

Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos

*Alicia Bruno**

*Juan Antonio García**

RESUMEN

En esta investigación se analiza cómo, futuros profesores de enseñanza primaria y secundaria, clasifican problemas aditivos con números negativos según las estructuras de los enunciados. Se han utilizado problemas con estructuras de Combinación, Cambio, Comparación y Dos Cambios. Las entrevistas clínicas realizadas permiten analizar los criterios de clasificación utilizados por los estudiantes. Se ha observado que estos criterios pueden ser completos (buscar las tres situaciones numéricas del enunciado) o parciales (buscar dos situaciones numéricas). También se muestra cómo los aspectos contextuales y lingüísticos condicionan la clasificación.

PALABRAS CLAVES: números negativos, problemas aditivos, cambio, combinación, comparación, dos cambios.

Prospective teachers of primary and secondary school classify additives problems with negative numbers

ABSTRACT

In this research it is analyzed how, prospective teachers of Primary and Secondary school, classify additives problems with negative numbers according to the structures of the statements. Problems with structures of *Combination*, *Change*, *Comparison* and *Two Changes* have been used. The clinical interviews allow to analyze the classification criteria used by the students. It has been observed that these criteria can be complete (to look for the three numerical situations of the statement) or partial (to look for two numerical situations). It shows too how the contextual and linguistic aspects condition the classification

KEY WORDS: negative numbers, additives problems, combination, change, comparison and two changes

Futurs professeurs de primaire et collège classifient problèmes d' addition avec des nombres négatives

Fecha de recepción: marzo de 2003

* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna. Tenerife, España.

RÉSUMÉ

Dans cette recherche s'analyse comment, les futurs professeurs d'Enseignement en Primaire et en Collège, classifient problèmes d'addition avec des nombres négatives selon les structures des énoncés. On a utilisé problèmes structurés par *Combinaison*, *Changement*, *Comparaison* et *Deux Changements*. Les interview cliniques réalisées permettent d'analyser les critères de classification utilisés par les étudiants. On a observé que ces critères peuvent être complets (par exemple, chercher les trois situations numériques de l'énoncé) ou partiels (chercher deux situations numériques, par exemple). On montre, aussi, comment les aspects contextuels et linguistiques conditionnent la classification.

MOTS CLÉS: nombres négatives, problèmes d'addition, combinaison, changement, comparaison et deux changement.

Futuros professores do ensino fundamental classificam problemas aditivos com números negativos

RESUMO

Nesta investigação se analisa como, futuros professores do Ensino Fundamental, classificam problemas aditivos com números negativos segundo as estruturas dos enunciados. Tem sido utilizado problemas com estruturas de Combinação, Mudança, Comparação e Duas Mudanças. As entrevistas clínicas realizadas permitem analisar os critérios de classificação utilizados pelos estudantes. Tem sido observado que estes critérios podem ser completos (buscar as três situações numéricas do enunciado) ou parciais (buscar duas situações numéricas). Também se mostra como os aspectos contextuais e lingüísticos condicionam a classificação.

PALAVRAS CHAVE: números negativos, problemas aditivos, combinação, mudança, comparação e duas Mudanças.

1. Introducción

Se conoce muy poco de las concepciones que tienen los profesores en activo o los profesores en formación sobre los números negativos. Se pueden encontrar algunos resultados en González y otros (1990) donde se analizan las respuestas de futuros profesores de Primaria sobre el concepto, el orden y las operaciones con números negativos que ponen en evidencia la carencia de significados concretos asociados a estos aspectos. En Bruno y otros (1998) se realizó una investigación, también con profesores de Primaria en formación, sobre la resolución de problemas aditivos con números negativos. Entre los resultados más relevantes se encontró que los futuros profesores de Primaria no resuelven estos problemas con números negativos y buscan otras estrategias, como el uso de números positivos, la resolución mediante ecuaciones de primer grado o las representaciones gráficas. Todo ello variaba en su nivel de sofisticación, pero en general mostraron poco rigor matemático. Lo cierto es que, en su actividad docente es posible que tengan que enseñar a resolver problemas aditivos con números negativos de manera formal, en cuyo caso las estrategias que ellos mostraron sólo servirían como un apoyo.

A continuación, presentamos la terminología que sobre estos problemas usaremos en este trabajo, tomada de Bruno y Martínón (1997a) y que ha sido adaptada de Vergnaud (1982).

En primer lugar, diferenciamos entre *historias* (o *situaciones*) *aditivas simples* y *problemas aditivos simples*, como lo hacen Rudnitsky y otros (1995). Una *historia aditiva simple* es una situación numérica que se describe con una adición $a + b = c$. Por ejemplo, "Por la mañana, la temperatura en la ciudad era 7 grados sobre cero y a lo largo del día bajó 10 grados. La temperatura por la noche era 3 grados bajo cero". Claramente, cada historia aditiva cuyo esquema es $a + b = c$, da lugar a tres problemas aditivos simples, dependiendo de cual de las tres cantidades anteriores se presente como incógnita. Diremos que los problemas son de incógnita 1, 2 ó 3 según que la incógnita sea a , b ó c , respectivamente ($i1$, $i2$, $i3$).

En segundo lugar, distinguimos entre diversos usos de los números: *estados*, que expresan la medida de una cantidad de una cierta magnitud, asociada a un sujeto en un instante ("debo 2"); *variaciones*, que expresan el cambio de un estado con el paso del tiempo ("perdí 2"); y *comparaciones*, que expresan la diferencia entre dos estados ("tengo 2 más que tú"). La consideración de esos tres usos de los números (o situaciones numéricas) da lugar a diferentes *estructuras* de historias y de problemas. Aquí estamos interesados en las siguientes estructuras, que son las más usuales:

- *Combinación*

(*Combinación de estados*: estado parcial 1 + estado parcial 2 = estado total)

"Pedro tiene 3\$ y debe 15\$. ¿Cuál es su situación económica global?"

- *Cambio*

(*Variación de un estado*: estado inicial + variación = estado final)

"Un delfín estaba a 5 metros bajo el nivel del mar y bajó 8 metros. ¿Cuál era la posición del delfín después de este movimiento?"

- *Comparación*

(*Comparación de estados*: estado menor + *Comparación* = estado mayor)

"Un coche está en el kilómetro 6 a la izquierda del cero y una moto está 11 kilómetros a la derecha del coche. ¿Cuál es la posición de la moto?"

- *Dos Cambios*

(*Combinación de variaciones sucesivas*: variación 1^a + variación 2^a = variación total).

"La temperatura bajó 11 grados y luego subió 5 grados. ¿Cómo varió la temperatura con respecto a la que hacía antes de moverse?"

A pesar de que se conoce mucho sobre la resolución de problemas aditivos con números positivos, no todos los resultados se pueden trasladar a los negativos, las características específicas de los números negativos, en cuanto a los signos de los números, a las reglas operatorias, a los contextos y a la identificación de las dos operaciones (toda suma puede expresarse como una resta, y viceversa), han llevado a realizar estudios específicos sobre los mismos.

