Relime Vol. 6, Núm. 3, julio, 2003 pp. 163-197

Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica.

Analía Bergé[1]
Carmen Sessa[2]

RESUMEN
Presentamos en este artículo un análisis histórico-epistemológico de la noción de *completitud del conjunto de números reales*. En nuestro análisis ligamos problemas y preguntas de determinados períodos históricos, con el estado de conocimiento y las herramientas disponibles en esos momentos y con las diferentes conceptualizaciones producidas. La relación entre números y magnitudes así como los diferentes estadíos de las nociones de continuidad de la recta y completitud del sistema numérico, son analizados en el artículo a partir de datos históricos que son presentados, en muchos casos, con soporte en las fuentes originales. Las preguntas que orientan el trabajo provienen de una reflexión didáctica, y el tipo de análisis que se realiza nos permite enunciar conclusiones que podrían ser de utilidad para la enseñanza. El presente estudio se inscribe en una investigación didáctica acerca de la noción de conjunto de los números reales.
PALABRAS CLAVE: Números reales, Análisis epistemológico.

ABSTRACT
We present in this paper an historic-epistemological analysis about the notion *of real numbers set completness*. In this analysis we connect problems and questions at determined historical periods with the state of knowledge and available tools at those times and also with the different produced conceptualisations. The relationship between numbers and magnitudes as well as the different stages of the notions about *line continuity* and *numerical system completness* are analyzed on the basis of specific historical data, which are presented in many cases with the original texts as support. The questions guiding this study arise from a didactic reflection. The kind of analysis performed allows us to state conclusions that would be useful for Education. This study is enclosed in a larger Math Education research about the concept of *real numbers set*.
KEY WORDS: Real numbers, Epistemological analysis.

RESUMO
Apresentamos neste artigo uma análise histórica-epistemológica da noção de completitude do conjunto de números reais. Em nossa análise ligamos problemas e perguntas de determinados períodos históricos, com o nível de conhecimento e as ferramentas disponíveis nesses momentos e com as diferentes conceitualizações produzidas. A relação entre números e magnitudes bem como os diferentes estados das noções de continuidade da reta e completitude do sistema numérico, são analisados no artigo a partir de dados históricos que são apresentados, em muitos casos, com suporte nas fontes originais. As perguntas que orientam o trabalho provém de uma reflexão didática, e o tipo de análise que se realiza nos permite enunciar conclusões que poderiam ser de utilidade para o ensino. O presente estudo se inscreve em uma investigação didática sobre a noção de conjunto dos números reais.
PALABRAS CHAVES: Números reais, Análise Epistemológica.

RÉSUMÉ
Nous présentons dans cet article une analyse historico-épistémologique de la notion de

---

Fecha de Recepción: febrero de 2003
[1] *Departamento de Matemática FCEN- Universidad de Buenos Aires.*
[2] *Departamento de Matemática y CEFIEC FCEN - Universidad de Buenos Aires.*

complétude de l'ensemble des nombres réels. Dans notre analyse nous mettons en rapport des problèmes et des questions posées à des périodes historiques déterminées avec l'état des connaissances et des outils disponibles à ces moments-là, ainsi qu'avec les différentes conceptualisations produites à l'époque. La relation entre nombres et grandeur ainsi que les différents moments du développement des notions de continuité de la droite et complétude du système numérique sont analysés dans l'article à partir de données historiques présentées, dans plusieurs cas, avec le concours des sources originales. Une réflexion didactique est à l'origine des questions qui guident ce travail, et le type d'analyse que nous faisons nous permet d'énoncer des conclusions qui pourraient être utiles à l'enseignement. Cette étude s'inscrit dans une recherche didactique sur la notion d' *ensemble des nombres réels*
MOTS CLÉS: Nombres réels, Analyse épistémologique.

I. Introducción

I.1 El lugar del análisis histórico- epistemológico en nuestra investigación

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación en Didáctica de la Matemática, que tiene como objetivo estudiar la evolución de las representaciones de los alumnos acerca de la noción de *conjunto de los números reales*, a lo largo de los primeros años de la carrera de Licenciatura en Matemática y Profesorado en Matemática. Nos centramos en estudiar las evoluciones en la conceptualización de la noción de *completitud*, propiedad que distingue a R como conjunto.

En función de nuestro proyecto global, en este artículo nos proponemos realizar un análisis histórico-epistemológico de la evolución de esta noción. Varios investigadores en Didáctica de la Matemática han señalado la relevancia del análisis epistemológico para el análisis didáctico, sus potencialidades y sus alcances (Artigue, 1990, 1992, 1995), han analizado la relación entre epistemología, matemática y educación (Sierpinska & Lerman, 1996), han estudiado ciertos aportes específicos del conocimiento de la historia a la práctica docente (Bkouche, 1997) y han alertado acerca de la utilización ingenua de la historia de la matemática en la enseñanza (Radford, 1997).

En el análisis que aquí presentamos ligamos problemas y preguntas de determinados períodos históricos, con el estado de conocimientos y las herramientas disponibles en esos momentos y con las diferentes conceptualizaciones producidas. Creemos que el análisis de ese recorrido puede ser sumamente fértil para nuestro proyecto didáctico, en el sentido de ampliar nuestro repertorio de "posibles" cuando pensamos los hechos de la clase.

Por ejemplo, quienes enseñan un primer curso de Cálculo seguramente observan, a la hora de enseñar el Teorema de Bolzano[3], reacciones de perplejidad de los alumnos: "¿Para qué hace falta hacer un teorema para demostrar algo que es evidente?". Al tratamiento y a la comprensión de este teorema subyacen, entre otros elementos, las nociones de función continua, de recta geométrica y su continuidad, de conjunto de los números reales y su completitud, y de la correspondencia entre puntos y números. Sin embargo, generalmente esas nociones no se ponen en juego y el teorema pierde su riqueza debido al hecho de que es visualizado geométricamente y la continuidad de la recta es, para los alumnos a esa altura, un hecho natural, ya dado, que se presenta como evidente.

Desde la más temprana escolaridad, la recta ha sido el soporte natural para representar los números. Cuando se representan los distintos conjuntos (**N**, **Z**, **Q**) se la dibuja "llena", con un trazo continuo. Pensando en una intervención didáctica que contribuya a la conceptualización de la noción de completitud, un elemento que parece relevante, es

---

[3] El teorema dice que si f es una función continua definida en [a, b] tal que sg f(a) $\neq$ sg f(b), entonces $\exists$ $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$

la necesidad de problematizar desde la enseñanza, la evidencia gráfica de la continuidad de la recta.
Es importante tener en cuenta que la evidencia gráfica de la continuidad de la recta acompañó las producciones matemáticas hasta la segunda mitad del siglo XIX. El análisis histórico que presentaremos intentará dar cuenta de las diferentes maneras en que ésta fue considerada hasta ese momento. Ubicamos este análisis como insumo para una intervención didáctica a propósito de la completitud.
Asimismo, pretendemos aportar a la respuesta de las preguntas siguientes :

- ¿Cómo se ha jugado la correspondencia entre números y puntos de una recta en diferentes períodos de la historia? Y más generalmente, ¿cómo ha evolucionado la relación entre números y magnitudes?
- ¿Cómo era el trabajo de los matemáticos en temas de análisis, antes de que la noción de completitud del sistema de los números reales fuera enunciada?
- ¿Qué condiciones hicieron necesaria la formalización de esta noción? ¿Cuáles fueron las distintas respuestas que se dieron a este problema? ¿Cómo se llega a las formulaciones actuales?

No pensamos que las respuestas a estos interrogantes puedan dar satisfacción inmediata a los requerimientos de la enseñanza. Las condiciones en la historia que hicieron posible el planteo de problemas y de preguntas, son de alguna manera irreproducibles escolarmente si se piensa la construcción de conocimientos (en la historia y en la escuela) como una construcción social. Esta es la postura que adoptamos en nuestro trabajo.[4]
Sin embargo, el conocimiento de los “caminos” de la historia, con sus marchas y contramarchas, con sus momentos de ruptura, con sus retrocesos y sus baches, es una herramienta poderosa y un punto de partida, en manos del didacta, para acceder a mayores niveles de complejidad acerca de la naturaleza de los objetos que está estudiando.
En definitiva, nosotros identificamos tres diferentes “modos de uso didáctico” del análisis histórico-epistemológico: permite recuperar la complejidad de los objetos estudiados y *ensanchar* nuestras concepciones epistemológicas; amplía la capacidad del investigador para interpretar las conductas y respuesta de los alumnos; provee de insumos para pensar una problematización adaptada al aula. Si bien esta separación nos resulta operativa para ubicarnos en el espacio de articulación entre la epistemología y la didáctica, es claro que los bordes entre estos tres “modos” son difusos y que hay una delicada dependencia entre ellos.

I.2 De que tratan las distintas secciones del artículo

En las secciones **II**, **III**, **IV** y **V** nos hemos detenido en diferentes momentos de la historia de la matemática, previos a la formalización del concepto de conjunto de números reales. Hemos puesto la mira en ciertos desarrollos que interpretamos relacionados, implícita o explícitamente, con las nociones que hoy denominamos *completitud del dominio numérico* y *continuidad de la recta*. En la sección **VI** analizamos las ideas principales de dos construcciones clásicas de R, producidas en la segunda mitad del S XIX. En la sección **VII** nos ocupamos de la presentación axiomática llevada a cabo a comienzos del siglo XX. Finalmente, en la sección **VIII** presentamos nuestras conclusiones.

II. Los Elementos de Euclides

II.1. ciertos aspectos de la continuidad son implícitamente atribuidos a la recta y otros son tratados en detalle.

El Libro I de los *Elementos* de Euclides contiene 47 proposiciones referidas a la

[4] Para una reflexión crítica sobre las relaciones entre filogénesis y ontogénesis se recomienda la lectura del artículo de L. Radford, anteriormente citado.

geometría plana. Muchas de ellas aparecen bajo la forma de una construcción que es requerida en el enunciado y cuyo procedimiento de trazado se incluye en la demostración. Esas construcciones se apoyan, paso a paso, tanto en las definiciones, postulados y nociones comunes que encabezan el tratado como en las proposiciones anteriores. En algunos casos, son utilizados para esas construcciones los puntos de intersección de rectas con círculos y de círculos con círculos.

Por ejemplo, en la proposición 1 del libro I, donde se demanda la construcción de un triángulo equilátero sobre una recta (segmento) dada AB, se utiliza el punto de intersección de dos círculos previamente construidos. Euclides explicita y justifica en esta demostración cada paso meticulosamente a partir de las definiciones, postulados o nociones comunes que preceden a la proposición, salvo la existencia de un punto común entre ambos círculos. Es más que una mera omisión de la justificación de esta existencia: la misma no podría haber sido justificada a partir de lo que le precede[5]. Este es un hecho notable, señalado por todos los estudiosos de Euclides e interpretado con diferentes matices, según la postura del historiador.

Ejemplos parecidos encontramos en la proposición 12 del libro I donde se construye una recta perpendicular a otra recta dada por un punto exterior a ella utilizando el punto que queda determinado por la intersección de la recta con un círculo, o en la proposición 22 también del libro I donde se utiliza el punto de intersección de dos círculos en la construcción de un triángulo dados sus tres lados. ¿Por qué Euclides da por sentado la existencia de intersecciones sin plantearse la necesidad de ningún postulado que lo justifique?

Notemos que la mención a lo *continuo* en los *Elementos* aparece ya en el segundo postulado: “*prolongar continuamente una recta finita en línea recta*”. Pareciera que hay un sentido de ese término compartido entre Euclides y los lectores, que quizás sea cercano al uso cotidiano de la palabra. Las intersecciones de círculos y rectas, bajo ciertas condiciones, pueden bien ser consideradas como innecesarias de justificar, habida cuenta de este sentido “común” de la palabra continuo, que se considera desde los postulados como atributo de las rectas o al menos de sus extensiones, sentido que probablemente se apoye en una cierta materialidad de la representación.

Sin embargo, a lo largo de los trece libros Euclides hace al continuo objeto de un tratamiento muy complejo. Es cuidadoso en demostrar y señalar muchos atributos de la recta -como ser la existencia del cuarto proporcional o de segmentos inconmensurables- que guardan una estrecha relación con la continuidad. Son propiedades de las cuales es difícil tener una intuición apoyándose en la representación gráfica o material de la recta.

