El Infinito en la Obra Aristotélica

La matemática es la ciencia del infinito (H. Weyl)

El infinito es un elemento que ha estado siempre presente en la historia de las matemáticas, y es también un componente importante en el salón de clases. En ambos casos, su presencia tiene el doble carácter de perturbador y motor:

En la historia de la matemática ha sido un elemento perturbador, porque los problemas relacionados con el infinito han constituido obstáculos y han sido el origen de numerosas rupturas. En tanto que en el aula, es perturbador porque, de manera implícita, es ineludible desde el comienzo del aprendizaje de las matemáticas y porque sus intuiciones son, generalmente, engañosas.

Sin embargo, el infinito ha tenido el carácter de elemento motor en ambos contextos, ya que la necesidad de resolver las paradojas, las dificultades y las intuiciones vinculadas al infinito, ha llevado siempre a construir nuevos saberes y nuevos conceptos. Este es quizás, el mayor atractivo del infinito cuando hablamos de Educación Matemática: estudiar el infinito, sus intuiciones, las paradojas a las que conduce, la historia de las respuestas que ha dado el hombre. . . , nos ayuda a conocer mejor la mente humana, su potencialidad y sus limitaciones.

La historia de la matemática es, en opinión de muchos, la historia de los esfuerzos del ser humano por desentrañar los misterios del infinito. Esta historia, como toda —o casi toda— la historia del pensamiento occidental, tiene sus orígenes en la Grecia Antigua, y es Aristóteles la figura más influyente de la época en lo que concierne al infinito. Así que iniciaremos nuestras reflexiones sobre el infinito en matemáticas, a partir de la lectura y comentarios de algunos textos extraídos —principalmente— del *Libro III* de la ***Física*** de Aristóteles [1]. Nuestra intención en este trabajo es presentar la génesis de la discusión sobre el infinito en los términos, más filosóficos que matemáticos, en los que se dio, para —en artículos posteriores—, abordar el problema en un contexto más matemático, siguiendo cronológicamente la historia del concepto.

En la primera parte de este artículo revisaremos los pasajes en los que Aristóteles discute la **naturaleza** del infinito y su **existencia** o **inexistencia**. Es claro que

Guillermina Waldegg

CINVESTAV

no podremos analizar todos los artificios de la argumentación aristotélica y que, por tanto, tendremos que hacer una selección, dictadas —esencialmente— por nuestro interés sobre el infinito en matemáticas. Es necesario, sin embargo, estar conscientes que esta elección de argumentos, que nos llevará tomar poco en cuenta las consideraciones físicas y cosmológicas del autor, no se puede hacer sin alterar el tema mismo que nos concierne: porque los objetos matemáticos en Aristóteles derivan, por abstracción, de los objetos sensibles. Esta observación está lejos de ser insignificante para los asuntos relacionados con el infinito matemático. Es necesario recordar que "*la geometría estudia la recta física*", así sea para agregar inmediatamente [2] que no la estudia "*en tanto que física*". Los objetos matemáticos no existen separadamente de los objetos físicos [*Libro XIV* (*N*) de la *Metafísica*], lo que no es impedimento para que los matemáticos se apoyen en los objetos físicos una vez que éstos han perdido sus determinaciones, en particular, la determinación de ser invariables.

En una segunda parte del artículo (mucho más breve y presentada como una especie de consecuencia de la primera), veremos el modo en que, según Aristóteles, el matemático trata con el infinito.

I. NATURALEZA Y EXISTENCIA DEL INFINITO

Aristóteles plantea problemas de diversos órdenes sobre el infinito: ¿en qué sentido hay que tomar esta noción?, ¿el infinito existe?, ¿no existe?, ¿de qué modos existe? Propone entonces iniciar la discusión a partir del examen de los distintos significados del término.

1. Acepciones del término

> *Debemos empezar por distinguir las diferentes acepciones en que se usa el término 'infinito' [**Física**, III, 4, 204 a 3-4].*

Aristóteles propone llevar a cabo una gran tarea dialéctica que consiste en eliminar las ambigüedades que pesan sobre la noción de infinito.

La palabra "infinito" existe en la lengua griega bajo la forma de **απειρον** (*apeiron*) y Aristóteles sugiere que se indague sobre su significado en dos direcciones: una, que consiste en la negación de la raíz **περ** (*per*, que significa "el pasaje", "la travesía"; *περαο perao*, "atravesar"). La otra, que tiene que ver con el término *περασ* /*peras*) o *πειρασ* (*peiras*), y que tiene el sentido de "límite", "meta", "extremidad", pero también el de "atadura".

Los significados señalados por Aristóteles son los siguientes:

Por una parte se aplica a aquello que no se puede recorrer, porque está en su naturaleza el no ser recorrido (como la voz, es invisible) [Ibid. 4-5].

Aristóteles relaciona la noción de "imposibilidad" a la de "infinidad". Es equivalente decir que "*es imposible ver una voz*" a decir que "*la voz es infinita con relación al ver*". El infinito marca aquí una heterogeneidad entre el objeto (audible, la voz) y el medio por el cual se le intenta aprehender (la vista).

En el mismo sentido, podríamos decir que lo inefable, lo indecible, lo inimaginable, lo inconcebible, . . . son figuras del infinito. El infinito es —en este primer sentido muy general— una figura de lo *inconmensurable*. Es lo que no se puede medir con los instrumentos u órganos de los que se dispone.

Este primer sentido puede muy bien comprender el sentido matemático de las magnitudes inconmensurables. La diagonal es, en cierta manera, infinita en relación con el lado del cuadrado, en el sentido en que ni ésta, ni el lado, se dejan medir por la misma magnitud. Lo mismo se puede decir de un fragmento de curva en relación con su cuerda [3].

El infinito es también "*lo que se puede recorrer y que no tiene fin*" *ατελευτετον* (*ateleuteton*) [Ibid. 6-7]. Aristóteles no da ejemplos de esta acepción, a menos que se tome como un ejemplo el que aparece un poco más adelante en la *Física*, cuando dice que:

> *. . . los anillos que no tienen punto de unión son descritos como infinitos, porque siempre es posible tomar una parte que está fuera de una parte dada. [**Física** III 5, 207 a 1-3]*

El recorrido de un punto en la superficie de un anillo, o en la de una esfera, es infinito: aun si las dimensiones de estas superficies son finitas, se les puede recorrer incansablemente y sin agotarlas.

El punto importante aquí es que el recorrido no tiene un punto de llegada, a diferencia de los movimientos de la naturaleza que, para Aristóteles, siempre se terminan.

Otro significado aparece en "*lo que con dificultad se puede recorrer*" [***Física*** *III 4, 204 a* 5-6]. Aristóteles insiste aquí en la dificultad del recorrido, y no tanto en su longitud. Se puede pensar en un laberinto en el cual es difícil encontrar la salida, o en una superficie que, como la superficie de la Tierra, está llena de accidentes.