Las principales investigaciones realizadas sobre la resolución de problemas aditivos con números negativos se han centrado en alumnos de Primaria y Secundaria y han servido para conocer las dificultades que encuentran en su resolución, los errores que cometen y algunas de las estrategias que utilizan (Vergnaud y Durand, 1976; Marthe, 1979; Vergnaud, 1982; Conne, 1985; Bell, 1986; Bruno, 1997).

La resolución de los problemas aditivos puede mejorarse si los alumnos entienden correctamente los enunciados y se hacen una imagen correcta de la situación. Rudnitsky y otros (1995) realizaron una investigación para comprobar si el hecho de que los alumnos aprendan a distinguir las diferentes *estructuras* de los problemas mejora la resolución de los mismos. Contrastaron varios métodos de enseñanza: (1) el método "redactar", en el que los alumnos escribían los enunciados de los problemas y discutían las distintas estructuras e intercambiándolos con sus compañeros; (2) el método "resolver", que consistía en practicar la resolución de problemas de forma sistemática; y (3) el método "tradicional" en su país para la resolución de problemas aditivos. Sus conclusiones fueron que a largo plazo el método "redactar" resultó más provechoso, y los alumnos que lo siguieron obtuvieron mejores resultados en las pruebas realizadas que los que siguieron los otros métodos.

En una investigación previa nos planteamos la posible extensión de los resultados de Rudnitsky y otros a los problemas con números negativos (Bruno, 2000; Bruno y Espinel, 2003). Para ello se desarrolló una experiencia similar, pero con alumnos de Secundaria en la que concluimos que tanto los alumnos del método "redactar" como del "resolver" obtuvieron mejores resultados que el método "tradicional", es decir, alumnos que estudiaron los números negativos usando un libro de texto en el que los problemas aditivos aparecían al final del tema para aplicar las reglas operatorias aprendidas. No hubo diferencias significativas entre el método redactar y resolver como así lo habían obtenido Rudnitsky y otros. Sin embargo, el método "redactar" se reveló como un interesante instrumento de investigación, ya que el hecho de que los alumnos discutan, escriban y reflexionen sobre los enunciados de los problemas permite averiguar los conocimientos que tienen sobre los números negativos. Esos problemas escritos por los estudiantes se han utilizado como material de investigación en este trabajo que presentamos.

En este caso los estudiantes futuros profesores de Primaria y Secundaria, siguieron el método “redactar” con el objetivo de indagar en el conocimiento que construyen sobre los problemas aditivos con números negativos y más en concreto, en su capacidad para identificar las estructuras de los problemas aditivos.

2. Objetivos y diseño de la investigación

Los objetivos de la investigación que se presenta en este trabajo son los siguientes:

- 1) Analizar la dificultad para clasificar problemas aditivos con números negativos por parte de los futuros profesores de Primaria y Secundaria.
- 2) Analizar los criterios que utilizan los futuros profesores de Primaria y Secundaria para justificar la clasificación de los problemas aditivos con números negativos.

Previamente los estudiantes recibieron formación sobre la clasificación de los problemas, siguiendo el método “redactar”.

En la investigación participaron 30 estudiantes universitarios pertenecientes al Título de Maestro especialista en Educación Primaria y 7 estudiantes pertenecientes a la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de La Laguna, los cuales podrían en un futuro dedicarse a la docencia en educación Secundaria. A lo largo del trabajo nos referiremos a ambos grupo de estudiantes como profesores en formación de Primaria y de Secundaria, respectivamente (o también diremos futuros profesores de Primaria y Secundaria). Se eligieron estos dos grupos de alumnos, con formación matemáticas tan diferente, porque ambos tendrán en un futuro que enseñar los números negativos si deciden dedicarse a la docencia.

La investigación realizada tuvo dos fases bien diferenciadas. Una primera en la que se instruyó a los futuros profesores sobre la clasificación y resolución de los problemas y una segunda en la que se entrevistó a una muestra de ellos para conocer el conocimiento que habían construido.

Fase 1. Instrucción de los profesores en formación sobre la clasificación de las estructuras de los problemas aditivos con números negativos.

Para realizar esta instrucción los profesores en formación siguieron el método que denominamos “redactar” (Bruno, 2000; Bruno y Espinel, 2003), ya comentado anteriormente. En primer lugar, se les mostró cuatro historias correspondientes a cada una de las estructuras descritas anteriormente (*Combinación, Cambio, Comparación y Dos Cambios*), para analizar las situaciones que las caracterizan (*estados, variaciones, comparaciones*). Asimismo se analizó cómo a partir de una historia surgen tres problemas aditivos distintos y las operaciones que los resuelven. A continuación, fueron los estudiantes quienes escribieron historias y problemas con el fin de diferenciar sus estructuras.

Esta instrucción se realizó en 5 sesiones de una hora. Una vez terminada la instrucción los alumnos respondieron a una prueba escrita en la que tenían que clasificar y resolver 9 problemas aditivos con números negativos. Los contextos, las estructuras y la posición de la incógnita de los problemas de esta prueba aparecen en la tabla 1 y los enunciados completos de los problemas en el Anexo 1.

Tabla 1. Estructuras, posición de la incógnita y contextos de los problemas de la prueba escrita

Estructura de los problemas	Incógnita	Contexto
<i>Combinación</i>	I3	Dinero
<i>Combinación</i>	I2	Dinero
<i>Cambio</i>	I3	Temperatura
<i>Cambio</i>	I2	Cronología
<i>Cambio</i>	I1	Carretera
Dos Cambios	I3	Autobús
Dos Cambios	I2	Ascensor
<i>Comparación</i>	I3	Carretera
<i>Comparación</i>	I2	Nivel de mar

Fase 2. Entrevistas

Se seleccionó una muestra de los estudiantes que siguieron la instrucción a los que se entrevistó de manera individual.

Se entrevistó a siete estudiantes futuros profesores de Primaria de los 30 participantes (que denominamos P1, P2,..., P7) y a los siete estudiantes futuros profesores de Secundaria (que denominamos S1, S2,..., S7). La selección de los estudiantes del primer grupo se hizo en función de los resultados de la prueba escrita, tomando como criterio que hubiera alumnos con diferencias en cuanto a:

- éxito en la clasificación de los problemas,
- éxito en la resolución de los problemas,
- tipos de estrategias de resolución (uso de números positivos, representación en la recta o ecuaciones).

Las entrevistas fueron videograbadas y en ellas se pidió a los estudiantes que clasificaran historias o problemas según sus estructuras y, a continuación, que resolvieran los problemas.

Las historias y problemas utilizados para las entrevistas se tomaron de los redactados por los estudiantes de Secundaria que fueron recopilados en la investigación previa ya comentada (Bruno, 2000, Bruno y Espinel, 2003). Estas historias y problemas utilizados en las entrevistas tenían diferentes estructuras. Además no todas ellas respondían a las estructuras estudiadas. Es decir, se seleccionaron historias y problemas que tenían un enunciado estándar de redacción, mientras que otros presentaban variantes frente a la clasificación estudiada. De esta forma, la clasificación resulta más compleja para los futuros profesores, porque previamente tienen que analizar si la redacción del problema era correcta y si respondía a alguna de las estructuras estudiadas. Ello nos permitió observar la seguridad que mostraban en la clasificación los futuros profesores.