Para Maurice Caveing (Caveing, 1988) la ausencia en los *Elementos* de una explicitación de la continuidad de la recta no debería interpretarse como que el continuo era para los griegos un dato de base, una abstracción de lo empírico simplemente. Él ha buscado hacer caer esa hipótesis mediante un ensayo que muestra la complejidad que se abre en el tratamiento del continuo tanto en los *Elementos* de Euclides como en la *Física* de Aristóteles. Ha sostenido que esta omisión no puede simplemente tomarse como una ingenua utilización intuitiva del principio de continuidad, ya que el uso que hace Euclides de la noción de recta involucra varios principios: orden denso de los puntos de la recta, orden total entre magnitudes de la misma especie, la existencia de la cuarta proporcional y de la n-ésima parte; “*...lejos de venir dados de entrada en una intuición única y primitiva, estos principios se manifiestan a través del análisis regresivo de los requisitos de diversos procedimientos operatorios*” (Caveing, op.cit. p.30). Caveing sostiene que en la elaboración de lo que es la esencia de la recta hay elementos que

[5] Para poder justificar la existencia del punto de corte sería necesario un postulado que explicitase la continuidad de la recta, al estilo del muy posteriormente aparecido postulado de Dedekind (ver VI.1). La utilización del principio de continuidad de Dedekind para demostrar la existencia de estas intersecciones puede verse en la versión de los *Elementos* con notas de T. Heath, pág. 237 y 238 volumen I.

provienen del estudio de relaciones entre magnitudes. Desde su punto de vista, la esencia de la recta se reveló en el intento de medir un segmento con otro, cuando ambos son inconmensurables. El carácter ilimitado del proceso, "*... revela la existencia, en el seno mismo de la finitud del segmento, de una infinitud que, aún concebida como potencial, no puede pertenecer más que a un objeto ideal que resulta definido en tanto que tal por ese propio proceso*" (Caveing, op.cit. p.31). No existe de antemano una intuición racional que permita acceder a estas propiedades. "*Es un producto elaborado de la meditación ontológica y de la conceptualización matemática*" (Caveing, op.cit. p.41).
Ciertamente, la noción de recta de Euclides no queda atrapada por la formulación de los postulados, axiomas y nociones comunes, sino que se configura por todas las cuestiones inherentes a la recta que son tenidas en cuenta a través de los XIII libros. Es posible hacer esta consideración para las nociones que aparecen en toda obra matemática. Más aún, podríamos decir que los axiomas son, de algún modo, *producto* de los teoremas: hay un corpus teórico de objetos, relaciones y propiedades que se quiere organizar y presentar, y se buscan axiomas, compatibles y minimales, que permitan la construcción de todo el corpus.
En lo que resta de esta sección analizamos en detalle algunos aspectos del tratamiento de la recta en los *Elementos* y finalizamos en II.4, con una reflexión sobre el atributo de la continuidad que retoma con matices las afirmaciones de Caveing.

II.2 El tratamiento que recibían los números y las magnitudes.

Para los griegos sólo tenían estatuto de número los números enteros positivos. Los números racionales no existían como tales, pero sí se consideraban las razones entre números enteros. Estas razones representaban la relación entre dos longitudes, o más generalmente magnitudes, que admiten una unidad de medida común. Se cree que los pitagóricos poseían una teoría de proporciones para las razones entre números enteros, que permitía compararlas. Esta teoría aparece formulada en los *Elementos* en el libro VII, a partir de la siguiente definición (Euclides, libro VII, definición 20): *"(Cuatro) números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo, la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto."* Esto es, con una notación más moderna, decir que *a, b, c y d* son proporcionales si, cada vez que se tengan enteros m y n tales que $ma = nb$, resulta ser $mc = nd$. Observemos que, al tratarse de números (naturales), siempre existirán infinitos pares de enteros m y n que cumplan $ma = nb$.
En cuanto a las magnitudes, se consideraban razones solamente entre magnitudes de la misma especie (longitudes con longitudes, áreas con áreas), mientras que las proporciones o cuaternas proporcionales, estaban constituidas por dos razones, pudiendo ser cada una de ellas constituida por magnitudes de diferente especie. Las razones entre magnitudes configuraban objetos que podían ser comparados entre sí, pero no se definían operaciones entre ellos (las razones no se sumaban ni se multiplicaban).
En el libro X, teorema 5, Euclides explicita que si dos segmentos tienen una medida común, su razón es igual a la razón que guardan entre sí dos números (y también la recíproca) estableciendo con ello los alcances y los límites de lo numérico para el tratamiento de las magnitudes. El reconocimiento por parte de los griegos de la existencia de magnitudes inconmensurables (esto es, el encuentro de magnitudes que no podían medirse ambas mediante una medida común[6]) fue el motor para la construcción de una teoría general de proporciones que incluyera las razones entre estas magnitudes. Esta teoría permitió el tratamiento de nuevos problemas, como la semejanza de figuras, planteando la interacción entre lo numérico y las magnitudes de un modo mas fino.
Se cree que esta teoría general de proporciones, que incluye a razones entre segmentos inconmensurables y que aparece en el libro V de los *Elementos* se debe a Eudoxo, del siglo IV a.C.[7]. La definición que aparece en el libro V, definición 5 es: *"Se dice que (cuatro) magnitudes*

---

[6] Como es sabido, es un conocimiento que poseían los Pitagóricos en el siglo V a. C., y que era celosamente guardado, ante la perturbación que podría producir.
[7] El hecho de que la nueva teoría aparezca en los *Elementos* dos libros antes que aquella que se aplica a segmentos con medida común, es una marca indudable de que gran parte del material que aparece en el

están en la misma razón la primera con la segunda y la tercera con la cuarta, cuando al tomar cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera y cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda, según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta."

En una notación moderna, esta definición establece que la razón *a:b es igual a la razón c:d* si al multiplicar a y c por cualquier entero m y b y d por cualquier entero n, se tiene que: si $ma < nb$ entonces $mc < nd$; si $ma = nb$ entonces $mc = nd$; y si $ma > nb$ entonces $mc > nd$. Por otro lado, si aceptáramos comparar razones entre magnitudes con razones entre números, la condición de igualdad en la definición de Euclides podría reescribirse del siguiente modo: cada vez que $m:n > a:b$ resulta que $m:n > c:d$ (análogamente en los otros casos). Nuestros conocimientos actuales, que incluyen considerar las razones entre números como números, nos permiten reinterpretar esta definición afirmando que $a:b$ y $c:d$ definen la misma razón si resultan ser cotas del mismo conjunto de números racionales.

Esta teoría permitió a los matemáticos hacer progresos importantes en geometría y otorgó fundamentos lógicos para el tratamiento de razones entre magnitudes inconmensurables aunque no se utilizasen números para la expresión de esas razones (algunos autores eligen por ello el término de *inexpresables* para estas razones).

Analicemos desde el punto de vista actual la relación entre inconmensurabilidad e irracionalidad. Al comparar las longitudes a y b de dos segmentos que notaremos A y B, pueden ocurrir tres cosas:

❶ El segmento A cabe una cantidad entera n de veces en el segmento B, en ese caso podemos expresar la longitud b tomando como unidad de medida la longitud a y decir que $b = n.a$. Recíprocamente, si se tiene esta igualdad para algún natural n, entonces el segmento A mide a B, y su medida es n (cabe una cantidad entera n de veces).

❷ Si ningún múltiplo entero de A es igual a B, puede ocurrir que se pueda dividir A en m partes iguales, para cierto m, de modo tal que el segmento A/m quepa exactamente n veces en el segmento B. En ese caso resulta que $b = n/m \,.\, a$.

Tanto en este caso como en el primero, hemos encontrado una medida común para ambos segmentos y por ello se dice que son *conmensurables.* Si asignáramos el número 1 a un segmento cualquiera sobre la recta, a cada segmento conmensurable con él correspondería un racional m/n.

❸ Hay una tercera posibilidad y es que ninguna división en partes iguales del segmento A sirva para medir a B. En ese caso se dice que A y B son *inconmensurables*. La inconmensurabilidad es entonces un atributo posible de aplicar a un par de segmentos, y no a uno solo. Es una característica de la relación que guardan entre sí ciertos segmentos. A todo segmento no conmensurable con el segmento considerado como unidad, corresponde un número irracional.

Varios autores e historiadores de la matemática acuerdan en que la teoría de proporciones del Libro V no sienta las bases de un sistema numérico. Exponemos aquí algunos elementos que, desde nuestro punto de vista, pueden sustentar esta postura.

A pesar de que Euclides nunca definió la noción de magnitud, ni su igualdad ni su equivalencia, encontramos en los *Elementos* un tratamiento fino de las magnitudes geométricas. Problemas como "*construir sobre un segmento, un rectángulo igual a otro dado*" (se refiere a igual en área), o "*partir un segmento dado en dos, para obtener un rectángulo igual* (en área) *a un cuadrado dado*", se resuelven por construcciones y aplicación de propiedades geométricas. Se comparan magnitudes, pero no se miden, no se asocia un número a un área o a una longitud, porque no se determina una unidad. Por otro lado, la comparación entre razones de magnitudes da por resultado propiedades de las figuras que hoy convertimos en numéricas. Por ejemplo, después del libro V encontramos *"los triángulos en la misma banda son entre sí como sus bases", "los círculos son uno a otro como el cuadrado sobre sus radios".* Son propiedades que cristalizaron en el tiempo en fórmulas para hallar la medida del área de esos objetos.

---

libro es una recopilación, reorganización y sistematización de muchos conocimientos que se habían ido produciendo a lo largo de varios siglos.

En cuanto a las operaciones realizables entre magnitudes, la suma tiene un significado geométrico: es la magnitud asociada a una figura o segmento que resulta de la unión de las dos dadas. También es considerada geométricamente la multiplicación y división de una magnitud por un número natural[8]. El producto de dos magnitudes sólo aparece cuando se trata de longitudes, considerándolo como “el rectángulo comprendido por los dos segmentos”. Es lo que hace Euclides a partir del libro II. La igualdad a/b=c/d para a, b, c y d longitudes se hace equivalente a a.d=c.b, tratada entonces como una igualdad de áreas de dos rectángulos.
En el libro VI se muestran construcciones que fueron interpretadas posteriormente –y lo continúan siendo-como la solución a ciertas ecuaciones cuadráticas: se “construye geométricamente” el segmento x, solución de las ecuaciones $x(x-a)=b$, y $x(x+a)=b$, para b un área dada y a una longitud dada. El tratamiento de los problemas cuadráticos se remonta a la época de los babilonios, un ejemplo clásico es el problema “*Añadí la superficie y el lado de mi cuadrado, y eso es ¾*” que hoy podría escribirse $x^2+x=3/4$, problema cuyo enunciado detenta una cierta libertad para adicionar magnitudes de distinta especie. Durante bastante tiempo se leyó en términos numéricos las soluciones que ellos daban a este tipo de problemas. Interpretaciones más recientes (Høyrup, 1985 citado por .Radford y él mismo, en Radford, 1996) restituyen un “corazón geométrico” a los métodos babilónicos. Por ejemplo, para el problema clásico citado anteriormente, el algoritmo babilónico que comienza “partiendo” el uno en ½ y ½, es interpretado geométricamente como la consideración de dos rectángulos de lados ½ y x, que se acomodan para completar un cuadrado (ver Radford, 1996). Con esta interpretación, el *uno* estaría siendo considerado como longitud. Esta consideración de unidad de longitud, necesaria para poder interpretar como áreas las sumas de áreas con longitudes, es diferente del tratamiento que hace Euclides en los *Elementos.*
Otra manera de considerar la suma de áreas y longitudes es la que propone René Descartes (1596-1650) diecinueve siglos después, ubicando en una línea longitudes y áreas, posibilitando así la realización de operaciones entre multiplicaciones de cualquier grado (longitudes, áreas, volúmenes, etc.).
Hemos querido mostrar en parte la compleja relación que estableció Euclides entre números y magnitudes vía el tratamiento que hace de estas últimas en distintos libros de los *Elementos* .

II.3 El papel de la geometría en la matemática griega

El hecho de no poder expresar numéricamente las razones entre magnitudes inconmensurables significó para la matemática griega una cierta tensión entre el desarrollo de la aritmética y el desarrollo de la geometría. La utilización de los números entraba en el ámbito de la aritmética y allí se trataba siempre de fenómenos discretos, mientras que la geometría se ocupaba de magnitudes continuas. Como hemos visto, la teoría de las proporciones del libro V establecía un complejo nexo entre ambas entidades.
La geometría se constituyó así en el dominio natural de validación del trabajo con magnitudes continuas. De hecho ésta siguió siendo la situación hasta los siglos XVII y XVIII y recién en el siglo XIX comenzó a dudarse de la rigurosidad de los argumentos basados en consideraciones geométricas.

II.4 Una reflexión final sobre el atributo de la continuidad

El estudio que hemos realizado sobre el tratamiento que hace Euclides en los *Elementos*, nos ha permitido identificar aspectos bastante diferenciados en las propiedades de la recta que son todos relativos a la continuidad:

- Están por un lado aquellas propiedades como la intersección de círculos y/o rectas que pueden considerarse como “naturales” desde un sentido cercano al uso cotidiano de la palabra *continuo* . Ese atributo de la recta puede ser inherente a una imagen mental de ella,

[8] La división de un segmento en *n* partes iguales, recibió un tratamiento particular (Libro VI, Teorema 9), apoyado en el Teorema de Thales.

que se apoye en representaciones gráficas u otro tipo de representación material. Euclides considera implícitamente estas propiedades como propiedades de la recta.

- Hay un segundo grupo de propiedades, que en los *Elementos* están representadas por ejemplo, por la existencia del segmento cuarto proporcional, la existencia de magnitudes inconmensurables y el dispositivo del Libro V para tratar con las razones de dichas magnitudes. Estas propiedades, que se hacen visibles a partir de una problematización, requieren una matemática fina y la puesta en marcha de métodos como el principio de exhausión para comparar y calcular áreas. Euclides se hace cargo plenamente de ellas en los *Elementos* y es muy cuidadoso en su tratamiento.

El segundo grupo de propiedades y sus formas de tratamiento en los *Elementos,* tuvieron una saludable evolución en la matemática. Podríamos ubicar por ejemplo al principio de exhausión en los orígenes del cálculo infinitesimal. Es el cuestionamiento de la naturalidad del primer grupo de propiedades lo que dio la posibilidad de enfrentarse con el **problema** de la completitud veintidós siglos después.