En todo esto encontramos que el infinito está asociado a

> *. . . lo que por naturaleza se puede recorrer pero que no se deja recorrer y no tiene fin (περασ) [Ibid. 4-6]*

Un punto se puede desplazar a lo largo de una parábola o a lo largo de una recta; el recorrido que se hace parece siempre insignificante en relación con lo que falta por recorrer, cualquiera que sea el lugar que ocupa sobre la parábola o sobre la recta.

Si "por naturaleza" el recorrido es posible, no se está del todo en la situación de asir la voz por el órgano de la visión, o de aproximar segmentos de curva por medio de segmentos de recta; es el carácter inagotable del infinito, por su inmensidad, lo que está en cuestión. No es ya la situación de recorrer indefinidamente un círculo. El infinito "*en tanto que no se puede recorrer*" será particularmente discutido por Aristóteles en la *Física*.

Los sentidos precedentes del infinito —si se acepta el ejemplo de la voz— se atribuyen todos a un objeto que se desea recorrer (ya sea que se logre o no realizar este deseo) y que ofrece diferentes estilos de resistencia a este proyecto; sea porque el objeto presenta sentidos indefinidos para toda suerte de recorridos, o sea porque presenta asperezas, o porque es demasiado grande.

Se puede encontrar otra serie de significados para el infinito que tiene que ver más con la naturaleza del proyecto mismo, que con la resistencia del objeto al proyecto. En efecto, dice Aristóteles que:

> *. . . todo infinito lo es o por composición o por división, o por las dos cosas a la vez [204 a 6-7]*

Se habla de infinito por composición (κατα πρυστεσιν) (*kata prostesin*) cuando siempre es posible agregar, a una cantidad dada, otra cantidad; por ejemplo, en los números: siempre es posible agregar una unidad a un número dado, no importa qué tan grande sea este número.

Se habla del infinito por división (κατα διαιρεκιν) (*kata diairesin*) cuando es posible dividir una magnitud sin encontrar fin a tal división. Se ve aquí la vinculación íntima de la noción de infinito con la de continuidad: si las magnitudes están constituidas por "átomos", no hay división infinita; si hay división infinita, esto quiere decir que no hay "átomos" (o elementos indivisibles) constituyendo las magnitudes.

Finalmente, existen entes que son infinitos tanto por composición como por división: por ejemplo, el tiempo que es infinito por composición, en tanto que es número del movimiento —los instantes se suman a los instantes— y es infinito por división, en tanto que es continuo y puede siempre ser fraccionado en instantes.

Se hacen necesarias aquí dos observaciones para concluir el inventario de estos significados del infinito:

(a) El conjunto de definiciones precedentes no es perfecto desde el punto de vista de una ciencia del infinito, sistemáticamente acabada. Estas definiciones son nominales y permiten encontrar diversos sentidos del infinito. El trabajo lógico del dialéctico aquí es sólo una puesta en orden de las maneras de hablar.

(b) Se hace necesaria entonces otra distinción: la del infinito en acto y el infinito en potencia; ésta implica una reflexión sobre la existencia (o sobre la manera de existir) del infinito. Pasemos ahora a estos asuntos más delicados.

2. La existencia del infinito

Estas cuestiones no provienen solamente de los problemas del significado de las palabras, sino que se trata de juzgar las *tesis* sobre el infinito; es decir, se trata de juzgar las proposiciones sobre la existencia o la inexistencia, —o más exactamente— sobre la forma en la que el infinito existe. Si las definiciones nominales no pueden ser ni verdaderas ni falsas, sino que simplemente pueden tener un sentido, las tesis que vamos ahora a examinar, por el contrario, pueden ser verdaderas o falsas.

De nuevo aquí no nos debe sorprender encontrar, en nuestra investigación sobre el infinito matemático, proposiciones de la física. Aristóteles subraya de entrada que la cuestión del infinito interesa a la física [4]; por otra parte, como hemos dicho, los objetos matemáticos presuponen la existencia de objetos físicos.

Veamos entonces las cinco razones que, según Aristóteles, nos llevan a creer en el infinito y fijemos nuestra atención particularmente en la primera, la segunda, la cuarta y una parte de la quinta. Este texto de la *Física* (III, 4, 203b 15-29) puede ser entendido como una inspección de las ilusiones en las que cae —casi inevitablemente— el pensamiento humano cuando trata con el infinito y cuando reflexiona sobre él.

Aristóteles analiza primero los razonamientos en los que se supone que se basa la realidad del infinito.

> *La creencia en la existencia del infinito se extrae (. . .) de la naturaleza del tiempo —porque éste es infinito. [Física III, 203b 15-16]*

La ilusión no es muy evidente en esta manera lapidaria de enunciar, pero el contexto es el de una refutación a Platón a quien Aristóteles reprocha haber supuesto el infinito como si se tratara de algo substancial, susceptible de existir en sí.

Ahora bien, el infinito, tal como lo entiende Aristóteles, sólo existe como atributo; hablamos "de algo" que es infinito —por ejemplo, el tiempo— de "lo que no termina" y de "lo que puede cortarse en tantas partes como se quiera".

Tenderíamos entonces a aplicar el calificativo de infinito a una parte de aquello que es infinito; y a equivocarnos atribuyéndole una substancialidad, una individualidad que no tiene, o bien que pertenece a aquello que es infinito.

La segunda razón está extraída explícitamente de las matemáticas; más concretamente:

> *. . . de la división dentro de las magnitudes —porque los matemáticos también utilizan el infinito. [Ibid.]*

El infinito por división es utilizado por los geómetras. Notemos que Aristóteles no habla de otro infinito —del cual, después veremos, dirá que la geometría no tiene necesidad y del cual negará su existencia—.

El paralogismo consistirá aquí en hacer existir, como un objeto separado, lo que no tiene realidad más que dentro del proyecto y el acto de dividir siempre una magnitud dada.

(La tercera razón para creer en la existencia del infinito estará vinculada al carácter inagotable de las generaciones y de las corrupciones debidas a que "*. . . la fuente de donde se toma lo que se engendra, es infinita*" [Ibid.]).

La cuarta razón corresponde a las ilusiones en las que cae el pensamiento humano:

> *. . . el límite siempre encuentra su límite en algo, así que no puede haber límite si todo está siempre limitado por algo diferente a él mismo. [Ibid 20-22]*

Desde que suponemos un límite para definir algo, establecemos un "hasta aquí" y un "hasta allá", aunque se encuentre, en el acto mismo de limitar, lo que íntimamente se niega. El pensamiento del infinito es antinómico, aun si las contradicciones a las cuales da lugar, fueran ficticias en el análisis.