En la tabla 2 se presenta la clasificación que esperábamos hicieran los estudiantes de las historias y los problemas de las entrevistas y se indica si la redacción respondía o no, a un enunciado estándar con respecto a los estudiados en la fase de instrucción y, en el apartado 3, se mostrarán todos los enunciados.

Tabla 2. Tipos de historias y problemas utilizados en las entrevistas

Tipo de problema	Contextos	Enunciado(*)
<i>Combinación</i>	Problema del dinero	Estándar
<i>Cambio</i>	Historia del submarino	Estándar
<i>Cambio</i>	Problema de la avioneta	Estándar
<i>Dos Cambios</i>	Historia de la heladería	Estándar
<i>Dos Cambios</i>	Problema del instituto	No estándar
<i>Comparación</i>	Historia de los ascensores	Estándar
<i>Comparación</i>	Historia de cronología	No estándar
<i>Comparación</i>	Problema de temperatura	Estándar
<i>Cambio y Dos Cambios</i>	Historia de la presa	No estándar

(*) Estándar: El enunciado se corresponde con una de las estructuras estudiadas.

No estándar: El enunciado no se corresponde con ninguna de las estructuras estudiadas.

El protocolo de las entrevistas fue el siguiente: se presentaba al futuro profesor la historia o el problema y se le pedía clasificarlo. En caso de que pensara que no respondía a un enunciado estándar, debía modificar la redacción para que respondiera a dicho formato estándar. Además, debía resolver los problemas, aunque este último aspecto no se analiza en este trabajo.

3. Resultados de las clasificaciones

En este apartado distinguimos en primer lugar los resultados de la clasificación de la prueba escrita y posteriormente presentamos los resultados de las entrevistas.

3.1 Resultados de la prueba escrita

En la tabla 3 se muestra el porcentaje de éxito en cada uno de los problemas de la prueba escrita, realizada al finalizar la instrucción. Se puede observar una gran diferencia entre los profesores en formación de Primaria y de Secundaria, la cual lleva a plantearse posteriores investigaciones que analicen este hecho, ya que en nuestro caso no ha sido objeto de estudio (debido a la diferencia entre el número de alumnos de ambos grupos).

Los resultados también muestran que la clasificación de problemas aditivos con números negativos por parte de los profesores en formación no está exenta de dificultad o bien la instrucción recibida no resultó eficaz, ya que en algunos casos los porcentajes son excesivamente bajos.

Se observa que no todos los problemas tienen el mismo grado de dificultad para los estudiantes, con porcentajes de éxito que van desde un 30% a un 87% para los profesores en formación de Primaria y desde un 29% a un 100% los de Secundaria.

En los dos grupos de estudiantes hay resultados similares en los problemas de *Combinación* y de *Dos Cambios*, los cuales parecen más fáciles de clasificar frente a los de *Cambio* y *Comparación*. Los resultados no permiten establecer una jerarquía de dificultad para clasificar los problemas según sus estructuras; pensamos además que ello sería bastante complejo pues hay múltiples variables que pueden influir en la clasificación.

Tabla 3. Porcentaje de éxito en la clasificación de los problemas de la prueba escrita

Tipos de problema en la prueba escrita	Respuesta de los estudiantes									
	Combinación		<i>Cambio</i>		<i>Dos Cambios</i>		<i>Comparación</i>		Blanco	
	<i>P</i>	<i>S</i>	<i>P</i>	<i>S</i>	<i>P</i>	<i>S</i>	<i>P</i>	<i>S</i>	<i>P</i>	<i>S</i>
Combina I3 Dinero	63*	100*	27	-	7	-	3	-	-	-
Combina I2 Dinero	71*	100*	10	-	3	-	13	-	3	-
<i>Cambio</i> I3 Temperatura	10	-	76*	86*	7	14	7	-	-	-
<i>Cambio</i> I2 Cronología	50	57	30*	43*	3	-	7	-	10	-
<i>Cambio</i> I1 Carretera	17	-	40*	100*	20	-	20	-	3	-
<i>Dos Cambios</i> I3 Autobús	3	-	20	-	70*	100*	7	-	-	-
<i>Dos Cambios</i> I2 Ascensor	-	-	10	-	87*	100*	3	-	-	-
<i>Compara</i> I3 Carretera	46	29	10	-	7	-	37*	57*	-	14
<i>Compara</i> I2 Nivel del mar	24	14	13	-	10	-	50*	86*	3	-

P = Profesores de Primaria en formación (N = 30)

S = Profesores de Secundaria en formación (N = 7)

* = % de respuestas correctas

Se observan grandes diferencias entre los tres problemas de *Cambio* y entre los dos de *Comparación*. Estas diferencias pueden atribuirse al contexto o a la posición de la incógnita, aunque nos inclinamos a pensar que es por lo primero pues el contexto condiciona la forma de expresar las situaciones numéricas. Por ejemplo, en los dos problemas de *Comparación*, no aparecían las palabras “más que” o “menos que” (llamadas palabras “clave”). Así, en el problema de contexto carretera se expresaba “6 kilómetros a la izquierda” y en el del contexto nivel del mar era la propia comparación la incógnita. Creemos que la ausencia de estas palabras “clave” es la razón de los bajos resultados. Por otra parte, la dificultad del problema de *Cambio* (contexto cronología) puede deberse a que no se asocia la expresión “¿cuántos años vivió?” con un *Cambio*. Sin embargo, en el problema de *Cambio* (contexto temperatura) se asocia sin dificultad a un *Cambio* la expresión “calentamos el líquido”, aunque como en el enunciado aparece la pregunta “¿cuál es la temperatura final del líquido?”, la palabra “final” lleva a asociarlo fácilmente a un problema de *Cambio*.

Creemos que la clasificación de los problemas, al igual que ocurre con la resolución, está condicionada por una serie de factores que hace que la redacción del enunciado sea más clara para los estudiantes. En este caso la identificación de las situaciones numéricas (estados, variaciones y comparaciones) está condicionada por la forma en que están escritas, como se verá en las entrevistas realizadas.

3.2 Resultados de las entrevistas

En las tabla 4 y 5 se resumen los resultados obtenidos en la clasificación de los problemas en los dos grupos de sujetos participantes en la investigación, según los alumnos y según los problemas.

Tabla 4. Porcentaje de éxito en la clasificación de los problemas según los alumnos

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
4/9 44%	5/9 55%	3/9 33%	2/9 22%	4/9 44%	7/9 78%	4/9 44%	7/9 78%	8/9 89%	6/9 67%	7/9 78%	4/9 44%	3/9 33%	5/9 55%

Los porcentajes de éxito según los alumnos varían desde un 22% hasta un 89%. Es decir, que todos los alumnos tuvieron dificultad en alguno de los problemas.