II. El "intermediario" árabe y la Europa Medieval

III.1 El surgimiento del álgebra y su relación con la geometría

Una buena parte del desarrollo de la matemática ha seguido la tradición de la matemática griega, en la cual, como vimos anteriormente, las magnitudes continuas fueron consideradas en el seno la geometría. Desde nuestro punto de vista, este hecho necesariamente liga el proceso de configuración de un dominio numérico completo con la geometría. Es por esta razón que nos interesa ahora focalizar nuestra atención en la evolución de la relación entre la geometría y el álgebra, herramienta esta última que comienza a construirse para la resolución de problemas numéricos.

Comenzaremos comentando brevemente algunos rasgos del desarrollo del álgebra de los árabes. Al-Khowârizmî, alrededor del año 825 de nuestra era, en su libro Al-jabr w´al muqâbala (fuente de la palabra *álgebra*) se ocupó de la resolución de ecuaciones cuadráticas. Esta obra posee un nivel de desarrollo importante en cuanto a las notaciones y la sistematización de ciertos procedimientos algebraicos. Para la resolución de una ecuación se efectuaba primeramente un tratamiento algebraico "completando cuadrados" y se daba luego una demostración de la validez de lo obtenido vía una construcción geométrica[9]. Una lectura posible de este hecho es que la resolución algebraica era vista como insuficiente para completar la solución del problema. Probablemente la nueva herramienta algebraica no tenía un estatuto como para ser aceptada como instrumento de validación interna. La geometría, por su parte, constituía un dominio sólido y aceptado para la validación.

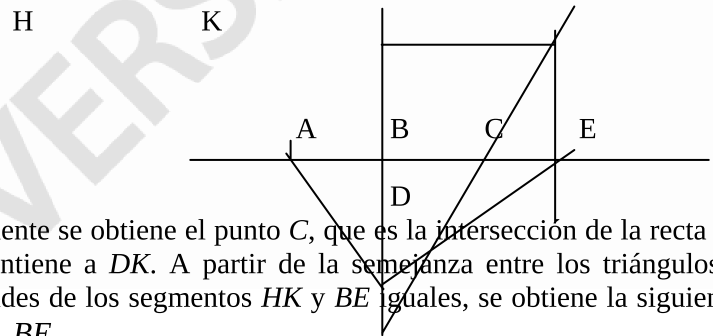
El desarrollo del álgebra en Europa, durante el siglo XVI y parte del siglo XVII siguió apoyándose en los significados geométricos, continuando la tradición de los árabes. Por ejemplo, François Viète (1540-1603) daba sentido a una ecuación como $x^3 + 3ax = b$ diciendo que x^3 es de *especie* voluminosa, y por lo tanto $3a$ debía ser plana y b un sólido.

Esta situación empezó a revertirse a partir de los trabajos de Rafael Bombelli (1526-1572) y Descartes: un paso importante fue representar a^2 y a^3 como segmentos lineales y no como cuadrados o cubos. El desarrollo de la geometría analítica trajo como consecuencia modificar la relación entre la geometría y el álgebra. Hasta ese momento, la geometría parecía ser considerada como *necesaria* para validar los resultados que se pudieran obtener por el cálculo algebraico que se estaba desarrollando. El plan de Descartes fue bien otro: transformar los problemas geométricos en otros algebraicos -vía la representación de puntos con pares de números- y resolver numéricamente las ecuaciones obtenidas. Podríamos decir que anteriormente se modelizaban los problemas algebraicos vía la geometría, mientras que la idea de Descartes fue utilizar el álgebra como una herramienta para resolver y validar problemas geométricos.

[9] Hay un ejemplo completo de esta doble resolución en (Kline, 1994), volumen 1, pag 261.

III.2 A la hora de encontrar raíces

En el libro de Zariski (Zariski, 1926, nota 10) se muestra como Girolamo Cardano (1501-1576) hace uso implícitamente de la idea de completitud para examinar las raíces positivas de una ecuación cúbica que con nuestra notación se escribe $x^3 + q = px^2$ $(p>0,\ q>0)$. Según el relato de Zariski, Cardano asume que hay un número positivo N de modo tal que si $x=N$ se tiene que $x^3 + q < px^2$ (se muestra que bajo la condición $q< 4p^3/27$ basta tomar $N= 2p/3$). Por otro lado para $x=0$ se tiene que $x^3 + q > px^2$, y existen valores suficientemente grandes de x para los que $x^3 + q > px^2$ (Cardano observa por ejemplo que $(p+q)^3 + q > p(p+q)^2$), él deduce entonces que existen dos *raíces* positivas, una entre 0 y N y otra entre N y algún valor grande de x.
¿Qué conjunto numérico está usando acá Cardano? ¿Qué propiedades de ese conjunto permiten fundamentar la existencia de una raíz? Lo que vemos es un uso implícito de lo que hoy se conoce como el teorema de Bolzano, que se apoya aparentemente en una intuición de completitud del dominio numérico. Zariski muestra como Cardano hace uso de esta idea no solamente para reconocer la existencia de raíces en las cúbicas, sino también para fundamentar un cálculo aproximado de una raíz de una ecuación cúbica de la forma $f(x)=k$ [10]. Damos una interpretación geométrica de la regla que utilizó Cardano: a partir de los dos datos $(a,f(a))$ y $(a+1,\ f(a+1))$, se aproxima el arco de curva que pasa por esos dos puntos con el segmento de recta que los une. Eso permite encontrar el número que corresponde a la abscisa del punto de intersección entre el segmento de recta y la recta $y=k$, número al que se toma como primera aproximación de la raíz. Reiterando el procedimiento pero ahora con el número obtenido y uno de los dos anteriores, se obtiene una aproximación de la raíz cada vez mejor.
Zariski muestra también que hay indicios de que Bombelli examinó el argumento de Cardano para la existencia de raíces y ofreció una justificación en la que se apela a la continuidad del movimiento, utilizando un dibujo. Veamos ese argumento, expresado en el lenguaje de nuestros días (Cf. (Zariski, op.cit. p.260-261). Para asegurar la existencia de una solución a la ecuación que escribimos $x^3 = px + q$, con $p>0$, $q>0$, se dibujan dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto B, en una de ellas se marca el segmento AB, que se considera como unidad, y en la otra se marca el segmento HB de longitud q/p, medida en relación a la unidad. Sobre esta última se marca el punto D, a una distancia arbitraria α del punto B. A continuación se traza por D, la perpendicular a AD, hasta encontrar el punto E de intersección con la recta que contiene a AB, y se determina el punto K, que es la intersección de la paralela a HB que pasa por E y la paralela a BE que pasa por H.



Finalmente se obtiene el punto C, que es la intersección de la recta que contiene AB con la recta que contiene a DK. A partir de la semejanza entre los triángulos BDC y HDK y siendo las longitudes de los segmentos HK y BE iguales, se obtiene la siguiente relación entre longitudes: $\frac{BC}{BD} = \frac{BE}{HD}$ (•) . Por otro lado a partir de las relaciones que pueden establecerse entre las alturas y los lados de un triángulo rectángulo, tenemos para el triángulo ADE: $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BE}$, de donde $\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{BE}$ y por lo tanto $BE = \alpha^2$. Volviendo a (•) se tiene que

[10] Una explicación del procedimiento de Cardano se encuentra en (Zariski, op. cit. p.257)

$$BC = \frac{BD \cdot BE}{HD} = \frac{\alpha \cdot \alpha^2}{\alpha + \frac{q}{p}} = \frac{\alpha^3}{\alpha p + q} \cdot p.$$

Citamos textualmente a Zariski: *"haciendo variar α con continuidad de 0 a ∞, haciendo entonces recorrer al punto D la semirrecta BD, el segmento BC varía con continuidad de 0 a ∞. Se tendrá por tanto un valor de α_0 por el que resulta BC = p, con lo que se tendrá* $\frac{\alpha_0{}^3}{\alpha_0 p + q} = 1$*, esto es, $\alpha_0{}^3 = \alpha_0 p + q$"* (Zariski, op.cit. p.261, traducción libre).

La idea de que al variar α, la longitud del segmento *BC* varía de 0 a infinito tomando todos los valores, en particular el valor *p*, es una utilización implícita de la continuidad de la recta y de la completitud del dominio numérico. Hay además una idea subyacente de continuidad funcional: al mover una variable con continuidad, la otra se mueve del mismo modo. Probablemente, la utilización de los gráficos en los que Bombelli apoya su razonamiento, no da lugar a la problematización de la existencia del valor α_0. La aplicación de esta idea, precursora si se quiere del teorema de los valores intermedios, aparece muy utilizada por los matemáticos a partir de los trabajos de Cardano y Bombelli (por ejemplo, Simón Stevin (1548-1620) y Viète hicieron uso de este principio para el cálculo aproximado de raíces).

III.3 Los números irracionales y su estatuto epistemológico

La aceptación de los números irracionales como números, es una instancia necesaria para poder considerar la completitud como un problema a tratar. En este parágrafo vemos someramente cómo ha ido evolucionando esta cuestión entre los siglos IX y comienzos del XVII.

Al-Khowârizmî utilizó magnitudes irracionales, a las que ha llamado *gidr asamm* (raíz muda o ciega)[11]. En los comienzos del siglo X nacía una nueva concepción de número. Una señal de esto es el empleo de la misma palabra (*adad*) para todos los números (*al-adad al muntiqa* para los racionales y *al-adad al-summa* para los irracionales). Progresivamente los números irracionales se fueron tornando completamente un objeto del álgebra y de la aritmética (cf. Dahan-Dalmedico et al p.101)

En el año 1077 Omar Al-Khayyâm retomó la teoría de proporciones expuesta por Euclides en el libro V. Si bien no la rechazó, aconsejó la utilización del método de las fracciones continuas para comparar razones entre segmentos inconmensurables e intentó establecer una equivalencia lógica entre ambas teorías. Al-Khayyâm se preguntó también por la naturaleza de las razones y su relación con los números: sin resolver definitivamente la cuestión, consideró que cualquier razón, constituida o no por segmentos conmensurables, debía poder expresarse como un número. Su postura permaneció sin difusión por casi cinco siglos: fue publicada en Europa en el año 1594 en idioma árabe, y en una traducción latina en 1657.

Mientras tanto en Europa hallamos posiciones encontradas sobre la naturaleza de los números irracionales. Así Michael Stifel (1486-1567) en su obra *Arithmetica Integra* dice: *"[...] por consiguiente, de la misma forma que un número infinito no es un número, un número irracional no es un número verdadero, sino que yace oculto en una nube de infinitud"* (Citado por Kline, 1994, p.337).
Por otro lado Stevin, como lo señala Waldegg (Waldegg, 1996) hace un tratamiento del número ligándolo a la cantidad sin que se produzca oposición entre lo discreto y lo continuo, buscando

[11] En el siglo XII ese término fue traducido al latín como *surdus* y hasta el siglo XVIII los números irracionales eran llamados también números sordos.

reconstruir el concepto de número a partir del establecimiento de un isomorfismo operatorio entre números y cantidades, aceptando que se puede operar con los números del mismo modo que se manipularían las cantidades en general. La definición que da Stevin de número es "*El número es aquello por lo cual se expresa la cantidad de cada cosa*" y a continuación, y en mayúsculas en el original, dice "*QUE EL NÚMERO NO ES UNA CANTIDAD DISCONTINUA*", negando la "discretitud" del número como una característica de su naturaleza. Buena parte de su trabajo se orientó a mostrar que el dominio de los números es homogéneo en el sentido de que los números se independizan de sus orígenes y es posible operar con ellos sin referirse a las cantidades de donde surgieron. Él intentó que se reconociera a los números irracionales como verdaderos números, y se manifestó en contra de la utilización de los términos "irracional" e "inexpresable".

IV. El desarrollo del cálculo, ¿sobre qué sistema numérico?

El desarrollo del cálculo en los siglos XVII y XVIII estuvo vinculado principalmente a cuatro problemas (cf. Katz, 1998, Kline, 1994). El primero consistía en obtener, dada una fórmula de distancia en función del tiempo, la velocidad y la aceleración en cada instante; recíprocamente, dada la fórmula que describe la aceleración, obtener la velocidad en cada instante y la distancia recorrida. El segundo problema era encontrar tangentes a una curva. Este problema provenía por un lado de la necesidad de conocer las normales a las curvas para la confección de lentes ópticas; por otro lado, interesaba la tangente en tanto representaba la dirección del movimiento de un cuerpo móvil. El tercer problema era hallar los valores máximos y mínimos de ciertas funciones. Este problema también provenía de necesidades prácticas. Por ejemplo, se buscaba el ángulo que maximizara el recorrido de una bala lanzada por un cañón, también las alturas máximas alcanzadas por proyectiles lanzados a distintos ángulos. Con relación al estudio de los movimientos planetarios, interesaba conocer la máxima y mínima distancia de un planeta al sol. El cuarto problema era la obtención de volúmenes acotados por superficies, áreas acotadas por curvas, longitudes de curvas y centros de gravedad. Este problema provenía fundamentalmente del interés en el movimiento de los planetas, en el cálculo de distancias recorridas y en la atracción gravitatoria.

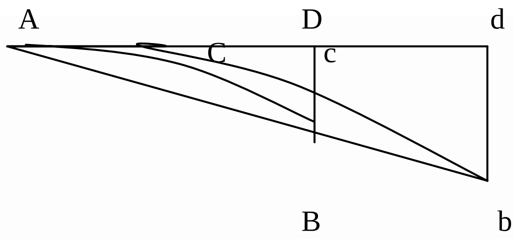
La naturaleza de estos cuatro problemas, desde nuestro punto de vista, condiciona la percepción de la problemática de la completitud en este período. Todos son problemas en los cuales la matemática actúa como herramienta de modelización; se buscaba calcular una altura o una distancia cuya existencia está dada en el fenómeno que se estaba estudiando: escapaba a esta problemática el cuestionamiento sobre la naturaleza del número buscado. Es la existencia de solución *en* el modelo matemático lo que hace *necesaria* la completitud del sistema numérico con el que se trabaja, pero no es ese el problema que estaba en juego en este período.