Hay una quinta razón que resalta, más evidentemente todavía que la anterior, el poder y los límites del pensamiento humano, en tanto que "*presenta una dificultad común a todos*". Aristóteles la llama "*la más fuerte de las razones*":

> *. . . no sólo el número, sino también las magnitudes matemáticas y lo que está fuera del cielo parecen ser infinitos porque su representación (noesis) no los agota en nuestro pensamiento. [Ibid. 25-26]*

La suposición real de la existencia del infinito surge de una especie de impotencia de nuestro pensamiento para agotar los números, las magnitudes matemáticas, y el más allá del cielo. Esta impotencia, dentro de la ignorancia de ella misma, se proyecta sobre las cosas bajo la forma de un reconocimiento ilusorio de que son infinitas.

El pensamiento avanza por sus objetos e imagina que este avance es un avance por las cosas mismas. Da, imprudentemente, una realidad a los objetos por los cuales avanza. El infinito es la proyección dentro de las cosas de la impotencia o de la limitación de un pensamiento que se olvida a sí mismo; en efecto, el pensamiento pretende tomar la medida de las cosas y, puesto que no puede agotar su finitud, las tiene por infinitas. Cuando la representación toma consciencia de sí misma, renuncia a la realidad del infinito. Es girando hacia sí mismo y comprendiendo su limitación, que el pensamiento puede decidir con exactitud el estatus imaginario del infinito. Es comprendiendo lo que hace en sus operaciones, que el pensamiento puede dar un estatus al infinito.

3. Dificultades de las diversas posiciones con respecto al infinito

Aristóteles denuncia las dificultades de las diversas posiciones anteriores con respecto al infinito. Lo hace al final del *Libro III* en el *Capítulo 8,* comenzando por las tres últimas razones (de las cinco expuestas), y resumiendo de manera lapidaria un debate difícil sobre las dos primeras que tocan al modo de existencia del infinito.

Dejemos de lado la refutación de la tesis de Anaximandro: la continuidad inagotable de la generación no requiere de la existencia de un cuerpo sensible que sea realmente infinito [5]. Nos interesará sobretodo la refutación al cuarto argumento.

El argumento confunde, según Aristóteles, *limitación* y *contacto*, que son cosas diferentes. Si el contacto implica dos términos, ese no es el caso del límite, que es absoluto. Dicho de otra forma, no es porque un objeto está limitado que está necesariamente en contacto con otra cosa. Todo objeto está limitado, o si no, ¡no sería objeto! Pero no toda limitación permite un contacto. Un hombre está limitado; uno no puede decir, por tanto, que está en contacto con otro (*Met.*, K, 12, 1069a; *Cat.*, 6,4b 25-32 y 5a 1-15). De la misma manera, un punto o un conjunto de puntos no puede estar en contacto con el vacío: no habría en cierta manera más espacio. Es, por otra parte, lo que pasa en los extremos del mundo: el cielo no tiene más espacio, aunque sea el fundamento de todos los espacios.

El tercer argumento que refuta la quinta razón para creer en la existencia del infinito, hace notar que no se busca normar las cosas sobre nuestra representación. Que yo me represente a alguien fuera de la ciudad no hace que ese alguien esté realmente fuera de la ciudad. Es, sobretodo el hecho que está fuera de la ciudad, que fundamenta la representación que yo me hago de que está fuera de ésta. Es del ser al conocer que se debe sacar la consecuencia, y no a la inversa. Hay, desde este punto de vista, un realismo en Aristóteles [6]: pensar que la representación sea la medida de las cosas es simplemente "absurdo". Que una cosa sea representada en ella misma es un paso esencial, pero no es más que un "accidente". No se obtiene jamás una verdad de la cosa, sin criticar su manera de aparecer en nuestro pensamiento. La crítica de la representación es necesaria para aprehender la verdad. En el libro IV, 5 de la *Metafísica* —libro en el que se encuentra largamente refutada la posición de Protágoras—, Aristóteles escribe:

> *Respecto a la naturaleza de la verdad, debemos sostener que no todo lo que parece* ***es*** *verdad [1010b 1-2]*

La noción de infinito suscita una revisión del pensamiento en sí mismo y una crítica de las apariencias.

En cuanto a los otros dos argumentos que conducen a creer que el infinito existe, el del tiempo —asociado al movimiento— y el de las magnitudes —que se dividen o que se aumentan—, Aristóteles se contenta con señalar la manera en la que ciertos entes son infinitos y de negar, para otros entes [7], que lo sean por la inteligencia.

> *El tiempo y el movimiento son infinitos, y también la representación (noesis), pero la parte que uno toma no subsiste. [**Física** III,8 208a, 20-21]*

Observemos que el argumento realista precedente (que la representación no podría ser la medida de las cosas) ya no es válido —no enteramente al menos— para el movimiento y para el tiempo. No hay que olvidar la observación que "*no puede haber tiempo sin alma*" [*Física IV, 14 223a, 25]*. Entonces, dejemos que el alma contribuya de manera ilusoria a la creencia en el infinito de las magnitudes puesto que contribuye de manera muy positiva a un cierto tipo de infinito. El hecho de que la representación no capture el tiempo en su conjunto, que no pueda asirlo más que en sus momentos, es lo que da la ilusión de infinitud. Es la imposibilidad del tiempo de darse como totalidad, es decir, de darse de otro modo que no sea en una parte evanescente, que hace que el tiempo nos parezca infinito.

Regresaremos sobre la negación del infinito de magnitudes —en tanto al menos que este infinito dependerá de los actos de nuestro espíritu que son la división y la composición—; ya que, para este debate, se debe tomar en cuenta la distinción entre existencia en acto y existencia en potencia del infinito.

Sin embargo, quisiéramos antes revisar las razones que nos conducen a la negación de la existencia del infinito.

4. Razones que llevan a negar la existencia del infinito

Veremos que tales razones son tan problemáticas como aquellas que nos conducen a creer en su existencia:

> *. . . Pero el problema del infinito es difícil: muchas contradicciones resultan tanto de suponer que existe como de suponer que no existe [**Física** III, 4 203b, 31]*

Separemos, de las diversas razones expuestas por Aristóteles, dos de ellas:

La primera está destinada a mostrar que el infinito no puede existir como una substancia separada o como un individuo [8].

Aristóteles razona por el absurdo: si el infinito es substancia, entonces toda parte del infinito será infinita. En efecto, si el aire es substancia, toda parte del aire es aire. Sólo que, en lo que concierne al infinito, es absurdo suponer que "*la misma cosa pueda ser varios infinitos*" [204a 25] —lo que sería el caso si el infinito fuera substancia—.

Tenemos entonces aquí un argumento para mostrar que el infinito nunca es más que el infinito de algo.

El argumento, tan decisivo para Aristóteles, no es tan obvio, sin embargo, para nosotros en la actualidad; porque el estagirita no explica por qué razón un todo infinito no puede estar compuesto de una multiplicidad de infinitos. ¿Qué hay de imposible —es decir, de contradictorio— en el hecho de que la misma cosa sea al mismo tiempo muchos infinitos? En tanto que estamos dispuestos a admitir que la serie infinita de los números enteros contiene a la serie infinita de los enteros cuadrados, y a la de los enteros cúbicos [9].