Tabla 5. Porcentaje de éxito en la clasificación según los tipos de problemas

Tipo de estructura	Enunciado	Profesores de Primaria	Profesores de Secundaria
Combinación Problema del dinero	Estándar	100%	100%
Cambio Historia del submarino	Estándar	29%	86%

Cambio Problema de la avioneta	Estándar	29%	86%
<i>Dos Cambios</i> Historia de la heladería	Estándar	0%	0%
<i>Dos Cambios</i> Problema del instituto	No estándar	0%	43%
<i>Comparación</i> Historia de los ascensores	No estándar	71%	86%
<i>Comparación</i> Historia de cronología	No estándar	57%	43%
<i>Comparación</i> Problema de temperatura	Estándar	100%	100%
<i>Cambio y Dos Cambios</i> Problema de la presa	No estándar	29%	43%

Los resultados de la tabla 5 muestran que los problemas con porcentajes de 100% de éxito son problemas de enunciado estándar, aunque no todas las historias o problemas estándar resultan igual de exitosas. Lo que observamos a través de los enunciados de los problemas es que cuando los problemas se asemejan a los tratados en la fase de instrucción (de enunciado estándar), la clasificación resulta más eficaz por parte de los futuros profesores. En el otro extremo aparecen los problemas que difieren de los tratados en clase, en el sentido de que no pueden ser clasificados sin una previa modificación del enunciado (enunciado no estándar). Dicha modificación no fue realizada por parte de los futuros profesores, en la mayor parte de los casos. A lo largo de la entrevista parecían olvidar este hecho, asumían que estaban bien redactadas y se encontraban forzados a clasificarlas, aunque en algunos casos como ya comentamos, no era posible sin una previa modificación del enunciado.

En los siguientes apartados se muestran los textos de las historias y problemas empleados en las entrevistas y la clasificación hecha por cada alumno. Asimismo se muestran los criterios y las justificaciones que emplearon los estudiantes para la clasificación con ejemplos de diferentes respuestas encontradas.

3.2.1 Criterios para clasificar

Después de analizar las entrevistas observamos que los alumnos justificaron la clasificación fijándose en aspectos diferentes del enunciado. En la tabla 6 se muestran los criterios empleados por los estudiantes y su codificación.

Tabla 6. Criterios de clasificación de los problemas utilizados por los estudiantes

Combinación (Co)
Co1: Buscan los dos estados parciales y el estado total
Co2: Buscan los dos estados parciales, pero no el estado total
Co3: Indican que no hay ninguna situación numérica de variación en el enunciado

Co4: Utilizan expresiones del tipo “averiguar el total”o “hay que sumar”
Co5: Indican que sólo hay un personaje o sólo hay un estado
Cambio (Ca)
Ca1: Buscan el estado inicial, la variación y el estado final
Ca2: Buscan el estado inicial y la variación, pero no el estado final
Ca3: Buscan la variación
Comparación (Cp)
Cp1: Buscan los dos estados y la comparación
Cp2: Buscan los dos estados, pero no la comparación
Cp3: Indican que no hay ninguna situación numérica de variación en el enunciado
Cp4: Buscan la comparación
Dos Cambios (Dc)
Dc1: Buscan las dos variaciones parciales y la variación total
Dc2: Buscan las dos variaciones parciales, pero no la variación total
Dc3: Indica que hay un estado inicial y dos variaciones parciales
Dc4: Indica que hay un estado inicial y una variación
Cambio + Dos Cambios (CaDc)
CaDc1: Busca el estado inicial, las dos variaciones parciales y el estado final
CaDc2: Buscan el estado inicial y las dos variaciones parciales, pero no el estado final

Obsérvese que el criterio 1 de todas las estructuras sería la justificación más *completa*, en el sentido de que se buscan las tres situaciones numéricas que deben aparecer en los enunciados. Mientras que las restantes son criterios *parciales*.

En ocasiones, los estudiantes utilizaron varios criterios al mismo tiempo, en ese caso los codificamos con los números que correspondan a ambos criterios, por ejemplo, se pondrá Co13 si el estudiante ha utilizado el criterio Co1 y Co3.

3.2.2 Clasificación de enunciados de *Combinación*

Problema del dinero

El problema del dinero es de *Combinación* y enunciado estándar.

Problema del dinero

Zerac está pasando una mala racha porque le ha pedido dinero a Pedro y a Enrique. Al hacer las cuentas llegó a la conclusión de que debe 4.000.000 de pesetas, ya que a Pedro le debe 3.500.000 pesetas. ¿Cuánto le debe a Enrique?

Tabla 7. Resultados de la clasificación del problema del dinero

Combina	Cambio	Dos Cambios	Compara	% correcto
P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7				100%
S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7				100%

Tabla 8. Criterios de clasificación de la historia del dinero

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
Co1	Co1	Co1	Co1	Co4	Co4	Co4	Co4	Co1	Co1	Co1	Co4	Co1	Co2 3

Todos los alumnos clasifican de forma correcta el problema. Se trata de un problema de enunciado estándar que no contiene ningún elemento confuso para los estudiantes. El criterio predominante es el Co1, es decir, buscar los dos estados y el estado total.

P1. *De Combinación porque la cantidad inicial es el resultado de dos cantidades de partes diferentes. Se unen dos cantidades para dar una tercera. Pueden unirse sumando o restando, pero el resultado es de una cantidad de Enrique y una cantidad de Pedro.*

El siguiente criterio usado fue el Co4, esto es, indicar que es un problema de *Combinación* porque se averigua el total.

S1. *De Combinación, porque averigua el total.*

Por último, un alumno indica que no hay ninguna variación en el enunciado y señala los dos estados (Co23).

3.2.3 Clasificación de enunciados de *Cambio*

Historia del submarino

La historia del submarino es de *Cambio* y de formato estándar.

Historia del submarino

Un submarino cuando salió del puerto iba a una profundidad de 543 m bajo el nivel del mar. Tras ser detectados tuvo que bajar 323 m más, para escapar del radar de los otros submarinos. Y estaba al final a una profundidad de 866 m. bajo el nivel del mar.

Tabla 9. Resultados de la clasificación de la historia del submarino

Combina	Cambio	Dos Cambios	Compara	% correcto
P4, P5, P7	P2, P6	P1, P3		29%
	S1, S2, S3, S4, S6, S7	S5		86%

Tabla 10. Criterios de clasificación de la historia del submarino

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
Dc2	Ca1 3	Dc4	Co4	Co4	Ca1	Co1	Ca1	Ca1	Ca1	Ca1Dc 2	Dc4	Ca3	Ca1

La historia fue clasificada de forma correcta por 8 estudiantes utilizando el criterio mayoritario de Ca1, es decir, indicar el estado inicial, la variación y el estado final.

P2. *Presenta un estado que es 543 y por alguna causa varía, vuelve a bajar 323 metros y al final queda una suma, $543 + 323 = 866$, que es el estado final.*

Los errores de clasificación parten de entender la historia como de *Combinación* porque uno de los datos se obtiene sumando los otros dos (Co4), o bien por que hay dos estados y se averigua el estado total (Co1).