Hay razones de otro orden que hacen que la cuestión de la completitud no sea considerada en los primeros desarrollos del Cálculo: en la matemática griega, pocas curvas habían estado definidas por movimientos (tal es el caso de la cuadratriz y la espiral de Arquímedes) y no se las consideraba dentro de la matemática propiamente dicha. En el siglo XVII la situación era diferente, la noción de curva que prevalecía en ese momento era la de *lugar geométrico de un punto móvil*[12]. Pensamos que este modo de definir a las curvas les imprime necesariamente la continuidad que les da el movimiento. Isaac Newton (1642-1727) explicita estas ideas en la introducción de su *Tratado sobre la cuadratura de las curvas*: "*En este trabajo considero las magnitudes matemáticas constituidas no por partes arbitrariamente pequeñas, sino engendradas por un movimiento continuo. Las líneas no se engendran mediante suma de partes, sino por el movimiento continuo de puntos, las superficies, por el movimiento de líneas, los*

---

[12] Por ejemplo Galileo consideró la parábola como el lugar geométrico que describe un punto que modeliza la trayectoria de un proyectil. También se definió en este período la cicloide como el lugar geométrico que describe un punto fijo de una rueda que gira. Para ampliar este punto se sugiere la lectura de (De Gandt, 1988)

sólidos por el movimiento de superficies, los ángulos por la rotación de sus lados, los tiempos, por el flujo continuo, y así en otros casos semejantes.”
Para tener una idea del modo de trabajo de Newton presentamos como ejemplo el *lema 7* de los *Principia* en donde se trata de probar que el arco ACB, la tangente AD y la cuerda AB son *iguales en el límite* para una figura como la siguiente:



Se supone que *ACB* es el arco de una curva dada, el punto *A* está fijo igual que la tangente *AD*. El punto *B* recorre el arco acercándose a *A* y trae consigo a la cuerda *AB*. El punto *d* se fija sobre la tangente y, para cada posición de *B*, se determina el punto *b* de modo que *BD* sea paralelo a *bd*, y se considera un arco *Acb* de manera que resulte semejante al arco *ACB*.
Leemos en la demostración: “*Porque mientras que el punto B se acerca al punto A, supongamos siempre que AB y AD son prolongados hasta puntos b y d lejanos y que bd ha sido trazado paralelo a la secante BD, y que el arco Acb sea siempre semejante al arco ACB. Cuando los puntos A y B se alcanzan, en virtud del lema precedente, el ángulo dAb se desvanecerá, en consecuencia las rectas Ab y Ad, que son siempre finitas, y el arco intermedio Acb, coincidirán, y en consecuencia serán iguales”*(De Gant, 1990, p.170). El tratamiento es de tipo geométrico pues interviene la interpretación de figuras y la consideración de relaciones de proporcionalidad. Sin embargo traspasa los límites de la geometría clásica, dado que, por una parte se incluye el movimiento en los razonamientos y por otra parte, se estudia la evolución de las relaciones de proporcionalidad cuando algunos elementos de la figura tienden a posiciones límites o son infinitamente pequeños. La curva ACB que es “recorrida” cuando *B se acerca al punto A* hereda necesariamente la continuidad que le imprime el movimiento.

En cuanto a Gottfried Leibniz (1646-1716), su consideración de los infinitésimos se ubica entre la formalidad y la interpretación geométrica. Como Newton, él tiende a considerar las razones de infinitésimos, más que los infinitésimos mismos. Leibniz es consciente de que estos objetos, agregados a los números usuales, no se pueden comparar con ellos: un número y un infinitésimo guardan entre sí una relación como la de una recta y un punto (no se le agrega nada a una recta si se le agrega un punto): infinitésimos y números son elementos de órdenes diferentes. Podríamos pensar que agregar los infinitésimos al conjunto de números racionales es una manera de “rellenarlo” aunque el conjunto numérico así extendido con infinitésimos pierde su propiedad de arquimedianidad[13].

Las razones entre magnitudes en juego en estos tratamientos tempranos del cálculo, no siempre son expresables por cocientes de números enteros. La precisión en la definición de la noción de límite de estos cocientes queda así sujeta a la clarificación del concepto de número real.

V. Comienzos del siglo XIX: los trabajos de Bolzano y Cauchy en el plan de aritmetización del análsis.

V.1 Las exigencias de rigor

[13] Un conjunto ordenado es arquimediano si para todo par de elementos $a < b$, existe siempre un múltiplo de a que supera a b . A mediados del siglo XX las ideas de Leibniz relativas al cálculo infinitesimal son recuperadas en la formulación del análisis no-standard a partir de R* (extensión de R con infinitesimales). En esta teoría toda propiedad enunciable para R puede ser reinterpretada en R*. En particular se obtiene una versión no-standard de la propiedad de arquimedianidad que es verificada por R* (Cf. Stroyan &Luxemburg, 1976)

Durante el siglo XVIII, varios matemáticos –entre ellos Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813) y Jean le Rond d´Alembert (1717-1783) como los más notables-, hicieron sus aportes para la elucidación de los conceptos centrales del cálculo. En los comienzos del siglo XIX, el interés por fundamentar rigurosamente el análisis, se generalizó entre los matemáticos europeos. Es en este período que se consolida la profesionalización de la actividad matemática, ligada a la incorporación de los investigadores en los centros de enseñanza superior. Las nuevas exigencias de claridad, consistencia y rigor a las que se encontraban sujetos por su actividad docente, fueron en parte impulsoras de este interés de fundamentación. Se propusieron organizar lógicamente esa rama de la matemática y "salvar" situaciones que empezaban a verse como inconsistentes: no estaba claro el concepto de función, la utilización de series sin referencia a su convergencia o divergencia había producido desacuerdos, la representación de funciones mediante series trigonométricas había introducido mayor confusión aún y las definiciones de derivada e integral en uso, no satisfacían los requerimientos de precisión de esta época.

V.2 Declaraciones acerca del papel de la geometría en las demostraciones matemáticas

Con el desarrollo de las Geometrías no euclideanas, la relación entre la matemática y la realidad es interpelada y problematizada, ante la existencia de tres sistemas axiomáticos para la geometría, matemáticamente correctos, diferentes y no compatibles entre sí. Esto llevó a algunos matemáticos del siglo XIX a preguntarse sobre los alcances de la geometría euclídea como modelo del espacio físico.
Un manto de desconfianza se desplegó sobre el papel protagónico que la geometría tenía hasta ese momento en la matemática. Los argumentos sustentados en representaciones gráficas, sobre los cuales, como hemos visto, se apoyaban muchos de los conceptos del Cálculo que habían surgido en los siglos anteriores, se vieron cuestionados. Estas situaciones llevaron a la búsqueda de la reconstrucción del Análisis sobre la base solamente de conceptos aritméticos (por esta razón se conoce a este período con el nombre de "aritmetización del análisis").

En los trabajos de Bernard Bolzano (1781-1848) encontramos diferentes argumentos para apoyar la necesidad de un tratamiento puramente aritmético del análisis. Por un lado, en el prefacio del tratado *Paradojas del infinito* rechaza la posibilidad de hacer demostraciones en diversas ramas de la matemática con argumentos, objetos y relaciones provenientes de una sola de ellas, la geometría: "*Las demostraciones más frecuentes utilizan verdades extraídas de la geometría... No hay objeciones posibles acerca de cuán correctas o claras son las proposiciones geométricas. Sin embargo, es igualmente evidente que se contradice un método correcto si las verdades de la matemática pura (o general, esto es, aritmética, álgebra o análisis) se deducen de consideraciones que se aplican sólo en esa rama especial, llamada geometría... Si aceptamos el punto de vista de que las demostraciones científicas no deberían ser meras cuestiones de confianza sino contrariamente pruebas sustentadas, esto es, presentaciones de razones objetivas que corroboran la verdad buscada, entonces vemos que una verdadera prueba científica o la base objetiva de una cierta verdad que se sostiene para todas las cantidades, no debe estar contenida en una verdad que se sostiene solamente para cantidades espaciales...*"(Jarnik, 1981, p.21, traducción libre).

Estas objeciones al monopolio de la geometría como terreno de validación se complementan con las críticas que hace Bolzano en la parte 4 de su obra "Wissenschaftselehre", a una cierta modalidad de trabajo de los matemáticos de su época que consideraban *la observación* como suficiente para validar afirmaciones en geometría: "*Puesto que si antiguamente los matemáticos se referían en sus pruebas a hechos que podían ver por simplemente observar una figura, ahora están empezando a creer que están en todo su derecho de proceder de ese modo... Sin embargo, si la exposición busca obtener el mayor rigor científico, entonces considero que es mi obligación no obtener nada de la simple mirada de una figura, de la así llamada observación...*" (citado por Jarnik, op.cit., p.21). Jarnik sostiene que Bolzano estaba de este modo contestando la postura de Emmanuel Kant en su libro *Crítica de la razón pura*[14].

También encontramos argumentos en favor de desprenderse de la geometría en la introducción del *Cours d´Analyse* de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857): *"Pero sería un grave error pensar que la certeza sólo se encuentra en las demostraciones geométricas, o en el testimonio de los sentidos."*(Cauchy, versión 1994, p.74)

V. 3. Diferentes formulaciones de la completitud del sistema numérico en este período.

Durante la primera mitad del siglo XIX, en plena tarea de definir con precisión nociones como la de variable, función, infinitésimo, función continua y otras, muchas de las propiedades que caracterizan al conjunto de los números reales eran atribuidas naturalmente al dominio numérico en uso y consideradas explícitamente en el trabajo, sin una discusión sobre su validez.

Un ejemplo: condiciones de convergencia de sucesiones y series

Actualmente llamamos *sucesión fundamental* o también *sucesión de Cauchy* a una sucesión que tiene la siguiente propiedad: se puede lograr que dos términos difieran entre sí tan poco como se desee, a condición de considerar los subíndices de ambos a partir de alguno. Enunciado en lenguaje formal: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \boldsymbol{N}$, $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que si $n > no$, $p>0$ se tiene que $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$."

Bolzano, en 1817, formuló que una sucesión es convergente a un límite si y solamente si posee la anterior propiedad[15]. Era "razonable" trabajar en un sistema numérico en el cual toda sucesión fundamental tuviera límite, pero la existencia del límite no se desprendía de ninguna de las propiedades conocidas de los números. Por esta razón Bolzano no pudo demostrar la suficiencia de la condición enunciada, aunque aparentemente lo intentó (cf. Folta, 1981). Como sabemos la suficiencia sólo puede demostrarse basándose en la completitud del sistema real, propiedad que no había sido formalmente incorporada hasta ese momento. En años posteriores, Bolzano intentó crear una teoría aritmética sobre los números reales y reconsideró la condición necesaria y suficiente de convergencia. La actuación de Bolzano en otros planos de la sociedad de su época hizo que recibiera una fuerte censura por parte de sus contemporáneos. Por esta razón sus últimos trabajos matemáticos no fueron conocidos en el momento de su producción. Se publicaron por primera vez a mediados del siglo XX y fueron detectadas algunas inconsistencias lógicas en ellos. (cf. Van Roostelar, 1962).

Por otro lado, en 1821, Cauchy en el libro que citamos anteriormente, definió que una serie es convergente si la sucesión de sumas parciales converge a un cierto valor *s*. Él afirmó que la convergencia de una serie de términos u_n se asegura si *"para valores crecientes de n* [...] *las sumas de las cantidades* u_n, u_{n+1}, u_{n+2},... *tomadas a partir de la primera, en un número tan grande como se quiera, terminan por obtener de manera constante valores numéricos inferiores a todo límite asignable"* (Cauchy, op. cit. p.151). Esto es, él afirma que la serie es convergente si la sucesión de sumas parciales forma una sucesión fundamental. Cauchy, al igual que Bolzano, admitió la existencia del límite sin demostración.

Otro ejemplo: el teorema del valor medio.

El teorema del valor medio afirma que si una función continua es tal que en un cierto intervalo $[a,b]$ se tiene $sg\ f(a) \neq sg\ f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$. Esta es una propiedad que, como hemos visto, ha sido utilizada en siglos anteriores sin ser enunciada explícitamente. Por las fuentes de que disponemos, interpretamos que fue enunciada como teorema por primera

[14] En su *Crítica de la razón pura* (1781), Kant sostuvo que la geometría euclídea era la del espacio físico. Para él cuestiones ligadas al tiempo, al espacio y a la causalidad eran *verdades a priori*, anteriores a la experiencia. Bolzano consideraba que esta postura afectaba negativamente al desarrollo de la matemática.

[15] Aunque este criterio fue enunciado por Bolzano, actualmente se lo conoce con el nombre de *criterio de convergencia de Cauchy.*

vez en este período, por Cauchy y por Bolzano (que trabajaban en forma independiente uno del otro). Ambos, en las demostraciones que dan para el teorema, utilizan de alguna manera la completitud del sistema numérico o la continuidad de curvas y rectas, en un sentido que analizaremos a continuación.