Para entender la posición aristotélica, hay que recordar un principio básico de su lógica: que el todo es más grande que la parte —que vendrá a ser uno de los axiomas de Euclides—; es entonces imposible que Aristóteles concilie esta proposición con la idea de que un infinito pueda ser más grande que otro (porque si hay un infinito, ¿cómo se podría aceptar que hubiera algo más grande que él, al menos dentro de su orden?). Una parte no puede ser a la vez parte e igual al todo —lo que sería el caso si el infinito tuviera partes que fueran, ellas mismas, infinitas o, dicho de otra forma, si el infinito tuviera substancia—. De aquí, Aristóteles concluye que el infinito no puede ser una substancia, que no puede existir en sí; entonces sólo existe como atributo [10].

La segunda serie de razones que nos llevan a creer que el infinito no existe, consiste en argumentos lógicos.

> *Si, en efecto, la definición del cuerpo es "lo que está limitado por una superficie" no puede haber cuerpo infinito, ni inteligible, ni sensible (**Física** III, 5, 204b 4-7)*

La misma definición de "cuerpo" excluye la posibilidad de su infinitud. Porque para que un cuerpo siga siendo cuerpo, hace falta asignarle límites; si en el infinito uno rechaza los límites, rechaza al mismo tiempo la existencia del cuerpo.

Aristóteles hace valer el argumento para las matemáticas mismas. El matemático negaría la idea de cuerpo si supusiese uno infinito. No puede suponer un volumen infinito; se negaría de golpe la idea de volumen si se postulara una superficie infinita o una línea infinita. Estas negaciones provienen de la idea de volumen, que se piensa como el "dibujo abstracto" del cuerpo físico. Por otra parte,

> *. . . Ni puede el número tomado en abstracto ser infinito; en efecto, el número o lo que tiene número es numerable; si lo numerable pudiera ser contado, luego el infinito podría ser recorrido [Ibid. 204b 7-10]*

Una reflexión lógica —u ontológica—, sobre la idea de "número" nos lleva a negar su infinitud. Como el número es número de algo (sensible o derivado por abstracción de lo sensible), como no existe separado de las cosas más que por abstracción, puede ser muy grande pero no puede ser infinito. La noción de "*numerable*" excluye la de "*innumerable*", no hay nada más contradictorio que asignar un número a lo innumerable. El número no podría ser infinito sin dejar de desempeñar su función de número. Decir que una cantidad es infinita, es decir que no se le puede contar; la noción de "número infinito" es simplemente absurda desde el punto de vista aristotélico.

Sin embargo, si hemos visto que la afirmación del infinito no puede ser radical so pena de encontrar obstáculos mayores, la negación del infinito tampoco se puede llevar muy lejos. Aristóteles subraya [Ibid. 206] los graves inconvenientes a los que uno se expondría al negar absolutamente el infinito: de entrada, estaríamos obligados a fijar un principio y un fin para el tiempo. En segundo lugar, se perdería el infinito por división y, entonces, estaríamos obligados a dar una realidad a los indivisibles y, por lo tanto, a negar la continuidad; tendríamos, en consecuencia, que postular la existencia de átomos y caeríamos en las dificultades de la afirmación del vacío. Finalmente, el número no sería infinito en ningún sentido y, si el número es "número de" (del numerable), debemos también aceptar la abstracción (en relación con lo sensible) y admitir que es siempre posible agregar, a ese número abstracto, otro número. En consecuencia, no se puede negar sin ninguna precaución el infinito.

Hay entonces que encontrar un compromiso a la antinomia. Analicemos los términos en los que el infinito existe y en los que no existe.

5. La solución de "compromiso"

Hemos pasado de las investigaciones dialécticas sobre la manera en la que el infinito existe y sobre la manera en la que no existe, a las posiciones mismas de Aristóteles sobre la cuestión. ¿Qué sabemos de la existencia del infinito leyendo a Aristóteles? La idea tradicional sobre este asunto, es que:

> *Aristóteles ha negado la existencia del infinito en acto: no existe ni según la adición, ni según la división. El concepto de infinito designa una simple posibilidad ideal.*

Así resume Desanti el propósito del *Libro III* de la ***Física***, en la página del apéndice sobre *El infinito matemático* —consagrado a Aristóteles— de su obra *La filosofía silenciosa*. Boyer dice prácticamente lo mismo [11], observando que las discusiones escolásticas iban a ampararse en esta distinción. En cuanto a M. Kline [12], retoma la misma idea, señalando su importancia hasta nuestros días.

Ahora bien, si revisamos los textos de Aristóteles con atención y si no estamos dispuestos a aceptar este prejuicio sin cuestionar, nos llevamos la sorpresa de encontrar una posición del autor mucho más sutil. Leamos un párrafo extenso de la ***Física:***

> *Ahora bien, se dice que las cosas existen tanto en potencia como en acto. Más aún, una cosa es infinita tanto por composición como por disminución. Ahora, como hemos visto, la magnitud no es infinita en acto, pero lo es por división (no es difícil refutar la teoría de las líneas indivisibles); queda entonces que el infinito es en potencia. Pero no basta tomar la expresión en "potencia" como en el caso en el que uno dice: esto es una estatua en potencia; es decir, esto será una estatua, como si hubiera una cosa infinita que debiera en el futuro serlo en acto. Pero, puesto que el ser se toma en varias acepciones, y decimos que algo es infinito en el sentido en el que decimos que es el día o los juegos, una renovación continua. Y en efecto en estos ejemplos hay existencia en potencia y en acto. Decimos que hay Juegos Olímpicos tanto en el sentido de que pueden ocurrir como en el de que están realmente ocurriendo. [Ibid. 6, 206a 14-23]*

Aristóteles inicia la discusión distinguiendo "el ser en potencia" y "el ser en acto", y confronta enseguida el infinito con esta distinción. Veamos qué hay que entender por "acto" y por "potencia". El acto:

> *Actualidad significa la existencia de la cosa, y no la manera en la que decimos que existe en "potencia"; cuando decimos, por ejemplo, que potencialmente la estatua de Hermes está en el bloque de madera, o que la semirrecta está en la recta entera, porque podría ser prolongada; y aun el hombre que no ha estudiado, lo llamamos hombre de ciencia en potencia si es capaz de estudiar. La otra manera de existir es la existencia en acto (Metafísica, IX, 6, 1048a 30-35).*

La potencia es el ser de lo que está en movimiento; de lo que está en el devenir, de lo que no ha llegado todavía a alcanzar su meta. El acto es el ser del resultado de este devenir; no lo que está deviniendo sino lo devenido; no el edificar sino lo edificado.

Parecería que el infinito, no pudiendo jamás darse como un resultado (puesto que uno puede siempre dar algo más grande o algo más pequeño que toda magnitud dada), no puede existir en acto.