P7. *Es Combinación porque está a un nivel, más otros tantos metros y al final sumas los metros, ¿en qué metros está?*

Otros estudiantes la interpretan como de *Dos Cambios* por entender el estado inicial como una variación, suponemos que imagina que el submarino tiene que bajar para estar a 543 m bajo el nivel del mar.

P1. *Es Dos Cambios porque el mismo dato, el primero, sufre Dos Cambios, tanto positivo como negativo, es decir, puede subir o bajar, el mismo dato desciende.*

Problema de la avioneta

El problema de la avioneta es de *Cambio* y está redactado con enunciado estándar.

Problema de la avioneta

Pedro salta de una avioneta que vuela a 20 metros y cae 5 metros bajo el nivel del mar. ¿Cuántos metros bajó?

Tabla 11. Resultados de la clasificación del problema de la avioneta

Combina	Cambio	Dos Cambios	Compara	% correcto
P1, P3, P4, P6, P7	P2, P5			29%
S6	S1, S2, S3, S4, S5, S7			86%

Tabla 12. Criterios de clasificación del problema de la avioneta

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
Co4	Ca2	Otros	Co4	Co4	Ca1	Co4	Ca1	Ca1	Ca2	Ca1	Ca3	Co4	Ca1

Ocho estudiantes clasificaron de forma correcta este problema utilizando principalmente el criterio Ca1 (identificación de las tres situaciones de la estructura) o al menos el estado inicial y la variación (Ca2).

P2. *Siempre me equivoco con Combinación y Cambio, porque no sé... todavía no diferencio bien entre lo que es el estado y la variación. Se supone que se presenta un estado que es que vuela a 20 metros y ha habido algo que ha variado ese estado. Yo pienso que es una variación, porque ha pasado algo, para mi es de Cambio.*

Las clasificaciones erróneas fueron como *Combinación*. De nuevo la justificación es que se averigua el total o que hay una suma (Co5). Se observa que en ningún caso se interpreta como un problema de *Dos Cambios*.

3.2.4 Clasificación de enunciados de *Dos Cambios*

Historia de la heladería

La historia de la heladería es de *Dos Cambios* y está expresada con enunciado estándar.

Historia de la heladería

La heladería de Pepe vendió 52 helados el sábado y el domingo 58, en el fin de semana vendió 110.

Tabla 13. Resultados de la clasificación de la historia de la heladería

Combinación	Cambio	Dos Cambios	Compara	% correcto
P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7				0%
S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7				0%

Tabla 14. Criterios de clasificación de la historia de la heladería

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
Co4 5	Co1 4	Co5	Co1 3	Co1	Co2 34	Co4	Co1	Co1	Co1 3	Co1	Co4	Co1	Co1

Todos los estudiantes clasificaron este problema como de *Combinación*. Ningún estudiante entendió este problema como de *Dos Cambios*, en el que se da una primera variación (los helados que se vendieron el sábado), una segunda variación (los helados que se vendieron el domingo) y se averigua la variación total (los helados que se vendieron en todo el fin de semana).

La mayoría de los estudiantes aluden que en el enunciado se describen dos estados parciales y el estado total (Co1).

S2. De *Combinación*, porque un día vende 52 helados y otro día vende 58, en total vende 110. *Combinación es cuando tenemos dos cosas y tenemos después un total. Como son días diferentes se consideran como cosas diferentes. Tenemos lo que pasó el sábado, lo que pasó el domingo y lo que pasó en total.*

Otras justificaciones se refieren al hecho de que se averigua el total (Co4)

S5. De *Combinación*, porque es como si hicieras un recuento de lo que vendes los dos días.

Tres estudiantes ratifican su clasificación por el hecho de que en el enunciado no hay ninguna variación (Co3).

P4. De *Combinación*, porque está viendo cuántos helados hay en total y dice lo que vende en un día y lo que vende en el otro. Estas juntando dos cosas distintas, aquí no hay ningún cambio, hay dos estados.

Por lo tanto, no se percibe “vender” como una variación sino como un estado, o el hecho de que se hable de dos días consecutivos hace que se interpreten como estados.

El problema del instituto no puede clasificarse atendiendo a las estructuras estudiadas por los estudiantes, ya que hay una posición de partida (no numérica), se dan dos variaciones y se pregunta por la posición final, es decir, tendría una estructura del tipo

$$\text{variación 1} + \text{variación 2} = \text{estado final.}$$

Si se supone que la posición inicial es 0, puede clasificarse como

$$\text{estado inicial} + \text{variación 1} + \text{variación 2} = \text{estado final.}$$

Se clasifican como correctas las respuestas que indiquen que no puede clasificarse, o que expliquen alguno de los dos casos anteriores.

Problema del instituto

Paula está en la puerta del instituto, camina hacia la derecha 10 m y después 13 m hacia la izquierda ¿en qué posición está al final?

Tabla 15. Resultados de la clasificación del problema del instituto

Combina	Cambio	Dos Cambios	Compara	% correcto
	P2, P4	P1, P3, P5, P6	P7	0%
S6	S3, S5	S1, S2, S4, S7		43%

Tabla 16. Criterios de clasificación del problema del instituto

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
Ca2	Ca2	Dc3	Ca2	Dc3	Dc3	Cp2	Dc1	Dc1	Ca1	Dc2	Ca1	Co4	Dc1

Este problema resultó particularmente difícil de clasificar, principalmente porque los estudiantes parecían haber olvidado que los enunciados que se les presentaban podían no corresponderse con ninguno de la clasificación estudiada.

La mitad de los alumnos lo clasifican como un problema de *Dos Cambios*, aunque sólo tres indican que, en el enunciado, no se da la variación final, sino el estado final. Un ejemplo de clasificación correcta es el siguiente

S2. *De Dos Cambios porque está en una posición, se mueve hacia un lado y después hace otro movimiento y se queda en -3. A lo mejor en lugar de preguntar ¿en qué posición está?, pues preguntaría ¿cuánto caminó en realidad?, indicando el cambio final. Que el cambio final fue que se movió 3 a la izquierda.*

De nuevo se observa que los alumnos centran su atención en las dos variaciones parciales, y olvidan la variación total.

Cinco alumnos lo clasifican de *Cambio* y transforman la primera variación en estado (Ca1 y Ca2).

P2. *Aquí presentan un estado... 10 metros. Luego resulta que cambia y va para allá (señala hacia la izquierda en una recta que ha dibujado). Es un esquema de variación, por eso es de Cambio.*

Un ejemplo de cómo las palabras claves (en este caso “la situación final”) pueden condicionar la clasificación es el siguiente

S3. *Si ponemos la puerta del instituto, el estado inicial, como si fuera el 0, podríamos hablar de que se han producido Dos Cambios, primero camina a la derecha y luego 13 metros hacia la izquierda, pero si pienso en lo que vimos en clase, me da la impresión de que intentaron plantear un problema de Cambio. Escribieron un cambio, porque es una sola situación, y sobre todo la pregunta que plantea al final: “¿en que situación está al final?”.*

El estudiante P7 indica que es un problema de *Comparación* porque *compara las dos posiciones.*

3.2.5 Clasificación de enunciados de Comparación

Historia de los ascensores

La historia de los ascensores es de *Comparación*. La razón de seleccionar esta historia fue el hecho de que la Comparación se expresa mediante la palabra “diferencia”, mientras que en la instrucción se habían utilizado las expresiones “más que” y “menos que”. El objetivo era analizar si el hecho de expresar la Comparación de forma diferente es captado por los futuros profesores.

