar el Estudio Principal con alumnos del área económico-administrativa se debió básicamente a que es un grupo menos motivado hacia el estudio de la matemática que uno del área químico-biológica o físico-matemática. La mayoría de estos alumnos eligen carreras como administración de empresas o sociología, con la idea de que no tendrán que estudiar muchas materias relacionadas con las matemáticas. Esa razón resultó ser un reto mayor para probar los efectos del uso de un graficador en microcomputadora, además de que, en general, la mayoría tiene muchos errores y carencias en la formación de conceptos matemáticos.

Sin embargo se logró que los alumnos del GE interactuaran entre sí y con el micromundo. Es decir, los alumnos realizaron las acciones que les permitieron adquirir conocimientos como resultado de sus esfuerzos constructivos.

Los participantes también pudieron visualizar los conceptos tratados, incidiendo en el nivel de percepción de manera más significativa y obteniendo tanto el registro de sus acciones como la interiorización de los conceptos. Esta situación, les permitió evocar y relacionar conceptos en el momento necesario, y alcanzar niveles de abstracción y generalización que los alumnos del Grupo Control no obtuvieron.

Con el experimento se logró desarrollar las habilidades consideradas (espacial, numérica, del razonamiento lógico, la operación con símbolos y la generalización), al obtenerse diferencias positivas en las calificaciones del examen final entre el grupo experimental y el control.

En la Tabla 3 se observa que la diferencia mayor entre los dos grupos es la que corresponde a la habilidad para el razonamiento lógico. Lo que nos hace

concluir —si se acepta la hipótesis de que el aprendizaje se mejora con la ayuda de un graficador— que la habilidad donde se incide con mayor fuerza es la del razonamiento lógico.

La diferencia de calificaciones en el examen final respecto a la habilidad espacial, entre el GE y el GC (Tabla 3), denota un desarrollo significativo de esa habilidad en el alumno del Grupo Experimental, que le ayudó en la construcción de sus conceptos. La adquisición de conceptos se infiere de las diferencias positivas en los resultados del examen final tanto en la habilidad para el razonamiento lógico como en la generalización, entre el Grupo Experimental y el control.

De la Tabla 5 se concluye que en la habilidad espacial, el alumno del GC tuvo mayor dificultad para contestar correctamente los reactivos del examen final, lo que permite especular sobre un mayor desarrollo en dicha habilidad por parte del alumno del GE, debido en parte a que el alumno del GE no desvió su atención hacia los largos y tediosos cálculos que se requieren para obtener las gráficas de las funciones, sino que empleó su tiempo en un estudio más general y profundo de las propiedades de la gráfica. Desde luego, tuvo mayor oportunidad para explorar y construir paulatinamente sus conceptos.

Las diferencias en los resultados del GE y el GC, en las actividades y en el examen final, estriban principalmente en el diseño didáctico del micromundo que se utilizó con el GE y no sólo en el tiempo empleado para los cálculos numéricos por el GC.

En suma, existe una ligera diferencia en las calificaciones promedio en el examen final entre el GE y el GC (de 0.6) por lo que se puede creer que se logró mejorar levemente en el alumno, la adquisición de los conceptos tratados, con la ayuda del graficador. De ahí que la hipótesis principal de este estudio se pruebe en cierto grado; es decir, existen diferencias en el aprendizaje de la interpretación geométrica de la derivada, en la determinación de los máximos y mínimos relativos de una función elemental, con la ayuda del graficador que sin él, con un 10% de probabilidad de error.

Otras conclusiones importantes, son las que se refieren a los resultados del cuestionario de opinión (Tabla 6), puesto que se manifestó una buena disposición hacia el estudio apoyado en el manejo del graficador, pero una notoria preferencia por la guía del profesor, tendencia que denota un estilo de aprendizaje todavía muy dependiente del profesor, lo que no favorece el aprendizaje reflexivo y la construcción de los conceptos en el alumno.

Considero que no se lograron mejores resultados en el grupo experimental porque las ocho sesiones de que constó el experimento son insuficientes para que el alumno se desenvuelva de manera más natural en el micromundo. Esto es, que si las interacciones con la computadora se extendieran a todo el curso, se podrían registrar logros mayores.

Además de la limitante anterior, se presentó la imposibilidad de contar con un número mayor de grupos experimentales, para estudiar los efectos de otras variables como el material didáctico (la guía de las actividades), el libro de texto, el profesor, la seriación de las sesiones experimentales, o bien, en una situación óptima, integrar el graficador y otros desarrollos de software educativo

a todo el curso. También resultaría interesante observar los resultados del examen final si se le resolviera con ayuda del graficador, en la microcomputadora.