Pero en el mismo texto, Aristóteles nos pone en guardia contra una manera falsa de considerar el infinito en potencia. No es necesario tomar el término "*en potencia*" como cuando uno dice: "*esto es, en potencia, una estatua*" (sentido contemplado en el fragmento de la *Metafísica* que acabamos de citar), sino en el sentido de "*una renovación continua*" —como el día, como la lucha, como la olimpiada—. Uno puede vivir un día instante por instante, pero no puede tenerlo jamás todo entero, como se tiene un individuo. El día no es un individuo; es un proceso que no puede darse todo entero de golpe. Esto no quiere decir que el día o que la olimpiada no existan; sino que su ser sólo se da por el instante, por cada instante (por cada día para la olimpiada). De la misma forma, el proyecto de medir la diagonal de un cuadrado con su lado, o el de contar la serie de los números enteros, develan el infinito. Cada refinamiento de la medida no es más que una posición para alcanzar otra y otra más todavía.

Notemos aquí que Aristóteles toma el ejemplo de la duración de tiempos limitados (el día, la olimpiada) porque supone, por otro lado, que el tiempo es infinito. El ejemplo está cuidadosamente elegido para hacer comprender que, así como el día envuelve los instantes, "*el finito envuelve el infinito*" [***Física***, 207a 23-24]. Sin duda la cosa es fácil de comprender si pensamos en el infinito por división, que está manifiestamente contenido en la magnitud dividida. Pero es menos fácil de comprender en el caso del infinito por composición: es el momento de recordar que un cuerpo infinito es imposible. Así, todo infinito está limitado por lo finito.

El texto de la ***Física*** (206a 18-22) no nos lleva a negar la existencia de un infinito en acto (al menos cuando se trata del infinito por división). El infinito existe en potencia y en acto.

Este punto está confirmado en el *Libro IX* de la ***Metafísica***, pero si citamos este texto, no es tanto para confirmar que la consideración del infinito sacude y desplaza la distinción del acto y la potencia, sino para señalar un punto que no está enunciado en la ***Física*** y que parecería un tanto contradictorio:

> *El infinito no existe en potencia en un sentido tal que deba ulteriormente existir en acto a título de realidad separada; sino que está en potencia solamente para el conocimiento: porque el hecho de que el proceso de división nunca deja de ser posible, da como resultado que esta actualidad existe potencialmente pero no que existe por separado.* [***Metafísica***, IX, 6, 1048b 14-18]

Notemos que la existencia en acto del infinito sólo está negada si uno quiere hacerlo existir como una substancia, como un sujeto, de manera separada. Lo que existe como una substancia "*como un sujeto en sí*" [***Física*** III, 208a], es el continuo sensible. La realidad del infinito no es aprehensible fuera de lo que es infinito.

Pero Aristóteles agrega —más claramente en la ***Metafísica* que en el *Libro III*** de la ***Física***— que "*el ser en potencia no lo es más que para el conocimiento*". El infinito es entonces lo que aparece en un pensamiento que proyecta reducir el continuo sensible mediante la división.

Ahora bien, al final del *Libro III* —recordemos— Aristóteles negaba explícitamente que una magnitud fuera infinita por la reducción o por el aumento que se opera en su representación (noesis). No es entonces, según la ***Física***, sólo por el conocimiento que una magnitud es infinita. Aristóteles opone a este propósito el caso del infinito al caso del tiempo: el alma es más una parte constitutiva del tiempo que del infinito (porque sin el alma no habría tiempo, pero Aristóteles no dice que sin el alma no habría infinito en las magnitudes).

Se pueden conciliar los textos de esta manera: el infinito se muestra a la inteligencia, dentro de su proyecto de división, cuando se confronta a una realidad sensible; pero este infinito —que no existe en sí como un individuo— pertenece al continuo sensible (al menos en lo que concierne al infinito por división). El infinito extrae su realidad del continuo sensible en tanto que se confronta a nuestra inteligencia.

Nos queda por ver en lo que falta —y ese será nuestro último punto antes de señalar las consecuencias de esta dialéctica para la cuestión del infinito matemático en Aristóteles, la disparidad del tratamiento, ya muy sensible en la parte dialéctica, entre los dos infinitos (por composición y por división).

Aristóteles comienza por afirmar "*la identidad en cierta manera*" del infinito por composición y del infinito por división:

> *En cierta forma, el infinito por composición es la misma cosa que el infinito por división. En una magnitud finita, el infinito por composición resulta de un camino inverso al otro. Porque justo en la medida en la que el cuerpo aparece dividido al infinito, en esta medida las adiciones sucesivas parecen converger hacia el cuerpo finito [206b 3-4; 206b, 16-17]*

Retomemos la condición "*en la cosa limitada*". Se puede dividir una magnitud en magnitudes tan pequeñas como se quiera; se puede también recomponer en sentido inverso y obtener la magnitud de donde se partió. En ese caso, el infinito por composición no es lo que excede a todo límite, sino lo que permite alcanzar el límite.

Ahora bien, Aristóteles no ignora que se puede considerar otro uso del infinito por composición: el de agregar a una magnitud otra magnitud fuera de ella; pero esta vez:

> . . . *siempre será posible tomar algo* ab extra. *Aun así, la suma de las partes tomadas no excederá cualquier magnitud determinada, lo mismo que en la dirección de la división toda magnitud determinada será rebasada y siempre habrá una parte más pequeña [**Física** 206b 18-19]*

Aristóteles precisa que uno no podrá hacerlo en potencia: "*rebasar todo por razonamiento no podrá hacerse, ni aun en potencia*" [Ibid., 20-21].

No es porque uno no pueda darse una idea de una magnitud dada y de que es posible recomenzar cada vez, que hay una existencia en potencia del infinito por composición. Es claro aquí que la potencia es distinta de la simple concepción, porque nada impide a uno imaginar magnitudes siempre más grandes que toda magnitud dada. Solamente que cuando uno hace esto, se olvida que la magnitud es *magnitud de* (algo físico); que las matemáticas derivan de la física y encuentran ahí su límite (a pesar de su idealidad y de su abstracción); que la verdadera posibilidad, es la posibilidad física. Es esto lo que un pensamiento auténtico debe tomar en cuenta.

Entonces, para resumir la cuestión de la existencia y de la no-existencia del infinito, tenemos que:

a) El infinito por composición no nos hace descubrir un infinito de magnitudes existente en acto —salvo quizás el infinito del tiempo—. La inteligencia debe entonces criticar el deseo de suponer un tal infinito de magnitud (que no tiene que ser ni en acto ni en potencia). Por el contrario, el infinito por composición es del todo aceptable como inverso de la operación de división.

b) El infinito por división nos hace descubrir un infinito de pequeñeces que está ligado a la existencia del continuo. Se puede muy bien decir que existe en acto y en potencia, siempre y cuando se tenga cuidado de considerarlo un atributo del continuo.

Busquemos entonces las consecuencias de las consideraciones precedentes sobre el terreno de las matemáticas.