Historia de los ascensores

En una ciudad había un conserje que cuidaba dos edificios. En uno hay un ascensor en la planta 5 y en el otro está en el sótano 1. El conserje de los edificios llegó a la conclusión de que tenían la diferencia de 6 plantas.

Tabla 17. Resultados de la clasificación de la historia de los ascensores

Combinación	Cambio	Dos Cambios	Comparación	% correcto
P2	P4		P1, P3, P5, P6, P7	71%
S6			S1, S2, S3, S4, S5, S7	86%

Tabla 18. Criterios de clasificación de la historia de los ascensores

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

Cp2	Co123	Cp2	Ca1	Cp2	Cp2	Cp2	Cp23	Cp1	Cp2	Cp2	Cp2	Co4	Cp1
-----	-------	-----	-----	-----	-----	-----	------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

El problema fue clasificado con éxito por 11 de los 14 alumnos, a pesar de que la Comparación no estaba expresada de la misma forma que en el proceso de instrucción, es decir, con la expresión “más que” (“más arriba que” para este contexto). Hay dos alumnos que buscan los tres elementos de la estructura del problema (criterio Cp1).

S2. *De Comparación, porque está comparando la posición del ascensor en un edificio y en el otro. Tiene una primera situación en un edificio, la segunda en el otro y la diferencia entre los dos. Hay dos estados y la diferencia entre los dos. También puede ser más alto, más bajo...*

Sin embargo, se observa que el criterio mayoritario para clasificarlo como *Comparación* es el Cp2, es decir, los alumnos se conforman con encontrar los dos estados diferentes que se están comparando, y no aluden a la manera de expresar la Comparación.

P6. *De Comparación, porque tiene dos cosas y las estás comparando. Si tuvieras un ascensor no sería de Comparación. Al ser dos ascensores estás comparando la posición de uno con la posición del otro.*

Un alumno alude a que no hay variaciones en el enunciado (Cp3).

Los alumnos que lo clasificaron como problema de *Combinación* indicaron que “se averigua el total” o que “se suma”.

P2. *De Combinación, porque hace como una suma, 5 más 1 es 6. Presentan un estado, luego otro estado y dan un estado final. No me da ninguna variación ni nada.*

Obsérvese como el alumno P2 ratificó la clasificación de *Combinación* aludiendo a que no hay ninguna variación en el enunciado (Co3).

Historia de cronología

La historia de cronología es de *Comparación*, aunque la Comparación se expresa mediante una diferencia: “habían pasado 51 años desde un nacimiento al otro”. La historia tiene un error en los años que habían pasado, ya que son 69 años y no 51 años, como expresan los estudiantes. Se valorará correcta la clasificación como problema de *Comparación* y se observarán los comentarios sobre la forma en que se expresa la comparación.

Historia de cronología

Un antepasado de Juan nació en el año 9 a.C. y Juan nació en el años 60 d.C. Juan concluyó que habían pasado 51 años de un nacimiento a otro.

Tabla 19. Resultados de la clasificación de cronología

Combina	Cambio	Dos Cambios	Compara	% correcto
P2, P4	P3		P1, P5, P6, P7	57%
S5, S6	S1, S7		S2, S3, S4	43%

Tabla 20. Criterios de clasificación de la historia de cronología

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
Cp2	Co13	Otros	Co4	Cp2	Cp2	Cp2	Ca13	Cp1	Cp1	Cp1	Co3	Co345	Ca1

A pesar de que la comparación no se expresa de igual forma que en el proceso de instrucción, 6 alumnos clasificaron de forma correcta el enunciado, con los criterios Cp1 y Cp2, aunque no todos ellos destacaron el hecho de que en el enunciado se expresa una diferencia y no una comparación. El ejemplo que se expone a continuación muestra la justificación del alumno (S2) que sí observó este hecho.

S2. De Comparación, porque está comparando la edad de Juan con la de su antepasado. Es comparación porque son personas diferentes. Yo pondría 51 años después, para que fuera una comparación clara. A lo mejor pondría nació 51 años después del antepasado o 51 años antes que Juan para que sea más clara la comparación. Como está parece una diferencia simplemente.

El principal error fue clasificar la historia como de *Combinación*, indicando que en el problema se averigua el total (Co4) o que no hay ninguna variación en el enunciado (Co3) o que en el enunciado hay un solo personaje o estado (Co5). El alumno S6 utiliza estos tres criterios en su justificación.

S6. De Combinación son los que tienen el mismo estado, no hay ningún cambio y la conclusión es sumar o restar y obtienes el todo.

Por último, encontramos dos alumnos que clasifican la historia como de *Cambio*, interpretando los dos estados como estado inicial y final.

S1. Aquí hay un estado inicial y un estado final, y lo que hace es ver la variación. Juan concluyó que habían pasado 69 años de un nacimiento al otro, entonces lo que hace es ver esa variación.

En general, fue una historia que presentó dificultades para clasificarla. Como hemos visto, las dificultades son de dos tipos, las que se apoyan en que hay una suma y por lo tanto es un problema de *Combinación*, y los que identifican incorrectamente las situaciones del enunciado. Pensamos que el contexto propicia este último tipo de errores.

Problema de la temperatura

El Problema de la temperatura es de *Comparación* y está redactado con enunciado estándar. Puede considerarse un problema típico de los tratados en el proceso de instrucción.

Problema de la temperatura

Débora quiere ir a Londres para ver a su familia. Ella vive en Tenerife y la temperatura allí es de 20 grados sobre cero. Para ver si tiene que llevar su ropa de abrigo llama a su madre y ella, como sabe que a Débora le cuesta un poco razonar problemas, le dice que en Londres tuvieron 15 grados menos que en Tenerife ¿Qué temperatura hubo en Londres ese día?

Tabla 21. Resultados de la clasificación de la temperatura

Combina	Cambio	Dos Cambios	Compara	% correcto
			P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7	100%
			S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7	100%

Tabla 22. Criterios de clasificación de la temperatura

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
Cp2	Cp2	Cp2	Cp2	Cp2	Cp2	Cp2	Cp2	Cp1	Cp1	Cp1	Cp2	Cp1	Cp1

Todos los estudiantes clasificaron de forma correcta este problema. El hecho de que sea un problema en enunciado estándar favorece la respuesta correcta.

El criterio de clasificación que predomina es Cp2, es decir, determinar los dos estados, ya que 9 de los 14 alumnos lo utilizaron.

S1. *Compara la situación que hay en Tenerife y la que hay en Londres.*

El resto de los alumnos además identifican la comparación (Cp1), es decir, ponen el énfasis en que hay una comparación en “15 grados menos”.