Comencemos con **Cauchy**, quien incluye una observación antes de enunciar y demostrar el teorema: *"Una propiedad importante de las funciones continuas de una sola variable es la de poder servir para representar en geometría a las ordenadas de líneas continuas o curvas. De esta observación se deduce fácilmente la siguiente proposición:*

Teorema 4 *Si la función f(x) es continua respecto a la variable x entre los límites $x=x_0$, $x= X$, y si se designa por b a una cantidad intermedia entre $f(x_0)$ y f(X), se podrá siempre satisfacer la ecuación f(x)=b para uno o varios valores reales de x comprendidos entre x_0 y X.*

Demostración: *Para establecer la proposición precedente basta hacer ver que la curva que tiene por ecuación y = f(x) cruzará una o varias veces a la recta que tiene por ecuación y= b en el intervalo comprendido entre las ordenadas que corresponden a las abscisas x_0 y X, es evidente que esto tendrá lugar bajo la hipótesis admitida. En efecto, al ser continua la función f(x) entre los límites $x=x_0$, x=X, la curva que tiene por ecuación y=f(x) y que pasa primero por el punto correspondiente a las coordenadas x_0 y $f(x_0)$ y segundo por el punto correspondiente a las coordenadas X y f(X) será continua entre estos dos puntos, y como la ordenada constante b de la recta que tiene por ecuación y= b se encuentra comprendida entre las ordenadas $f(x_0)$, f(X) de los dos puntos que estamos considerando, la recta pasará necesariamente entre esos dos puntos, lo que no se puede hacer sin reencontrar en el intervalo a la curva mencionada.*

Se puede, como lo haremos en la nota III, demostrar el teorema 4 por un método directo y puramente analítico, que tiene la ventaja de dar la solución numérica de la ecuación f(x) = b." (Cauchy, op.cit., p.98-99, el subrayado es nuestro).

Nos parece interesante destacar que si bien en la observación inicial, Cauchy ubica a las funciones continuas como modelo posible para las "líneas continuas o curvas", en la demostración, esta relación se invierte y las curvas con sus atributos *visibles*, se vuelven modelos para el estudio de propiedades numéricas de las funciones. Por otro lado los argumentos que sostiene Cauchy en su demostración –en particular los que hemos subrayado- son contradictorios con las intenciones de desprenderse del "testimonio de los sentidos", que él mismo había manifestado en la introducción de su libro. Estamos analizando un período en el que se hace explícita la intención de abandonar una práctica muy arraigada en el trabajo matemático como es la de hacer inferencias a partir de observaciones de gráficos. Las idas y venidas de Cauchy en su *Cours* hablan de la no linealidad de estos procesos.

Es posible suponer que Cauchy no se sentía del todo conforme con la demostración dada, puesto que al finalizarla anuncia que incluirá otra prueba más adelante, que transcribimos a continuación: "***Nota III:*** *Sea f(x) una función real de la variable x que permanece continua respecto a esta variable entre los límites $x=x_o$ y x=X. Si las dos cantidades f(xo) y f(X) son de signos contrarios, se podrá satisfacer la ecuación f(x)=0, para uno o varios valores reales de x comprendidos entre x_o y X."* (Cauchy, op. cit. p.99). Para demostrar esta afirmación Cauchy construye dos sucesiones monótonas, una creciente y otra decreciente, en las que *f* toma valores de signo contrario, que difieren entre sí tan poco como se quiera. Concluye que dichas sucesiones convergerán hacia un límite común *a* y que la cantidad *f(a)* no podrá ser diferente de cero, gracias a la continuidad de la función. La existencia del *límite común a*, que no es justificada en la demostración, es otro ejemplo de una propiedad que no puede probarse sin utilizar la completitud del dominio de la función.

En cuanto al rigor, ambas pruebas (la del teorema y la de la nota) parecen aceptables para Cauchy. Hay sin embargo diferencias importantes entre ellas: en la primera, como ya hemos visto, hay una apoyatura decisiva en el marco geométrico. En la segunda, el hecho de permanecer en el marco numérico obliga a poner en juego otros elementos en la argumentación, a saber: la construcción de las dos sucesiones, la existencia del límite común a ambas y el hecho de que la convergencia de las sucesiones se conserva por una función continua. La complejidad que se despliega en esta segunda demostración aporta, desde nuestro punto de vista, a la significación del enunciado.

En cuanto a **Bolzano**, él enuncia una versión del teorema del valor intermedio y basa su demostración en la siguiente proposición auxiliar: "*Sea M una propiedad que no se cumple para un cierto valor, pero que se cumple para todos aquellos menores que algún* ***u****. Es posible entonces encontrar un valor U que es el mayor de los* ***v*** *que cumplen con la propiedad de que M se cumple para todos los que son menores que* ***v***" (Jarnik, op.cit. p.36). Esta proposición enuncia la existencia del ínfimo de un conjunto inferiormente acotado no vacío[16]: en efecto, dado un tal conjunto *A*, sea *M* la propiedad de no pertenecer a *A*. *M* verifica las condiciones de la proposición auxiliar, y por lo tanto existe *U* que es la mayor de las cotas inferiores de *A*.

En (Jarnik, op. cit.) se afirma que para demostrar la proposición auxiliar Bolzano utiliza el criterio de convergencia que él había enunciado. Una vez que se tiene probada la proposición auxiliar, la demostración del teorema del valor medio se obtiene a partir de la existencia del ínfimo del conjunto de los valores del intervalo en los que la función es positiva. En definitiva, la validez de la demostración de Bolzano descansa en el criterio de convergencia de sucesiones, que como hemos dicho, no pudo ser demostrado por él.

V.3. Síntesis y nexos

En síntesis, el período que hemos analizado- comienzos del siglo XIX- corresponde a un momento de reorganización de los saberes. Podríamos señalar como aspectos de esa reorganización, el deseo de fundamentar la disciplina, el intento de no apoyar en la geometría la validación de resultados aritméticos y algebraicos, y la confección de un texto del saber pensado para la enseñanza (como fue el caso de Cauchy con su *Cours d'Analyse*). Hemos intentado mostrar cómo estos aspectos de la reorganización fueron a su vez fuente de producción de conocimientos.

En el marco de la problemática de la completitud, en este período fueron explicitadas algunas de las propiedades que debía tener el dominio numérico, como ser: la convergencia de sucesiones fundamentales, la existencia de única intersección de intervalos encajados, la existencia del límite de sucesiones monótonas acotadas, la existencia del ínfimo de conjuntos inferiormente acotados[17]. En la primera mitad del siglo XIX, estas propiedades eran más bien consideradas como propiedades que *verificaba* el dominio numérico, produciéndose una cierta circularidad en los argumentos de las demostraciones.

Lo que cambiará fundamentalmente en los períodos siguientes es el estatuto de estas afirmaciones: entre asumirlas como propiedades que se verifican (primera mitad del siglo XIX) y definir axiomáticamente un cuerpo que satisfaga esas propiedades (fines del siglo XIX), algunos matemáticos de la segunda mitad del siglo XIX *construyeron a partir de los racionales* un conjunto numérico de modo tal que fuera posible *demostrar esas propiedades*. Analizaremos

[16] La existencia de supremos de conjuntos acotados superiormente no vacíos -análoga a la versión con ínfimos- es considerada como *axioma de completitud* en la presentación que se hace habitualmente de los números reales en los cursos de cálculo en la actualidad.

[17] Estas cuatro propiedades no son totalmente equivalentes. Si se añade como axioma cualquiera de las dos últimas a los axiomas de cuerpo ordenado, se obtiene R. Para R así definido, las dos primeras propiedades pueden ser demostradas como teorema. Por el contrario si se eligiera añadir cualquiera de las dos primeras a los axiomas de cuerpo ordenado no se podría deducir ninguna las dos últimas. Se necesitaría añadir un axioma más: la arquimedianidad del orden.

esas construcciones en la sección siguiente.

VI. Cantor y Dedekind y la *construcción* de un sistema numérico completo

En la segunda mitad del siglo XIX, varios matemáticos se ocuparon de la construcción de lo que hoy llamamos conjunto de los números reales. Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1845-1918), Karl Weierstrass (1815-1897), Charles Méray (1835-1911), Heinrich Heine (1821-1881) y también Bolzano, como mencionamos anteriormente. Vamos a detenernos especialmente en dos de estos autores, Dedekind y Cantor. Las construcciones de los otros autores no difieren esencialmente de la de Cantor.
El paso fundamental que dieron estos matemáticos consistió en reconocer que, hasta ese momento, se utilizaban ciertas propiedades que se atribuían al sistema de los números reales y que no podían ser justificadas desde una argumentación apoyada solamente en la aritmética. Se propusieron entonces avanzar formalmente para construir un sistema numérico a partir de Q (dominio numérico que era considerado aritméticamente bien fundamentado) en el que esas propiedades pudieran ser demostradas. Cada uno en su propio proyecto de construcción del conjunto de los números reales, necesitó además explicitar en qué consistía la continuidad de la recta.

VI 1. La construcción de Dedekind.

En el prefacio de su artículo *La continuidad y los números irracionales*, Dedekind describe cómo se planteó a sí mismo la necesidad de contar con una fundamentación aritmética ya que al dictar conferencias sobre cálculo diferencial se veía obligado a acudir a evidencias geométricas: "*Al llegar al concepto de aproximación de una magnitud variable a un valor límite fijo, y sobre todo al demostrar que «toda magnitud que crece continuamente, pero no más allá de todo límite, debe necesariamente aproximarse a un valor límite», tuve que recurrir a evidencias geométricas. El hacer uso de la intuición geométrica me sigue pareciendo sumamente útil en una primera presentación del Cálculo Diferencial, desde el punto de vista didáctico, y realmente indispensable si no se desea perder demasiado tiempo. No obstante no se puede negar que esta manera de introducir el Cálculo Diferencial no puede pretender ser científica. En aquél entonces, el sentimiento de insatisfacción fue tan fuerte que decidí seguir meditando sobre esta cuestión hasta encontrar un fundamento puramente aritmético y absolutamente riguroso para los principios del Análisis Infinitesimal. Con frecuencia se afirma que el Cálculo Diferencial se ocupa de magnitudes continuas, y sin embargo, en ninguna parte se da una explicación de esta continuidad. Ni aún las exposiciones más formales del Cálculo Diferencial basan sus demostraciones en la continuidad sino que apelan consciente o inconscientemente a nociones geométricas o de motivación geométrica o bien se basan en teoremas nunca demostrados por medios puramente aritméticos. Entre estos se encuentra el teorema antes citado y una investigación más cuidadosa me convenció de que éste o cualquiera equivalente puede ser tomado como fundamento suficiente para el Análisis Infinitesimal. Sólo restaba pues, descubrir su verdadero origen* [...] *y llegar a una verdadera definición de la esencia de la continuidad. Logré esto el 24 de noviembre de 1858* [...] (Dedekind, versión 1978, p.2, 3)

Dedekind se plantea la necesidad de clarificar la noción de continuidad sin apelar a evidencias geométricas. Sin embargo la recta será un punto de apoyo importante en su trabajo. ¿Cómo caracterizar matemáticamente la continuidad de la recta que "se veía" en las representaciones gráficas? Dedekind aborda este problema enunciando la siguiente propiedad: "*Si todos los puntos de la recta se dividen en dos clases de manera que todo punto de la primera clase se encuentra a la izquierda de todo punto de la segunda, entonces existe un punto y solo uno que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, o sea, ese corte de la recta en dos porciones*". (Dedekind, op. cit., p.11).

Si bien él supone que será familiar al lector esta propiedad como atributo de la recta, admite que puede sorprender que así se enuncie la continuidad. Por otra parte, explícitamente Dedekind afirma el carácter indemostrable de esta propiedad: *"El suponer esta característica de la línea no es otra cosa que un axioma por el cual atribuimos continuidad a la recta"*. (Dedekind, op. cit., p.12).

Dedekind se propuso construir un sistema numérico que incluyera a los racionales y que además verificase una condición análoga a esta propiedad, para lo cual definió las *cortaduras racionales* y las añadió a Q, extendiendo las operaciones aritméticas y la relación de orden. Veamos los rasgos esenciales de esta construcción[18]: primeramente define una cortadura racional como cualquier descomposición del sistema de números racionales en dos clases A_1 y A_2 con infinitos elementos cada una, de tal manera que todo número de la clase A_1 es menor o igual que todo número de la segunda clase A_2.. Por otro lado, asigna un punto de la recta a cada número racional, a condición de haber establecido en la recta un origen y un segmento unidad.

La no completitud de Q la expresa ahora diciendo: *"hay en la recta una infinidad de puntos que no corresponden a ningún número racional* [...] *hay longitudes que son inconmensurables con una unidad de longitud dada, por ejemplo, la diagonal del cuadrado cuyo lado es la unidad* [...] *la recta es infinitamente más rica en puntos que el dominio R de los racionales en números* [...] *para ver en forma aritmética todos los fenómenos de la recta, vemos que resultan insuficientes los números racionales y que, por esto, será indispensable mejorar el instrumento R por medio de la creación de números nuevos tales que el campo de los números adquiridos alcance la misma completitud, o bien, como preferimos expresarlo, la misma continuidad que la línea recta."* (Dedekind, op. cit., 8,9).

Con esta finalidad, para toda cortadura que no está generada por un número racional crea un nuevo número- necesariamente no racional- que queda determinado por la cortadura. Añade estos nuevos números al conjunto de números racionales definiendo un orden y las operaciones para esta extensión. De esta forma a cada cortadura racional corresponde un número racional o irracional determinado.