II. ARISTÓTELES Y LAS MATEMÁTICAS EN TANTO QUE UTILIZAN LAS NOCIONES DE INFINITO Y LA DE CONTINUIDAD.

El texto decisivo con respecto a este punto dice que:

> *La teoría no suprime las consideraciones de los matemáticos, desaprobando la existencia en acto del infinito en el sentido del crecimiento, considerado como lo que no puede ser recorrido; porque, en realidad, ellos no tienen necesidad y no hacen ningún uso del infinito, sólo postulan que una línea recta finita se puede prolongar tanto como se quiera; ahora bien, la división efectuada sobre una magnitud muy grande puede aplicarse en las mismas proporciones a otra magnitud cualquiera; así, para la demostración poco importan las magnitudes reales. [**Física** 207b 27-33]*

Aristóteles quiere establecer dos tesis: (a) que los matemáticos no tienen necesidad de considerar una magnitud infinita en acto o en potencia, les basta con una magnitud tan grande como se quiera; y (b) que el matemático no tiene por qué preocuparse de la realidad de las magnitudes con las que trata, eso concierne sólo al físico. Veamos éstas dos tesis que Aristóteles se toma el cuidado de explicar.

1. Los matemáticos no necesitan el infinito

El autor no ignora el famoso "*Lema de Eudoxio*" —que será más tarde enunciado por Euclides en los ***Elementos*** *[X, 1]*—, puesto que lo enuncia y se sirve de él en una demostración física:

> *Por medio de adiciones continuas a una magnitud finita, debo llegar a una magnitud que exceda cualquier límite asignado; de la misma forma, por sustracciones continuas debo llegar a una (magnitud) que caiga por debajo de cualquier límite asignado [**Física**, Libro VIII, Capítulo 10, 266b 3]*

Esto no quiere decir que en magnitudes grandes o pequeñas se alcanzará el infinito; esto sólo quiere decir que se llegará siempre a exceder una magnitud dada, por adición de otra magnitud dada, tantas veces como haga falta; o que uno agotará completamente una magnitud, separando tantas veces como haga falta, la misma magnitud (más pequeña que la primera).

Es con este principio que los matemáticos trabajan cuando, por el método de exhaustión, buscan la cuadratura de una superficie bajo una curva o la rectificación de una curva. Evitan así todo recurso a la noción de infinito.

El análisis de nuestro texto [207b 27-33] nos permite ir más lejos:

> *La división efectuada sobre una magnitud muy grande puede aplicarse en las mismas proporciones a otra magnitud cualquiera*

La alusión a la teoría de las proporciones de Eudoxio es evidente. Parece que el término διαιρεσιο (*diaresis*) que en general se traduce como "división" significa también, dentro del vocabulario de Aristóteles, las "construcciones" que se introducen en las figuras para hacer las demostraciones.

La idea parece ser que, para cada prueba de un teorema concerniente a una figura dada, existe una figura semejante, más grande o más pequeña, para la cual se puede repetir la prueba. En el fondo, toda demostración en geometría supone una analogía implícita que permite generalizar la demostración a figuras tan grandes como se quiera o tan pequèñas como se quiera.

Esto nos lleva a plantear la pregunta del estatus, según Aristóteles, de la figura en matemáticas. De entrada, la figura no debe ser infinita, porque se debe poder construir. Se dice que es el acto de construir, lo que constituye una prueba de la existencia en Aristóteles, como lo es en el caso de Euclides, que establece la posibilidad de entes geométricos sobre la base de su constructibilidad. Pero atención: la figura está en una relación de representación con el objeto geométrico. El matemático puede muy bien razonar sobre figuras falsas: puede tener cualquier recta y suponer que mide un pie, aunque esto no ocurra en realidad (físicamente). En los ***Segundos Analíticos*** se dice con mucha claridad:

> *Ni el geómetra supone hipótesis falsas, como han dicho algunas personas, estableciendo que uno no debería usar la falsedad, pero que el geómetra habla falsamente cuando afirma que la línea trazada es de un pie de longitud, o es recta, cuando que ella ni es recta ni tiene un pie de longitud. En realidad, el geómetra no concluye nada de la línea particular de la cual habla, sino sólo de las nociones que expresan su figura [I, 10, 76b 39-77a 2].*

Dicho de otra manera, por más que sean construibles las figuras del geómetra que representan las magnitudes, tienen un valor ideal. Lo que cuenta esencialmente para cualquier elemento de una construcción es la puesta en relación con los otros elementos; pero la realidad de la magnitud no tiene sentido para el geómetra sino para el físico. Es por esto que, a los ojos de Aristóteles, es simplemente absurdo discutir si una magnitud matemática es en realidad infinita o no; esto es no comprender la naturaleza de una magnitud matemática.

Hemos iniciado ya la discusión del segundo punto sobre la naturaleza de las magnitudes; para concluir revisaremos un texto largo de la ***Física***.

Es justo también que haya un límite inferior en el número, y que por el lado del aumento una cantidad cualquiera pueda ser siempre rebasada. Pero para las magnitudes, es al contrario: en el sentido de la disminución se rebasa una magnitud cualquiera, pero en el sentido del aumento, no hay magnitud infinita. La razón de esto es que el uno es indivisible cualquiera que éste sea. Por ejemplo, el hombre es un hombre y no varios; ahora bien, el número está hecho de muchas unidades, que forman una cantidad; en consecuencia, hay que detenerse en el indivisible; porque dos y tres son números, y lo mismo para cada uno de los otros números; pero en el sentido del aumento, uno siempre lo puede concebir. Porque las dicotomías de la magnitud son en número infinito; mientras que el número es infinito en potencia y no en acto, pero el número considerado puede traspasar toda cantidad determinada. Pero en la dicotomía, no se trata de un número separado, y el infinito no está en permanencia, sino en devenir, como el tiempo o el número del tiempo.

> *Sin embargo, para las magnitudes, es al contrario; porque el continuo es dividido al infinito y no hay infinito en el sentido del aumento. En efecto, lo que puede ser en acto es la medida de lo que puede ser en potencia: así, puesto que no hay magnitud sensible que sea infinita, no puede haber magnitud que sobrepase cualquier magnitud determinada, porque sería una cosa más grande que el cielo. [207b 1-20]*

Limitemos nuestro comentario a dos observaciones: Aristóteles establece de entrada que el infinito del número es exactamente el inverso del infinito de las magnitudes continuas de los geómetras. A continuación, hay que decir que tiene sentido definir una unidad en aritmética; ella es la semilla a partir de la cual se pueden crear los otros números —hasta el infinito—. Mientras que la unidad para las magnitudes es del todo arbitraria. Toda magnitud puede ser usada como unidad de medida y se muestra, a placer, grande o pequeña. Es este poder que proyectamos sobre el objeto mismo, que nos hace creer en su infinitud.