S3. *Comparación porque está comparando la temperatura de dos ciudades. Además el vocabulario es clarísimo, “menos que”.*

3.2.6 Clasificación de enunciado de Cambio y Dos Cambios

Historia de la presa

Esta historia a priori era la más compleja de clasificar porque no se corresponde con ninguna de las estructuras analizadas, ya que se utilizan 4 datos. La redacción por parte de los alumnos de Secundaria es correcta, pero con estructura:

estado inicial + variación 1 + variación 2 = estado final,

es decir, es una historia multitempo, que se puede clasificar como de *Cambio* y *Dos Cambios*. Se considerará correcta la clasificación cuando el futuro profesor percibe que no puede clasificarla porque corresponde a una historia multitempo o cuando percibe las dos estructuras al mismo tiempo, justificándolo adecuadamente.

Historia de la presa

En una presa tinerfeña que contenía 700.000 litros de agua, se sustrajo para regadío 300.000 litros de agua. En la siguiente noche a causa de la lluvia se rellenó con una cantidad de 200.000 litros. Después de estudiar la cantidad de agua que había era de 600.000 litros de agua.

Tabla 23. Resultados de la clasificación de la historia de la presa

Combina	<i>Cambio</i>	<i>Dos Cambios</i>	<i>Compara</i>	<i>Cambio y Dos Cambios</i>	% correcto
P3	P7	P1, P4, P5		P2, P6	29%
S3		S2, S5, S6, S7		S1, S4	43%

Tabla 24. Criterios de clasificación de la historia de la presa

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
Dc	CaDc	Co	Dc	Dc	CaDc	Ca	CaDc	Dc	Co1	CaDc	Dc	Dc	Dc
4	2	5	3	3	1	2	1	1	4	1	3	3	1

Como puede observarse, sólo cinco estudiantes dan una justificación correcta para esta historia. Cuatro de ellos perciben las dos estructuras y uno de ellos modifica el enunciado. Un ejemplo de cómo lo explicó un alumno utilizando el criterio CaDc1 es el siguiente:

P6. *Tenías un estado, unos litros de agua, primero se quitó agua y después se añadió, entonces son Dos Cambios en un mismo estado para volver a otro estado. Primero es de Cambio y después hay otra variación y es un Dos Cambios.*

El resto de los estudiantes la clasifican en su mayoría como de Dos Cambios. Es decir, que los elementos del enunciado que tienen mayor significación para ellos son las dos variaciones, e ignoran el que también se exprese el estado inicial o el estado final, aunque en cierta forma lleguen a una contradicción.

S5. *De Dos Cambios porque tienes una cosa, sacas y vuelves a meter. Tienes una situación, un estado, pasa a otro y luego pasa a otro.*

Por otra parte, encontramos que las justificaciones para clasificarlo como de Combinación se apoyan en que “se averigua el total” (Co4) o en que sólo hay un estado (Co5).

P3. *Es de Combinación porque es la misma presa.*

S3. *Yo lo pondría de Combinación por la conclusión final. Los de Combinación suman cosas que han sucedido para calcular la cantidad total. Me confunde un poco podría se de Dos Cambios. Aquí suceden Dos Cambios, se sustraen y se añaden 600000, pero al final la última frase, la forma en que está expresada me hace ver que es de Combinación.*

4. Conclusiones

Los resultados muestran la importancia de la redacción del enunciado para decidir la clasificación que se hace del mismo. La ausencia de determinadas palabras claves, o que, por el contrario, se expongan estas palabras conduce a determinadas clasificaciones. Es evidente que el contexto también influye, ya que el contexto es el que determina, en muchos casos, la forma de expresar las situaciones numéricas. Así, en el contexto carretera la comparación se expresa diciendo, por ejemplo, “23 kilómetros a la derecha (o a la izquierda)” en lugar de “23 kilómetros más que (o menos que)”. Otro ejemplo de la importancia de las palabras claves lo observamos en la prueba escrita, en el enunciado del problema de temperatura, en el que aparecía la expresión “temperatura final”, la cual pudo haber facilitado la clasificación del problema como de *Cambio*.

Los criterios encontrados son *completos*, es decir, buscar las tres situaciones numéricas implicadas en los problemas aditivos que estamos analizando, y *parciales*, indicar dos situaciones numéricas. Vimos que los futuros profesores de Secundaria tienen mayor tendencia a buscar las tres situaciones numéricas, aunque cómo hemos comentado, la comparación de ambas muestras queda abierta a futuras investigaciones.

La estructura de Combinación

El principal error de clasificación de los problemas de *Combinación* en la prueba escrita fue interpretarlos como de *Cambio*. Puede ocurrir que la representación mental del problema sea pensar en uno de los estados como un *Cambio* que actúa sobre el otro estado. También hubo alumnos que los clasificaron como de *Dos Cambios* o de *Comparación*. En las entrevistas encontramos un 100% de aciertos en este problema, suponemos que por ser de enunciado estándar, con contexto y redacción similar a las tratadas en el proceso de instrucción.

Los criterios más destacables de los que utilizan los estudiantes para identificar un enunciado como de *Combinación* son Co1 y Co4. Esto es, los que entienden que hay dos estados parciales y se averigua el estado total (criterio *completo*). Y los alumnos que indican que es de *Combinación* porque hay una suma, o porque se

averigua el total. Este último criterio llevó a errores en algunos problemas que no tienen la estructura de *Combinación*, pero en los que había una suma, como es el caso de la historia de comparación de los ascensores.

La idea de “juntar”, “unir” o “averiguar el total” predomina fuertemente, hasta tal punto que se ignoran las variaciones en la historia de los helados, de *Dos Cambios*, la cual clasificaron de forma incorrecta todos los estudiantes, optando por la clasificación de *Combinación* al ver que lo que plantea la historia es la unión de lo que había ocurrido el sábado y el domingo.

Otro criterio que ha aparecido aunque en menor grado, es la idea de que en las *Combinación* no se producen cambios o no hay variaciones.

La estructura Cambio

Los problemas de *Cambio* en la prueba escrita presentan resultados variables por parte de los estudiantes. Dependiendo del problema se inclinan por clasificarlo de forma distinta, confundiéndolos con problemas de *Combinación*, *Dos Cambios* y *Comparación*. Por otra parte, en las entrevistas nunca se confundió con problemas de *Comparación*.

El criterio predominante para clasificar los enunciados de *Cambio* es la identificación del estado inicial, la variación que se produce en ese estado y el estado final que resulta (Ca1).

La confusión con *Dos Cambios* se debe a que se interpreta el estado inicial como una variación, es decir, que ha tenido que suceder un *Cambio* para llegar al estado inicial.

Las entrevistas mostraron dos aspectos interesantes con respecto a estos problemas.

Por un lado, la diferencia que tiene, para algunos alumnos, los contextos discretos y los continuos en esta estructura. Algunos estudiantes han manifestado que una variación (aumentar, disminuir) sólo puede ocurrir en contextos discretos y no en contextos continuos asociados a la recta. Estos estudiantes piensan que el movimiento en la recta es sólo un cambio de posición, pero no un cambio del estado inicial. Por ejemplo, un estudiante clasifica la historia del submarino (contexto continuo, nivel del mar) como de *Combinación* porque “no hay ningún *Cambio* en el estado inicial”, el cual permanece igual, ya que “sólo se ha cambiado la posición”. Es decir, no se acepta un estado inicial como una posición en la recta.