Muy resumidamente podríamos decir que Dedekind ha construido un sistema R ordenado y denso, que contiene a los racionales y de manera tal que toda cortadura racional esté generada por uno y solo un elemento de ese sistema. Más aún, cualquier cortadura de elementos de R está generada por uno y solo un elemento de ese conjunto.
Con las herramientas teóricas construidas por Dedekind nos interesa volver a mirar la definición de igualdad entre razones entre magnitudes que aparece en el libro V de los *Elementos* de Euclides. Dado un par de segmentos (A, B) se puede determinar una *cortadura racional* a partir de los subconjuntos C_1 y C_2 así definidos: $C_1 = \{m/n$ tales que $nA<mB\}$, $C_2 = \{m/n$ tales que $nA>mB\}$ (habría que incluir el igual en cualquiera de los dos conjuntos en caso en que A y B sean conmensurables). Se puede reinterpretar entonces la definición de Euclides diciendo que dos razones entre segmentos $A : B$ y $C : D$ son iguales si el par (A, B) determina la misma cortadura racional que el par (C, D).
Esta relación entre las cortaduras racionales y la definición de igualdad entre razones de magnitudes que aparece en el libro V de los *Elementos*, dio lugar a que varios autores interpretaran el trabajo de Dedekind casi como un plagio. Algunas de esas críticas las realizó Rudolph Lipschitz (1832-1903), y fueron respondidas por Dedekind, dando lugar a un intercambio epistolar que ha sido objeto de estudio de varios historiadores de la Matemática[19].

Desde nuestro punto de vista didáctico consideramos necesario tomar distancia de esta

[18] Para ver la construcción completa, se remite al lector a Dedekind, op. cit.
[19] Para ampliar este punto se puede consultar Dugac (1976) y Fichant &Pecheux (1975)

controversia, para poder distinguir los objetivos y logros de ambas teorías, sin reducir los alcances de una a la otra, analizándolas en relación a su propio proyecto y sin pensar al pasado como dirigiéndose al presente. Podríamos decir que, en el proyecto global de los *Elementos*, la definición del libro V obedeció a la necesidad de contar con una herramienta para manipular y comparar magnitudes. El proyecto de Dedekind de completación de los números racionales respondió a la necesidad de contar con un sistema numérico que permitiera la validación de las propiedades fundamentales del análisis. Durante los veintidós siglos que separan las producciones de ambos matemáticos el estatuto epistemológico de los números racionales se modificó radicalmente: en los *Elementos* se trataban mas bien como razones entre enteros, sin tener un carácter de números propiamente dichos. El hecho de que no se trabajara explícitamente con el conjunto de números racionales hace que no parezca razonable atribuirle a Euclides una finalidad - ni aún implícita - de construcción del conjunto de los números reales.

VI. 2 La construcción de Cantor

Cantor realizó su construcción del sistema de los números reales entre 1871 y 1883. El primer trabajo en el que abordó el tema, en 1871, es un artículo que trata sobre la unicidad de los coeficientes del desarrollo en series trigonométricas. De la introducción de ese artículo extraemos la siguiente cita: *"Pero para este objetivo estoy obligado a comenzar por ciertas explicaciones o tal vez ciertas simples indicaciones destinadas a iluminar las distintas maneras en las que pueden comportarse las magnitudes numéricas en número finito o infinito, para eso voy a dar ciertas definiciones a fin de hacer lo más corta posible la exposición del teorema en cuestión, cuya demostración se encuentra en §3"*(Cantor, 1871, p.337, traducción libre).
Dedicó los parágrafos 1 y 2 de su artículo a la construcción de los reales mediante sucesiones fundamentales de racionales, y a partir del 3er. parágrafo retomó la exposición del teorema sobre series trigonométricas en donde hizo uso del resultado.
El proyecto de Cantor era construir un sistema numérico que incluyera a los racionales y en el que se verificase la propiedad de que toda sucesión fundamental de elementos del nuevo sistema numérico, tuviera como límite a un elemento de ese sistema[20]. Básicamente Cantor "agregó" a los racionales un número por cada sucesión fundamental (salvo equivalencias) y extendió a este nuevo sistema numérico las cuatro operaciones aritméticas y la relación de orden conocida para los racionales.
Veamos las líneas principales de esa construcción[21]: Cantor llama A al conjunto de números racionales e introduce nuevos números asociando un signo b a cada sucesión fundamental de racionales $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$. Dada otra sucesión fundamental de racionales $a'_1, a'_2, \ldots a'_n, \ldots$, (asociada a cierto b'), se determina un orden entre estos nuevos objetos, diciendo que $b=b'$, $b>b'$ o bien $b<b'$, según si $a_n - a'_n$ se vuelve infinitamente pequeño, o permanece siempre mayor que cierta cantidad positiva racional o bien permanece siempre menor que una cierta cantidad negativa racional, respectivamente, a medida que n crece. Cantor también compara los nuevos objetos con los números racionales: dada $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ asociada a b y dado un racional a se tendrá que $b= a$, $b>a$ o bien $b<a$ según evolucione la diferencia $a_n - a$ a medida que n crece, de forma análoga al caso anterior.
Para nosotros, a partir de la definición del orden entre los signos b y la manera en que éstos son intercalados entre los racionales, se produce un cambio en el estatuto epistemológico de estos objetos. Desde el momento en que es posible que uno de estos signos sea igual (o mayor, o menor) a un número racional, el signo deja de ser sólo una denotación de sucesiones fundamentales para adquirir un carácter de número, como extensión de la noción de número racional.

---

[20] Que el dominio numérico gozara de esta completitud era un requerimiento de los trabajos de Cauchy y Bolzano como hemos visto en la sección V.
[21] La construcción completa puede verse en Cantor (1871).

De estas definiciones resulta que si *b* es el objeto asociado a la sucesión fundamental a_1, a_2, …a_n, … , la diferencia b-a_n se vuelve infinitamente pequeña a medida que *n* crece, lo cual justifica que se denomine a *b* "límite de la sucesión dada a_1, a_2, …a_n, …".Cantor llama *B* al conjunto de cantidades *b* y extiende la suma, la diferencia, el producto y el cociente al sistema formado por la unión de *A* y *B*.

Así como el sistema *A* ha dado lugar al nacimiento del sistema *B*, los dos sistemas *A* y *B* reunidos generan, por el mismo procedimiento, un nuevo sistema *C* a partir de sucesiones fundamentales de elementos de *A* y *B*. Cantor afirma que: *"Mientras que los sistemas B y A son tales que se puede igualar cada uno de los* ***a*** *a un* ***b*** *pero no todo* ***b*** *a un* ***a****, se puede por el contrario, igualar no solamente cada uno de los* ***b*** *a un* ***c*** *sino también cada uno de los* ***c*** *a un* ***b****."* (Cantor, op.cit., p.340). Expresa de este modo que al haber agregado a los racionales los límites de las sucesiones fundamentales de racionales, se obtiene un dominio numérico en el que se verifica que toda sucesión fundamental tiene límite.

¿Cómo relaciona Cantor los números del nuevo sistema con los puntos de la recta? Por un lado, una vez establecido en la recta un origen y un segmento unidad *U*, asigna un número racional a cada segmento conmensurable con *U*. Por otro lado Cantor afirma que, a cada segmento *S* inconmensurables con *U* puede ser asignada una sucesión de segmentos A_n que lo aproxime, de modo que cada uno sea conmensurable con *U* (toma para ello como referencia la construcción que se deduce del teorema 2 del libro X de los *Elementos*). A cada segmento A_n corresponde un número racional a_n y todos ellos determinan una sucesión fundamental con límite *b*. Cantor asigna este número al segmento *S*.

Esta asignación permite poner en correspondencia puntos de una recta con números del sistema *B* pero la asignación recíproca no está, en principio, garantizada, como manifiesta Cantor en la siguiente cita: *"Para terminar de enunciar la correspondencia entre el conjunto definido en §1 y la geometría de la recta, es necesario introducir un axioma, el cual simplemente dice que, a cada cantidad numérica, corresponde un determinado punto de la recta cuya coordenada es igual a esa cantidad numérica en el sentido que ha sido expuesto en este §. Llamamos a esta proposición un axioma, pues por su naturaleza no puede ser probada de un modo general. [...] Según lo anterior, podemos considerar las diferentes magnitudes numéricas como correspondientes una a una con los diferentes puntos de una línea recta".* (Cantor, op. cit, p.342). Cantor reconoce así la necesidad de establecer **como axioma** la existencia de un punto en la recta para cada sucesión fundamental (salvo equivalencias). Es la manera en que Cantor expresó la continuidad de la recta.

Una vez enunciado de este modo el axioma de continuidad de la recta, números y puntos son la misma cosa: *"Para tener mayor claridad, y sin que sea preciso, nos serviremos de ese modo de representación, y cuando hablemos de puntos, tendremos en vista los valores por los que ellos se obtienen. Para abreviar, llamo sistema de valores a una cantidad dada, finita o infinita de magnitudes numéricas, y sistema de puntos a una cantidad finita o infinita de puntos de una recta. Aquello que se enuncie para sistemas de puntos, puede aplicarse inmediatamente según lo que se ha dicho, para sistemas de valores."*(Cantor, op.cit, p.342).

Si bien tanto Cantor como Dedekind vieron la necesidad de expresar vía un axioma la continuidad de la recta, nos parece interesante destacar el papel diferente que este axioma jugó en ambas construcciones. Mientras que para Dedekind la propiedad de la recta constituyó el punto de partida de su construcción de los números reales, el proyecto de Cantor fue conseguir un sistema numérico completo (completo en el sentido de que toda sucesión fundamental tenga límite) y dotar finalmente a la recta de una propiedad análoga.

Como ya señalamos, Cauchy y Bolzano habían manifestado su desconfianza hacia el trabajo apoyado en la geometría y su intención de separarse de ella. Muy por el contrario, los dos "constructores" que acabamos de estudiar incorporan a la problemática la relación números-magnitudes con una consecuente reflexión sobre la continuidad de la recta.

En los trabajos de Cantor y Dedekind, continuidad y completitud son abordadas de manera bien diferente: para el dominio numérico se efectúa una construcción de manera tal que el constructo cumpla con la propiedad de completitud (en la versión de completitud propia de cada autor)[22];

[22] Para que el proyecto de fundamentación de R quede finalmente realizado vía estas construcciones a

para la recta, sin embargo, se reconoce la necesidad de establecer axiomáticamente la continuidad. Será Hilbert, unos años después, el que adopte la vía axiomática para dar una respuesta al problema de la completitud numérica.

VII. La definición axiomática de R

VII.1 Los axiomas de Hilbert

Algunos años después, en 1899, se publicó el libro *Fundamentos de Geometría* de David Hilbert (1862-1943). Hilbert introdujo los elementos geométricos mediante cinco grupos de axiomas: los de incidencia, los de orden, los de congruencia, el de paralelas, y los axiomas de continuidad. Los axiomas de continuidad para la recta que él presenta son dos: el axioma de Arquímedes para segmentos y el axioma de completitud de la recta, que simplemente dice que no es posible agregar puntos a la recta de modo que se preserven las relaciones y los axiomas anteriores[23]. (Cf. Hilbert, versión 1971).

Cuando estudiamos el trabajo de Euclides en los *Elementos*, nos habíamos detenido a analizar ciertas construcciones en las cuales se hacía un uso implícito de la continuidad. Como ya hemos visto, la necesidad de incorporar como axioma esta propiedad de la recta fue señalada por Dedekind y por Cantor en la segunda mitad del siglo XIX. En *Fundamentos de Geometría*, Hilbert asume la tarea de establecer un conjunto completo de axiomas para la presentación de la geometría. Apoyándose en los axiomas de continuidad para la recta que propone, Hilbert justifica la existencia de los puntos considerados en las construcciones efectuadas por Euclides.

Con las mismas ideas, y por la misma fecha, Hilbert introdujo axiomas para definir al conjunto de los números reales. Precede al enunciado de los axiomas la siguiente explicación: *"En la teoría de los números el método axiomático es el siguiente: pensamos en un sistema de cosas, llamamos a esas cosas números y los nombramos como a, b, c, y pensamos esos números con ciertas relaciones entre ellos, la forma exacta y completa de esas relaciones está dada por los siguientes axiomas.."*. (Hilbert (1899), p.181, traducción libre).

Presentó a continuación cuatro grupos de axiomas: los de composición, los de cálculo, los de orden y los de continuidad. Los tres primeros grupos corresponden a lo que hoy llamamos definición de cuerpo ordenado. Incluimos a continuación una traducción libre del cuarto grupo, los *axiomas de continuidad:*

*IV 1. (**Axioma de Arquímedes**) Si a>0, y b>0 son dos números cualesquiera, siempre es posible sumar a a sí mismo una suficiente cantidad de veces como para que la suma resulte mayor que b. Simbólicamente* $a+a+\ldots+a>b$

*IV 2. (**Axioma de Completitud**) No es posible adjuntar al sistema de los números alguna colección de objetos de manera que la colección resultante siga satisfaciendo los axiomas anteriores, dicho en pocas palabras, los números forman una colección de objetos que no puede ampliarse sin que deje de cumplirse alguno de los axiomas precedentes.*

Con una denominación actual, podemos decir que con estos axiomas Hilbert define al conjunto R como un *cuerpo ordenado arquimediano maximal*. Hay muchos cuerpos ordenados arquimedianos, por ejemplo, Q con el orden usual es uno de ellos, o cualquier extensión algebraica $Q(\sqrt{n})$[24]. Estos cuerpos no son maximales en el sentido del axioma de completitud enunciado por Hilbert (ambos están contenidos estrictamente en R).

---

partir de Q, será necesario la formalización de N, cosa que realiza Giuseppe Peano (1858-1932).