Couturat, atento a toda distinción entre la aritmética y la geometría, escribe en el mismo sentido que Aristóteles:

> *La unidad numérica, cuya repetición constituye el número entero, es esencialmente indivisible: es el* **uno** *absoluto y simple; se le puede tomar o no, pero no se puede poner menos que uno: es el elemento primitivo e irreductible del número. Al contrario, la unidad de medida es una magnitud cualquiera, que no se distingue de otras magnitudes de la misma especie por ningún carácter intrínseco, y cuya elección es, en consecuencia, enteramente arbitraria. Ella es divisible, como las otras, en un número cualquiera de partes, siempre iguales entre sí, y todas parecidas a ellas mismas. Cada una de estas partes puede desempeñar a su vez el papel de unidad, porque posee las mismas propiedades de la unidad primitiva, y es susceptible de las mismas divisiones. En una palabra, la unidad de magnitud es indiscernible de otras magnitudes de la misma especie. También las magnitudes son meramente relativas las unas a las otras, y ofrecen entre ellas las mismas relaciones, cualquiera que sea la magnitud elegida como unidad; mientras que en el conjunto de los números hay un elemento absoluto, la unidad, que es la "medida común" de todos los otros números [13].*

En las consideraciones anteriores se puede apreciar un alto grado de consciencia sobre los actos por los que el matemático produce sus objetos. La concepción que Aristóteles tiene de los matemáticos es una concepción activa, en el sentido de que los objetos matemáticos, aunque derivados de lo sensible, son entes que juegan una función en un campo donde tienen una especie de autonomía.

> *El punto, el instante, no son constituyentes, elementos últimos de los que lo continuo estaría formado, sino más bien designaciones ideales que permiten distinguir sobre un continuo de intervalos [14]*

El punto no es ya el punto-elemento de los pitagóricos; "*está pensado como una función: la de una frontera ideal*" [15]. Es, cada vez más, la noción de magnitud que cambia en esta percepción del mundo de las matemáticas por el matemático.

De esta toma de conciencia de los actos matemáticos por el matemático, el infinito ha sido, inseparablemente, una de las condiciones y esto no ha sido fácil, al menos bajo una de sus formas. Condición de entrada: las últimas palabras del *Libro III* de la ***Física*** conciernen a la "representación" que debe saber limitarse en sí, si se quiere hablar correctamente de las cosas, en particular bajo el ángulo del infinito. La noción de infinito permite descubrir el carácter operatorio de la ciencia —en particular de las matemáticas—. Pero si es afirmado en acto y en potencia en la división, el infinito es negado en la composición (al menos cuando se trata de componer una infinidad de magnitudes). Sobre este último punto, el aristotelismo manifiesta un límite discutible, desde el mismo punto de vista de las matemáticas de su tiempo, como lo ha dicho M. Hintikka [16]. El quinto postulado de Euclides no puede ser justificado por la concepción aristotélica del infinito en matemáticas.

2. Aristóteles y la geometría euclidiana

Notemos de entrada que la recta está definida por Euclides como: "*una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella*" (*Definición 4*) [17], y por tanto, no hay ninguna referencia explícita al infinito. Por lo contrario, la definición de las palabras hace explícitamente referencia al infinito:

> *Las paralelas son rectas que, estando situadas en un mismo plano y prolongándose indefinidamente por ambos extremos, no se encuentran ni de un lado ni del otro (Definición 23) [18]*

Es evidente que entendido a la manera aristotélica, el infinito (como magnitud tomada tan grande como se quiera) no permite establecer la unicidad de la paralela a una recta dada que pasa por un punto exterior a ella. En sentido estricto, la concepción aristotélica de las matemáticas y, por vía de consecuencia, la concepción de la física, son "no-euclidianas".

Se puede confirmar esto de dos maneras: (a) por una interpretación aristotélica del quinto postulado (como Hintikka se arriesga a hacerlo en el artículo citado); y (b) por la inspección de dos textos donde Aristóteles habla de las paralelas.

Veamos el primer modo. El quinto postulado dice que

Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos [19].

De aquí se puede deducir que hay una posición límite, aquella donde los ángulos interiores del mismo lado suman exactamente dos rectos, en cuyo caso las rectas prolongadas al infinito no se encontrarán ni de un lado ni del otro.

Pero interpretada a la manera aristotélica (que no acepta infinito de magnitud en acto), este postulado no permite establecer la unicidad de la paralela que pasa por un punto exterior a la recta. Porque para establecerlo no basta tomar una distancia muy grande, después una distancia todavía mayor, y así indefinidamente. Hace falta tomar el infinito en acto, que Aristóteles rechaza. Se ve que la manera aristotélica de comprender las matemáticas no es euclidiana (al menos desde este punto de vista [20]).

Claro está que no se trata de hacer de Aristóteles una especie de precursor de Riemann o de Lobachevski; pero la historia nos permite eliminar la creencia fácil y falsa que el pensamiento es espontáneamente euclidiano. Fue necesario que la geometría de la antigüedad lo adivinara; y se ve que uno puede hacer matemáticas coherentes sin el postulado de las paralelas.

Leamos los dos textos en los que Aristóteles manifiesta una comprensión muy fina del carácter hipotético de la existencia de las paralelas.

En los ***Primeros Analíticos*** [II, 65a 5-10], queriendo dar un ejemplo de petición de principio, Aristóteles toma el caso del matemático que, para resolver un problema o dar un sentido a un enunciado, toma una paralela. Darse el derecho de tomar una paralela parecería una usurpación; haría falta —al menos dentro de ciertas circunstancias— probar que uno tiene ese derecho. Este es el texto:

La petición de principio puede hacerse estableciendo lo que es anterior por medio de lo que es posterior (. . .). Es eso lo que hacen precisamente aquellos que creen dibujar paralelas: no se dan cuenta de que están suponiendo hechos que es imposible demostrar a menos que las paralelas existan.

En otro texto sacado de la ***Física*** [II, 9, 200a 16-18], confirma la manera hipotética de poner las paralelas:

como la recta es lo que es, es necesario que el triángulo tenga sus ángulos iguales a dos rectos; pero no inversamente; aunque si los ángulos no son iguales a dos rectos tampoco la recta es lo que es

Dicho de otra manera, en matemáticas, cuando la consecuencia es verdadera, la premisa sobre la que ella se apoya será sólo **posible**; por lo contrario, cuando la consecuencia es falsa, la hipótesis es necesariamente falsa y debe ser rechazada. La existencia de los objetos matemáticos es entonces solamente hipotética. La existencia de la paralela, o lo que viene a ser lo mismo, la de la suma de los ángulos interiores de un triángulo igual a dos rectos, es sólo hipotética en Aristóteles.

III. CONCLUSIONES

La lectura de algunos fragmentos de reflexión aristotélica sobre las matemáticas nos han permitido develar y poner en escena relaciones de las nociones que nos acompañarán constantemente en la matemática. Hemos encontrado la noción de "límite" que requerirá de siglos para perder su carácter intuitivo. Nos hemos cruzado con la noción de "continuo" que Aristóteles tiene cuidado de definir en múltiples pasajes de su obra [21]. Si la definición de la continuidad no alcanza evidentemente en Aristóteles el rigor formal que tiene en Dedekind [22] por ejemplo, es porque va más allá de una intuición puramente empírica de su objeto. Esta continuidad es esencial para los grandes geómetras puesto que permite oponerla, de manera clara, a la discontinuidad de los números.