Otra restricción del experimento fue no poder hacer ajustes del tiempo dedicado a las sesiones con las computadoras, para que el alumno terminara sus actividades, se implicará más profundamente en el ambiente de investigación y, por tanto, de su aprendizaje.

Aún quedan muchas interrogantes por investigar, como las que se refieren a los efectos que tuvo el material didáctico, diseñado específicamente para servir de guía al estudiante en la investigación y construcción de sus conceptos. O bien, si existe la posibilidad de mejorar el experimento de manera que se capten registros sistemáticos de lo que sucede simultáneamente en el grupo experimental y en el control. Y por supuesto, qué conclusiones se podrían obtener con un número mayor de grupos de control y experimentales, para analizar una mayor cantidad de parámetros.

REFERENCIAS

- Balderas, P.** 1992. *Adquisición de conceptos de Cálculo con apoyo de la graficación en microcomputadora*. Tesis. Maestría en Educación Matemática, México, UNAM.
- Bunyard, D.** 1989. *Why Microworlds?* (s.l.): Micromath, Vol. 5, No. 2 Summer. p. 33-35.
- Cactusplot "a mathematics utility"*. 1987. The Cactusplot Company Teempo, Az.
- Campbell, D. y Stanley, J.** 1970. *Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social*. Trad. Mauricio Kitaigorodski. Buenos Aires: Amorrortu Editores. p. 158.
- Chizón, C.** 1990. *Matemáticas y aprendizaje para el desarrollo del pensamiento*. (Tesina) México: UNAM. p. 92.
- CLIME NEWS.** 1989. *Special Microworlds Section*. (s.l.) Vol. 2 No. 2, April. p. 8-9.
- Ediger, M.** 1989. *Microcomputer Philosophy in Math Teaching*. Phoenix, Az. The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching. Vol. VIII No. 3, Spring.
- Eisenberg, T. y Dreyfus, T.** 1989. *Espatial Visualization in Mathematics Curriculum*. Massachusetts: FOCUS Vol. II Number 1 and 2. Winter and Spring. p. 15.
- Galindo, E. (s.f.).** *El uso de las computadoras personales en la enseñanza de las matemáticas, área de investigación indispensable en los programas actuales de formación de profesores*. México: CINVESTAV, IPN. p. 365-70.
- Haber, A. y Runyon, r.** 1973. *Estadística General*. Ver Ricardo Lassala. México: Fondo Educativo Interamericano. p. 371.
- Herscovics, N. y Bergeron, J.** 1984. *A constructivist vs. a formalist approach in the teaching of mathematics*. (s.l.) P.M.E. 8th conference. p. 190-96.
- Kennedy, J.** 1981. *Graphing polynomials with computer assistance*. (s.l.) Mathematics Teacher. October. p. 516-19.
- Krutetskii, V.** 1976. *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: University of Chicago of Chicago Press.

- Mosses, B.** 1982. *Visualization: A problem-solving approach*. Canadá: Math Monograph No. 7. April, p. 61-66.
- Norris, D.** 1983. *Some thoughts on using microcomputers to teach calculus*. Phoenix, Az.: The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching. Spring. p. 28-30.
- Orton, A.** 1987. *Learning Mathematics. Issues theory and classroom practice*. London: Cassell. p. 139-55.
- Papert, S.** 1981. *Desafío a la mente*. Trad. Lidia Espinosa. Buenos Aires: Ed. Galápagos.
- Piaget, J.** 1973. *The child's conceptions of the world*. London: Paladin.
- Tall, D.** 1985. *Using computer graphics programs as generic organisers for the concept image of differentiation*. Utrecht: P.M.E. 9th Conference. p. 105-10.
- Tall, D. y Sheath, G.** 1983. *Visualizing calculus concepts with computer graphics*. Israel: P.M.E. 7th Conference. p. 357-62.
- Wenzelburger, E.** 1990. *Computer graphics for the acquisition of function concepts*. PME 14th México.
- Willis, J. y Miller, M.** 1984. *Computadoras para todos*. Trad. EDISERVIC. México: Interamericana. P. 302.
- Wright, S.** 1987. "Micros and the aims of mathematics teaching". (s.l.) *Micromath*. Vol. 3, No. 2, Summer. p. 8-11.

Directorio de Autores

Carlos Bosch Giral

Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM)

Guillermina Waldegg

Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV)

David Block, Martha Dávila

(DIE-CINVESTAV)

Alicia Ávila Storer

Universidad Pedagógica Nacional (UPN)

Eduardo Mancera Martínez

Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE)

Fortino Escareño Soberanes

Colegio de Profesores de Educación Secundaria "Moisés Sáenz"

Elfriede Wenzelburger Guttenberger

Maestría en Educación Matemática (UNAM)

Patricia E. Balderas

Maestría en Educación Matemática (UNAM)