[23] Los axiomas de continuidad de la recta son:

*"V,1 **(Axioma de la medida o axioma de Arquímedes)** Si AB y CD son segmentos cualesquiera entonces existe un número n tal que n segmentos CD construidos contiguamente desde A a lo largo de la dirección desde A hasta B, pasarán al punto B*

V,2 **(Axioma de la completitud de la recta)** *Es imposible extender en un conjunto de puntos a la recta con sus relaciones de orden y congruencia de modo que se preserven las relaciones existentes entre los elementos del conjunto original y las propiedades fundamentales del orden y la congruencia de la recta que se siguen de los axiomas I, II, III y V,1".*

[24] Llamamos $Q(\sqrt{n})$ al cuerpo generado por los elementos de la forma $a+b\sqrt{n}$, con $a, b \in Q$.

En cuanto a la arquimedianidad, esta es una propiedad que es necesario incluir como axioma en la formulación de Hilbert, mientras que, en las construcciones hechas por Cantor y Dedekind es una propiedad que verifican los constructos. Una explicación de este hecho es que en las construcciones se ha tomado como punto de partida al conjunto de los racionales -que es arquimediano con el orden usual- y se ha establecido un orden para los nuevos números extendiendo al de los racionales, de manera tal que se conserva esta propiedad: en ninguna de las dos construcciones aparecen elementos nuevos mayores que todos los elementos de Q ni elementos positivos menores que todo racional positivo. En la presentación axiomática de Hilbert, en cambio, en la que se define a los reales como un conjunto de objetos que satisfacen ciertas propiedades, es necesario explicitar la arquimedianidad pues no se desprende de los otros grupos de axiomas.

VII. 2 Método axiomático versus método genético, según Hilbert.

Actualmente, en algunos cursos y textos en los que se presenta axiomáticamente a R[25], las construcciones hechas por Dedekind y Cantor juegan un papel definido: se vuelven modelos para demostrar la consistencia de ese grupo de axiomas (consistencia que en definitiva, descansa en la consistencia de Q). Sin embargo, a fines del siglo XIX, la vía constructiva no era vista como proveedora de modelos de las definiciones dadas axiomáticamente. Hilbert reflexiona específicamente sobre la relación entre estas dos vías en (Hilbert, 1899), antes de enunciar los axiomas:
"Cuando damos un vistazo en la literatura a los muchos trabajos sobre la aritmética y sobre los principios de la geometría y los comparamos entre sí, nos damos cuenta que aparecen analogías o comparaciones, o elementos que tienen en común los distintos objetos y no solo eso, sino también analogías en los métodos de la investigación.
Primero veamos la forma y el método con el que se introducen las definiciones, cómo aparecen los números. A partir de la definición del número 1, uno piensa normalmente en el proceso de contar a los positivos racionales 2, 3, 4, etc., después se piensa en la sustracción y por consiguiente en los números negativos. Luego se define más adelante una fracción como un par de números, y un número real se piensa como una sucesión fundamental de racionales indefinida.
Podemos nombrar a este método de introducción a los números como método genético, porque aparece la forma más general de los números reales, a través de sucesivas extensiones de cosas más fáciles."(Hilbert (1899) p.180, traducción libre)
Hilbert se refiere aquí a una génesis posible, que no necesariamente responde al orden en el que se ha ido definiendo cada conjunto numérico en la matemática. En distintos momentos de la historia, la extensión del conjunto numérico en uso, se produce -no sin una importante tensión- a partir de las limitaciones que el mismo plantea para resolver algún problema[26]. Los racionales, por ejemplo, fueron definidos antes que los enteros negativos y estos últimos comenzaron a ser considerados casi al mismo tiempo que los números imaginarios, cuando se trataba de resolver la ecuación cúbica. Es posible pensar a esa génesis propuesta por Hilbert como una génesis que responde al *problema de extender o generalizar*; sin embargo, ésta es una problemática que no pertenecía al universo de trabajo de los matemáticos de los siglos anteriores[27].

[25] Los axiomas con los que se define a R en la actualidad son algo diferentes de los que introdujo Hilbert.
[26] Reconocemos también condicionamientos que operan en el sentido inverso al que hemos identificado en este párrafo: "la concepción que se hacen los matemáticos, en una época dada, de la noción de número [...] determina los límites de sus prácticas aritmético - algebraicas" (Dahan-Dalmedico & Peiffer (1986),p. 101).
[27] Algunas presentaciones escolares sostienen la "necesidad de cierre de las operaciones" como una justificación de la creación de los diferentes conjuntos numéricos. Esto plantea un problema didáctico: ¿cómo hacer vivir en el aula la necesidad del cierre de una operación, y que esto genere la tensión suficiente como para provocar la extensión de dominios numéricos? En el caso de los números reales, además, a partir de la necesidad de que las operaciones cierren, es posible atrapar a algunos números irracionales pero no a todo el conjunto R.

En cuanto al método de trabajo en geometría, Hilbert afirma: *"Es muy distinto cuando se trabaja en geometría. Allí uno toma la existencia de ciertos elementos con los que empieza, por ejemplo empieza con tres sistemas de cosas, los puntos las rectas y los planos y a partir de esos elementos uno va construyendo el resto de los elementos siguiendo el modelo de Euclides a partir de ciertos axiomas, como los axiomas de conexión (o composición), de orden, de congruencia y de continuidad poniendo esos axiomas unos con otros y relacionándolos. Es necesario en ese caso fijarse que no haya contradicción y que esté todo completo en el sentido de que debe ser probado que usando esos axiomas no se llega a contradicción y más aun que el sistema de axiomas que uno tiene pruebe todos los teoremas geométricos que uno conoce. Queremos llamar a este método de investigación el método axiomático."* (Hilbert, 1899, p.180-181, traducción libre)

Y establece: *"Nos preguntamos si realmente el método genético es el más adecuado para el estudio de los números y el método axiomático para el estudio de la geometría.* [...]. *Mi opinión es la siguiente: A pesar del alto valor pedagógico y heurístico del método genético, para la presentación definitiva y final y la total seguridad lógica del contenido de nuestro conocimiento, merece preferencia el método axiomático."* (Hilbert, 1899, p.181, traducción libre).

En el inciso siguiente estudiamos desde otro ángulo el papel del método axiomático en el trabajo matemático[28].

VII.3 Producir y comunicar

Nos proponemos hacer una reflexión que reposa sobre la consideración de dos tipos diferentes de "estados" de los saberes matemáticos: el saber como producto de la actividad del matemático, y el saber organizado para la comunicación[29]. Ubicamos al método axiomático vinculado a los dos "estados" mencionados.

Si pensamos en la producción de conocimiento matemático, nos resulta útil separar dos aspectos diferentes del trabajo: por un lado, el enunciado de conjeturas y teoremas y por otro la actividad de validación de los mismos. Desde nuestro punto de vista, resulta limitado el aporte del método axiomático para llegar al enunciado de teoremas "*poniendo esos axiomas unos con otros y relacionándolos"*, por simple combinatoria deductiva. Al menos no parece que sería muy relevante una teoría constituida mayormente por teoremas de este tipo. Hay una componente fuerte en el trabajo matemático que no se deja atrapar por la actividad de *deducir lógicamente*. Es para la *demostración* de los teoremas enunciados, que la deducción lógica adquiere toda su potencia: en opinión de Hilbert -opinión que en cierto sentido rigió los destinos de la matemática en el siglo XX- el método axiomático es el más seguro desde el punto de vista de la validación. Es por esto que ubicamos a la axiomática inmersa en el proceso de producción de saberes. Ahora bien, es necesario relativizar esta "separación" entre enunciar conjeturas y validarlas puesto que en los procesos de demostración se producen muchas veces

---

[28] Con el nombre de *trabajo matemático* nos referimos aquí al tipo de trabajo clásico llevado adelante por la comunidad académica de los matemáticos teóricos de la segunda mitad del siglo XX. Nuestra reflexión no abarcaría al trabajo más actual de demostración de teoremas vía la computadora.

[29] Dentro de la comunicación de los saberes, distinguimos como diferentes la comunicación a otros miembros de la comunidad matemática – más ligada a la producción de los saberes - y la comunicación inscripta en un proyecto de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, reconocemos como prácticas diferentes la escritura de un artículo y la de un libro de texto, por su diferente grado de explicitación y de contextualización, entre otras cosas. Un artículo, a diferencia de un libro de texto, se dirige a un público de especialistas que conoce el entorno del tema que se trata. La mención al trabajo de otros matemáticos se constituye en una exigencia de la escritura de un "paper", mientras que estas referencias no necesariamente se incluyen en la presentación de un tema en un libro de texto. Por otro lado, dentro de la comunicación inscripta en un proyecto de enseñanza y aprendizaje es muy distinto si se trata de una primera presentación de un tema o si se trata de un resumen o una puesta al día como punto de partida para comenzar con nuevos temas. La problemática de la comunicación de los saberes ha ocupado la atención tanto de matemáticos (cf. Thurston, 1994, sección 3) como de numerosos especialistas en didáctica de matemática, (cf. por ejemplo Chevallard, 1985).

modificaciones en las formulaciones iniciales como producto del conocimiento que aporta la misma demostración. Ejemplos de estas modificaciones son las restricciones al dominio de validez de la afirmación, o el agregado de hipótesis adicionales.
Si ahora pensamos en la comunicación de los saberes, el método axiomático adquiere protagonismo en tanto los saberes que se axiomatizan son saberes ya producidos –conformados por objetos, propiedades y relaciones entre estos objetos- que se reorganizan para su exposición. Hilbert añade al final de los axiomas que definen a R que "*reconocemos a partir de esto la concordancia de nuestro sistema con el conocido de los números reales*" de donde se puede inferir que él está pensando que sus lectores ya conocen el sistema de los números reales. Una nueva prueba de que se trata de una reorganización de saberes que ya se tienen, que el lector tiene tanto como Hilbert.
Hasta aquí hemos distinguido dos "estados" de los saberes matemáticos ligados a la producción y la comunicación respectivamente. Si bien esta distinción nos ha resultado fértil para entender de manera más fina el papel del método axiomático, es fértil también poner en duda la posibilidad de separar estos estados: a la hora de comunicar los saberes, se produce un proceso de organización que necesariamente modifica los saberes producidos. El papel de la axiomatización puede ser entonces mejor comprendido si se acepta romper con el esquema "primero se produce conocimiento y luego se comunica".

VII.4 Cuando los axiomas aparecen en los textos: el final de este relato

La opinión de Hilbert de la conveniencia del método axiomático *para la presentación final* tarda más de medio siglo en ser tenida en cuenta en los libros de texto. Hasta los años 70, la mayor parte de los textos asumen el conjunto de los números racionales como bien definido y, respondiendo a requerimientos que provienen de la geometría, establecen la necesidad de incorporar números irracionales. Dependiendo de los autores, en algunos casos se hace una construcción al estilo de Dedekind - por ejemplo el texto de G. Hardy (Hardy, 1958)- y en otros una construcción con encaje de intervalos racionales -por ejemplo en el texto de Richard Courant (Courant, 1971)-.
Recién a partir de los años 60, R comienza a ser presentado axiomáticamente en los textos de análisis. Los axiomas no difieren mayormente de los propuestos por Hilbert en lo que se refiere a las propiedades de cuerpo ordenado, pero sí son diferentes en cuanto a la presentación de la completitud. En la mayoría de los textos consultados la completitud se enuncia mediante el *axioma de supremo*, recuperando explícitamente una propiedad del dominio numérico que había sido identificada por Bolzano en su tratamiento del teorema del valor medio. Son ejemplos emblemáticos el texto de Michael Spivak[30] (Spivak, 1977) y el de Tom Apostol (Apostol, 1995).

VIII. Reflexiones finales

Hasta aquí llega nuestra *re-construcción* del proceso histórico de construcción de la noción de conjunto de números reales. En esta reconstrucción -subjetiva y necesariamente provisoria- hemos intercalado la explicitación de ciertas reflexiones, que aportan en el sentido de los *usos didácticos* que mencionábamos en la introducción.
Para concluir con este trabajo quisiéramos aquí incluir otras reflexiones, algunas de ellas son enunciadas no tanto por su originalidad, sino por que hemos podido identificarlas a partir del *ejemplo* que representa esta construcción particular.
En el parágrafo anterior hemos analizado el papel del método axiomático desde el punto de vista de las distintas componentes del trabajo del matemático. Nos interesa ahora tomar el punto de vista de la enseñanza. Los alumnos que llegan a un primer curso de cálculo en la universidad han tenido previamente contacto con algunos números irracionales, pero no se han enfrentado a la problemática de la completitud, propiedad

[30] El tratamiento que hace Spivak es bien interesante pues en su presentación se muestran razones que hacen necesario incluir la completitud, en la versión dada por el axioma del supremo.