La voluntad de representar ciertas magnitudes por medio de números, o de establecer numéricamente la relación de magnitudes continuas (como la de la diagonal al lado del cuadrado), lleva a descubrir rupturas, muy finas pero innegables, en la serie de los números que hoy llamamos racionales y requiere la creación de nuevos números, inalcanzables por la vía de las fracciones, que se llamarán irracionales. La noción de irracional de la que Platón en las *Leyes* (VII, 819d -820e) se lamenta que sea desconocida por los griegos, y preconiza su enseñanza a los jóvenes, tiene entonces una liga íntima con la de infinito.

El "indivisible" es también una de las nociones clave de los debates sobre el infinito, en lo que es el objeto que representaría el término de la división de un segmento de recta, de curva o de una figura cualquiera (superficie o volumen). Aristóteles niega su existencia, al igual que niega la existencia de los átomos (y del vacío en el que estarían eventualmente situados) [23]. Se puede siempre distinguir los instantes en el tiempo y los puntos en la línea, pero el tiempo no está hecho de instantes, ni la línea de puntos.

El infinito de magnitudes o por composición y el infinito por división son los subtemas principales. No hay que olvidar que el tiempo será, para el matemático, un compañero permanente de ruta que reencontraremos en pleno siglo XVII con Cavalieri y con Newton.

Dejemos aquí nuestra enumeración en tanto que sería muy difícil limitarla, puesto que se extiende a las nociones lógicas de unidad, totalidad, afirmación y negación, substancia, existencia, posibilidad. . . No podemos pasar por alto que la noción de infinito perturba estas nociones lógicas. Una cultura que ignora el cero [24] no puede hacer desempeñar a la unidad el papel que será, mucho más tarde desempeñado por el cero. ¿Se opera con los ceros de magnitudes como se hace con las unidades? En lo que concierne a la totalidad, ¿qué se quiere decir cuando se habla de "*todos*" los puntos de una recta o de una curva"?, ¿o de "*todas* las líneas de una superficie"? El infinito cambia radicalmente el sentido de expresiones que son perfectamente claras cuando se trata de colecciones finitas. En cuanto a la afirmación y a la negación, ¿desde que uno supone el infinito, afirma o niega algo?, ¿se puede decir que el infinito existe o sólo es posible esta afirmación sin cuestionar el sentido de *existir* o de *ser posible*?, ¿en qué sentido existen los entes de los que hemos hablado como acompañantes necesarios del infinito, como son el límite, el continuo, etc.? Parece ser que esto queda claro: el pensamiento del infinito obliga a refinamientos de nuestra manera de comprender los diversos modos de existencia.

Vayamos más lejos: la confrontación con el infinito no cambia sólo el sentido del concepto; impone unas estrategias y excluye otras.

NOTAS

[1] ***The Complete Works of Aristotle***. *The Revised Oxford Translation*, Edited by Jonathan Barnes, Princeton/Bollingen Series LXXIú2, Princeton University Press, Princeton, N. Jersey, 1985. La traducción del inglés de las citas que aparecen en el artículo es de la autora.

[2] En el *Libro II* de la ***Física*** (2, 194a 9-11).

[3] Notemos de pasada que las metáforas franquean este infinito por la vía de las analogías. Se habla sin empacho de una "voz clara", aunque no se pueda medir la voz por la vista.

[4] ***Física***, 202b 30-36.

[5] Los seres provienen incansablemente de otros seres, sin que sea necesario suponer una fuente infinita de profusión.

[6] Veremos más tarde que este realismo es parcialmente puesto a prueba por el pensamiento del infinito.

[7] Quizás demasiado rápido en lo que concierne al infinito de una magnitud por reducción.

[8] Es imposible no recordar aquí a Galileo, quien sobre este punto, como sobre tantos otros, no seguirá a Aristóteles.

[9] Lo que será dicho al personaje de Salviati en los ***Discursos concernientes a dos nuevas ciencias de Galileo*** *"que los atributos 'igual', 'más grande' y 'más pequeño' no tiene sentido para cantidades infinitas, sino sólo para cantidades finitas"*.

[10] En consecuencia, se percibe aquí cómo, el uso del concepto de infinito, corre el riesgo de poner en mal los principios de la razón que nos pueden parecer más evidentes. Encontramos la ocasión de hacer esta observación cada vez que un geómetra se da el derecho de hacer una operación sobre el infinito. (La noción de igualdad, por ejemplo, va a ser extraordinariamente maltratada por las operaciones de suma del siglo XVII; algunas líneas del cálculo, una decisión de los matemáticos, pueden poner en mal los principios de la razón que parecen mejor confirmados).

[11] Boyer C.B. ***The History of the Calculus and its Conceptual Development*** (Dover publications, N. York 1959): *"Los filósofos medievales han discutido la cuestión (de lo indivisible) más desde el punto de vista de la divisibilidad al infinito que del de las magnitudes infinitas. Recordemos que Aristóteles distinguió dos tipos de infinito —el potencial y el actual—; niega categóricamente la existencia del último y admite el primero como realizado solamente en el caso de las magnitudes continuas infinitamente pequeñas y en el caso de los números infinitamente grandes"* (p. 68).

[12] Kline, M. ***Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*** (New York, Oxford University Press, 1972): *"Para Aristóteles, sólo existe el infinito tomado potencialmente"* (p. 53).

[13] Couturat, L. ***De l'infini mathématique*** (Paris, Blanchard, 1973), p. 431.

[14] Desanti, J.T. ***La philosophie silencieuse (Paris, Ed. du Seuil, 1975), p. 269.***

[15] Ibid.

[16] Hintikka, J. Aristotelian Infinity, The Philosophical Review, 75, 1966, pp. 197-218.

[17] Traducción de Luis Vega.

[18] Ibid.

[19] Ibid.

[20] Aunque, por otra parte hay en Euclides una muy amplia inspiración aristotélica.

[21] ***Física***, V, 227a; VI, 231 a 22; ***Meta.***, K, 12 1068b 27. *"Es llamado contiguo aquello cuyas extremidades son al mismo tiempo, continuo aquello cuyas extremidades no son más que una"*.

[22] Dedekind, ***Continuidad y número irracional***, &2, III: *"Si uno puede repartir todas las magnitudes de una misma especie en dos clases tales que . . . .*

[23] ***Física***, 234a 22-23; 241a 2-5.

[24] Los griegos no conocían el cero; fueron los matemáticos hindúes o indos quienes lo introdujeron en las funciones que le conocemos (anulación de todo número multiplicado por cero, la no-disminución del número al que se le sustrae cero, el número dividido entre cero como una cantidad infinita).