que se les presenta entonces, por primera vez, como un axioma. ¿Cuáles son los alcances de una tal presentación?
Para responder en parte esta pregunta, citamos a Guy Brousseau*: "La presentación axiomática es una presentación clásica de la matemática. Además de las virtudes científicas que se le conocen, parece maravillosamente adaptada para la enseñanza. Permite a cada instante definir los objetos que se estudian con la ayuda de nociones introducidas precedentemente, y así organizar la adquisición de nuevos conocimientos con la ayuda de adquisiciones anteriores. Asegura entonces al estudiante y a su profesor un instrumento para ordenar su actividad y acumular en un mínimo de tiempo un máximo de "saberes" bastante próximos al "saber sabio". Evidentemente, debe completarse con ejemplos y problemas cuya solución exige su empleo. Pero esta presentación borra completamente la historia de los saberes, es decir, la sucesión de dificultades y preguntas que han provocado la aparición de conceptos fundamentales, su uso para plantear nuevos problemas, la injerencia de técnicas y preguntas nacidas de los progresos en otros sectores, el rechazo de algunos puntos de vista encontrados falsos o burdos y las innumerables discusiones al respecto. Encubre el "verdadero" funcionamiento de la ciencia, imposible de comunicar y de describir fielmente desde el exterior, para colocar en su lugar, una génesis ficticia*" (Brousseau (1986), p.1). Todo el recorrido que se ha hecho en este trabajo puede servir para ilustrar la intrincada red de *dificultades y preguntas* a la cual la presentación axiomática de R no permite acceder. El conocimiento de esta red contribuye a una comprensión más profunda del significado de la completitud[31]. Pero es claro que no es factible hacer presente toda esta historia en los primeros aprendizajes de este tema.
La elección de la presentación axiomática en la enseñanza universitaria de cálculo, obedece sin duda a la necesidad de contar enunciados claros que sirvan como base del trabajo matemático que se pretende desarrollar. Y seguramente una presentación igualmente sólida pero constructiva (a la Dedekind o a la Cantor) no sería adecuada para el inicio de los estudiantes en el cálculo.
Retomando las objeciones de Brousseau, nosotros identificamos un problema en la presentación axiomática de R en la enseñanza: se lleva a cabo *antes* del despliegue de relaciones y propiedades entre objetos que son los que se deseaban recuperar a partir de esa axiomatización. Si se presentara parte de la teoría, de los resultados con los que se espera contar para el trabajo y luego los axiomas como los necesarios puntos de partida de este conjunto de teoremas, se podría comprender mejor el papel que cumple el axioma en la teoría, la teoría misma como teoría axiomática, y más transversalmente, se puede empezar a comprender lo que es una teoría axiomática y como es su funcionamiento en el trabajo matemático.
Otra reflexión fértil para pensar la enseñanza que se nos ha hecho visible a partir de este estudio es que *una misma afirmación matemática, cambia su estatuto y su sentido en diferentes momentos de la historia, en relación con diferentes proyectos.* Por ejemplo, hasta el inicio del siglo XIX, la propiedad de completitud tuvo un carácter instrumental, de modo tal que parecía ser verificada naturalmente por el conjunto numérico con el que se estaba trabajando, sin ser explícitamente enunciada. Cauchy, Bolzano y sus contemporáneos, produjeron estas explicitaciones, otorgándole un cierto estatuto de objeto a la noción de completitud, aunque no solucionaron el problema de su fundamentación. Recién a fines del siglo XIX, la completitud es vista como un atributo que *se busca* que posea el conjunto que sé esta construyendo. Finalmente cobra el carácter de axioma, con la finalidad de *definir* un conjunto. La identificación de esta cuestión nos abre un interrogante -que será abordado en nuestra investigación didáctica- acerca del estatuto, que tiene la completitud para el alumno en los diferentes momentos de su formación.
Hay otro fenómeno que nos interesa señalar: *la relación modelo matemático - situación*

[31] Comprensión sin lugar a dudas útil para el didacta, para el matemático, para el docente y para quien se está formando en la disciplina.

modelizada puede representar para el trabajo matemático tanto un punto de apoyo como un obstáculo. Un punto de apoyo en tanto los conocimientos del fenómeno modelizado pueden actuar como completación del trabajo que se hace en el modelo matemático, como control de los resultados obtenidos o como fuente de conjeturas. Pero completar o controlar el trabajo vía las propiedades del fenómeno modelizado, hace que se requiera menos trabajo matemático y puede opacar la visualización de las eventuales sutilezas del modelo. En los desarrollos tempranos del cálculo, el hecho de trabajar con problemas de la realidad no permitió problematizar la naturaleza de los números que se obtenían como solución. La pregunta sobre la completitud del dominio numérico está ligada a la existencia de solución en el modelo matemático, y no en el problema que se modeliza. Abordar el problema de la completitud en la enseñanza hace necesario pensar en un escenario descontextualizado. Por otro lado la noción de número real no se atrapa a partir de problemas que involucren instrumentos de medición o la lectura de datos que provengan de fenómenos físicos. Para estas situaciones los números racionales son suficientes. No es posible mostrar la inconmensurabilidad de dos magnitudes o la irracionalidad de la medida de una magnitud a partir datos provenientes de instrumentos de medición.

En relación con la validación es sabido que *a lo largo de la historia de la matemática, los elementos y argumentos que se consideran suficientes para validar el trabajo, están sujetos a modificaciones*. En nuestro estudio hemos podido identificar estas modificaciones: mientras que para Bombelli, las representaciones gráficas constituían un marco de validación suficientemente robusto, la construcción de Dedekind tiene su origen en que los argumentos basados en representaciones gráficas geométricas eran vistos en su época como insuficientes. La presentación axiomática, por su parte, es vista como *la más adecuada* -aun para la presentación en los libros de texto- respondiendo a las exigencias de formalización del siglo XX. Sólo bajo cierto valor de la *variable validación* fue posible problematizar la existencia de ciertos números (supremos o límites de sucesiones o funciones) y por lo tanto enfrentar el problema de la completitud. La construcción de R finalmente se completa inmersa en una problemática de fundamentación.

Es posible pensar que también para los alumnos, los argumentos considerados como suficientes para la validación, se van modificando en el proceso mismo de construcción del conocimiento.

Los trayectos implicados en la validación de afirmaciones, más allá de constituir una instancia en la cual se justifica o formaliza aquello que ya se sabe, son un motor para obtener nuevos conocimientos sobre los objetos y las relaciones que se conocen. Es un fenómeno que ha sido muy estudiado por la didáctica y que ha llevado a la incorporación de una fase de validación en el diseño de dispositivos de aprendizaje. El estudio histórico que hemos presentado permite recorrer estos trayectos en la génesis histórica de la noción de completitud.

Pensando en la noción de conjunto de números reales, nos parece que enfrentar al alumno con la problemática de la completitud -esto es, hacer vivir en la clase tanto la necesidad de la completitud del sistema numérico como el hecho de que esta propiedad no se deduce de otras conocidas- requiere que se haya instalado en el aula la necesidad de fundamentación, lo cual supone un recorrido anterior, una cierta "madurez matemática", haber salido del plano de lo evidente y un cambio en el tipo de racionalidad.

Decíamos en la introducción que este trabajo forma parte de un proyecto de investigación en Didáctica de la Matemática. Podemos afirmar que el análisis que hemos realizado nos permite entender la existencia de varios estadíos en la evolución de estas nociones, y consecuentemente entender la existencia de varios tipos de equilibrios cognitivos posibles. Esta "ampliación de los posibles" servirá de marco para interpretar el espectro de las diferentes prácticas que enfrentan los alumnos en una determinada institución términos de niveles de conceptualización[32] de estas nociones. Estas últimas cuestiones, objeto de nuestro trabajo actual, requerirán de un nuevo artículo para ser expuestas.

[32] En el sentido de Robert, 1998

BIBLIOGRAFÍA

APOSTOL, T. (1995). *Calculus*. Editorial Reverté. [Edición original: Apostol, Tom (1967) *CALCULUS, One-Variable Calculus, whith an Introduction to Linear Algebra* Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, USA]

ARTIGUE, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10* (2/3), 241-286.

ARTIGUE, M. (1992). The importance and limits of epistemological work in didactics. *Proceedings of the 16th Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education 16*, Durham, vol. 3, 195-216.

ARTIGUE, M. (1995). The role of epistemology in the analysis of teaching/learning relationships in mathematics education. *Plenary Lecture, CMESG, Proceedings*, 7-21.

BKOUCHE, R. (1997). Épistemologie, histoire et enseignement de mathématiques. *For the Learning of Mathematics, 17*, (1), 34-42.

BROUSSEAU, G. (1993) Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática. *Trabajos de Matemática, Serie "B", Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina 19/93* Trad. Dilma Fregona y Facundo Ortega. [Versión original: Brousseau, Guy (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*, (2), 33-115]

CANTOR, G. (1871). Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen". *Mathematische Annalen V*, 123-132. Traducido al francés en *Acta Mathematica 2*, 336-348

CANTOR, G. (1883). Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. *Mathematische Annalen XXI*, 545-586.

CAUCHY, A-L. (1994) *Curso de Análisis,* Colección MATHEMA, Facultad de Ciencias de la UNAM, México.

CAVEING, M. (1988). Algunas observaciones sobre el trato que recibe el continuo en los Elementos de Euclides y en la Física de Aristóteles. En Tusquets, eds. *Pensar la matemática.* Cuadernos ínfimos 114, 2a.ed. Serie metatemas 4, dirigida por Jorge Wagensberg, Seminario de Filosofía y Matemática de la École Normale Supérieure de Paris, dirigido por J. Dieudonné, M. Loi y R. Thom 17-41, Barcelona, España.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique.* La Pensée Sauvage, Grenoble, France.

COURANT, R. & JOHN, F. (1971). *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*. Editorial Limusa-Wiley. México.

DAHAN-DALMEDICO, A. & PEIFFER, J. (1986). *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*. Éditions du Seuil, Paris.

DEDEKIND, J.W.Richard (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Vielweg & Sohn Braunschweig. Hemos utilizado una versión en español: 1978 *La continuidad y los números irracionales*, comunicación interna n° 61 editada por el Dto. de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de México, 2a. ed. México.

DE GANDT, F. (1990). El estilo matemático de los Principia de Newton. *Mathesis 6,* (2), 163-189.

DE GANDT, F. (1988). Matemáticas y realidad física en el siglo XVII (de la velocidad de Galileo a las fluxiones de Newton) En Tusquets, eds. *Pensar la matemática.* Cuadernos ínfimos 114, 2a.ed. Serie metatemas 4. Barcelona, España,.

DHOMBRES, J. (1978). *Nombre, mesure et continu. Epistemologie et histoire.* Cedic/Nathan.

DUGAC, P. (1976). *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques.* Collection de Travaux de l'Académie internationale d'Histoire des Sciences n°24. Paris, Libraire Philosophique J. Vrin.

EUCLIDES (S IV AC) *Elementos. The thirteen Books of Euclid's Elements with introduction and commentary by Sir Thomas Heath*. Sin fecha. New York: Dover.

FICHANT, M. y PÉCHEUX M. (1975). *Sobre la historia de las ciencias.* Buenos Aires: Siglo 21 Argentina Editores. [Versión original : M. Fichant y M. Pécheux (1969). *Sur l'histoire des Sciences.* Paris: François Maspero.].

FOLTA, J. (1981). Life and scientific endeavour of Bernard Bolzano. En *On*

the occasion of the bicentennial of Bernard Bolzano. (pp.11-31) Society of czechoslovak mathematicians and physicists.
HARDY, G.H. (1958). *A course of pure mathematics.* Cambridge. University Press. Tenth edition.
HILBERT, D. (1899). Über den Zahlbegriff. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 8*, 180-184.
HILBERT, D. (1971). *Foundations of Geometry* Second Edition, translated from the Tenth Edition, revised and enlarged by Dr Paul Bernays. The Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois.
JARNÍK, V. (1981). Bernard Bolzano and the foundations of mathematical analysis. En *On the occasion of the bicentennial of Bernard Bolzano* (pp.33-42) Society of czechoslovak mathematicians and physicists.
KATZ, V. (1998). *A history of mathematics, an introduction.* Addison-Wesley
KLINE, M. (1994). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Editorial.
RADFORD, L. (1996). The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical remarks from a Didactic Perspective. En N. Bednarz et al. (eds) *Approaches to Algebra*, 39-53, Kluwer Academic Publishers. Printed in Netherlands.
RADFORD, L. (1997). On Psycology, Historical Epistemology, and the Theaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics . *For the Learning of Mathematics*. *17*, (1), 26 – 32.
RADFORD, L. (2001). The Historical origins of algebraic thinking. En R. Sutherland et al. eds., P*erpectives on school Algebra*, 13- 36, Kluwer Academic Publishers. Printed in Netherlands.
ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et a l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques 18* (2) 139-190.
SIERPINSKA, A. (1995). *La compréhension en Mathématiques*, De Boeck Université.
SIERPINSKA, A. & LERMAN, S. (1996) Epistemology of mathematics and of mathematics education. En Bishop et al. (eds) *International Handbook of Mathematics Education* (827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, Academic Publishers. Printed in Netherlands.
SPIVAK, M. (1977). *Calculus.* Editorial Reverté, S.A., España.
STROYAN, K.D. & LUXEMBURG, W. A. J. (1976). *Introduction to the Theory of infinitesimals.* Academic Press.
THURSTON, W. (1994). On proof and progress in mathematics. *American Mathematical Society 30*, (2), 161-177.
VAN ROOSTELAR, B. (1962). Bolzano's Theory of Real Numbers. *Archive for History of Exact Sciences*, *2*, 168-180.
WALDEGG, G. (1996). La contribución de Simon Stevin a la construcción del concepto de número. *Educación Matemática 8*, (2), 5-17
ZARISKI, O. (1926). *Essenza e significato dei numeri. Continuitá e numeri irrazionali*, traducción al italiano con notas y comentarios del libro de R. Dedekind. Roma: Casa Editrice Alberto Stock.

Analía Bergé
Departamento de Matemática .
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires.
Ciudad Universitaria.
CP 1428. Buenos Aires-.Argentina.
Fax: (54) 011 4576 3335
E-mail : aberge@dm.uba.ar.

Carmen Sessa
Centro de Formación en Enseñanza de las Ciencias (CEFIEC) y Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires.

Ciudad Universitaria.
CP 1428. Buenos Aires.-Argentina.
Fax: (54) 011 4576 3335
E-mail : pirata@dm.uba.ar.