Por otra parte, hay una fuerte tendencia a clasificar estos problemas como de *Combinación* aludiendo al criterio Co4, es decir, que la situación implica realizar una suma o averiguar el total.

Por lo tanto, pensamos que en la enseñanza de los futuros profesores es necesaria la presentación de situaciones aditivas que permitan clarificar estas ideas.

La estructura de Dos Cambios

Los problemas de *Dos Cambios*, tanto en la prueba escrita como en las entrevistas se confundieron principalmente con problemas de *Cambio*, al asociar la primera variación con una posición inicial.

Para clasificar un enunciado como de *Dos Cambios* la clave fundamental para los estudiantes es encontrar las dos variaciones. Una vez que han identificado las variaciones son pocos los que buscan la variación total. Es por ello que se han cometido algunos errores de clasificación en problemas que no son de *Dos Cambios* de manera “pura”, como es el caso de la historia de la presa.

Los errores de clasificación de esta estructura son variados, lo que hace pensar en la importancia del contexto, la manera de expresar el enunciado o la operación con la que se resuelve el problema. Es el caso del problema de la heladería. Creemos que el hecho de que en el enunciado aparezcan los dos días, sábado y domingo, hizo que se asociara con un problema de *Combinación*. Lo que muestra cómo las palabras del enunciado y la forma de redactar condicionan la clasificación.

La estructura de Comparación

En la prueba escrita los porcentajes de éxito fueron bajos. Creemos que la causa fue el hecho de que no aparezcan los términos relacionales “más que” (o “menos que”). Ya que en las entrevistas el problema estándar en el que aparecía esta expresión tuvo un 100% de éxito.

En las entrevistas los alumnos que clasificaron de forma incorrecta la estructura de *Comparación* optaron por la estructura *Combinación* o *Cambio*. Nunca se confundió con la estructura *Dos Cambios*.

El criterio de los alumnos para clasificar los problemas de *Comparación* es la existencia de dos estados distintos que se comparan. Por ello, los alumnos expresan que “hay dos cosas distintas” o “hay dos personas diferentes”.

Para clasificarlo como *Combinación* se alude que no aparecen las palabras *más que* o *menos que*, y se argumenta que las dos cantidades se suman, o bien que no hay ninguna variación.

La confusión con problemas de *Cambio* fueron casos especiales. Por ejemplo, se indica que en la historia de los ascensores “sólo hay una persona”, aunque no son las personas las que se comparan sino los ascensores. El otro caso especial fue la historia de cronología, en la que se alude que hay un “paso del tiempo”, en el sentido de que eso es un *Cambio*.

En resumen, hemos pedido a futuros profesores de matemáticas de Primaria y Secundaria que clasifiquen problemas aditivos con tres datos (es decir, con tres situaciones numéricas). La clasificación de los enunciados por parte de estos alumnos universitarios ha presentado ciertas dificultades, lo cual indica la necesidad de un trabajo profundo desde la formación de profesores sobre esta clasificación. Dejamos abierta a otras investigaciones la influencia de la metodología de enseñanza de esta clasificación en el éxito que se consiga. También nos parece interesante profundizar en ciertas estructuras de problemas, como el hecho comentado de la diferencia entre los contextos discretos y los continuos en los problemas de *Cambio*, o la comprensión de la variación total en los problemas de *Dos Cambios*.

Concluimos que la enseñanza de la clasificación de problemas aditivos debe proporcionar una amplia variedad de enunciados que permitan recoger las diferentes variables que pueden aparecer (lingüísticas, contextuales, posición de la incógnita,...) con el fin de crear una imagen amplia de las situaciones, al tiempo que lleve a diferenciar los elementos estructurales (*estados, variaciones, comparaciones*) de los no estructurales.

Bibliografía

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, 4(3), 199-208.

Bruno, A. (2000). Los alumnos redactan problemas aditivos de números negativos. *EMA, Investigación e innovación en educación matemática*, 5(3), 236-251.

Bruno, A. & Espinel, C. (2003). Problemas aditivos con números negativos: estudio sobre tres métodos de enseñanza con alumnos de nivel medio básico. *Educación Matemática* (aceptado para publicar).

Bruno, A.; Espinel, C. & Martínón, A. (1998). Prospective teachers solve additive problems with negative numbers. *Focus on learning problems in mathematics*, 19(4), 36-55.

Bruno, A. & Martínón, A. (1997a). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación Matemática*, 9 (1), 33-46.

Bruno, A. & Martínón, A. (1997b). Procedimientos de resolución de problemas aditivos de números negativos. *Enseñanza de las Ciencias*, 15 (2), 249-258.

Conne, F. (1985). Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 5(3) 269-332.

D'Amore, B. (1997). *Problemas. Pedagogía y Psicología de la Matemática en la actividad de resolución de problemas*. Madrid: Editorial Síntesis.

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 243-275). New York: MacMillan Publishing Company.

González, J.L.; Iriarte, M.; Jimeno, M.; Ortiz, A.; Ortiz, A. & Sanz, E. (1990). *Números enteros*. Síntesis. Madrid.

Marthe, P. (1979). Additive problems and directed numbers. *Proceedings of the III PME* (pp. 153-157). Warwick.

Rudnitsky, A.; Etheredge, S.; Freeman, J.M. & Gilbert, T. (1995). Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure-plus-writing approach.

Journal for Research in Mathematics Education, 26 (5) 467-486.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En Carpenter, T.; Moser, J, Romberg, T. (Eds.) *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. New Jersey: LEA..

Vergnaud, G. & Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *La Revue Française de Pédagogie*, 36, 28-43.

Verschaffel, L. & De Corte, E.(1996). Number and arithmetic. En Bishop, A.J. et al. (Eds) *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 99-137). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Alicia Bruno Castañeda
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de la Laguna
C/ Astrofísico Francisco Sánchez, s/n
38271 La Laguna. Tenerife

España
Teléfono: 922319097.

Email: abruno@ull.es

Juan Antonio García Cruz

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
C/ Astrofísico Francisco Sánchez, s/n

38271 La Laguna. Tenerife
España
Teléfono: 922319094.
Email: jagcruz@ull.es

VERSIÓN PRELIMINAR

Anexo 1

Prueba escrita

Cambio. Temperatura. I3

Estamos haciendo un experimento en clase de física. Tomamos la temperatura de un líquido y observamos que es de 16 grados bajo cero. A continuación, calentamos el líquido 5 grados. ¿Cuál es la temperatura final del líquido?

Combinación. Dinero. I3

Juan debe 1650 pesetas en la pastelería de una tarta que compró para su madre, por otro lado, tiene ahorradas en su hucha 3700 pesetas. ¿Cuál será la situación económica total de Juan una vez que salde su deuda?

Cambio. Carretera. I1

La siguiente recta representa una carretera, en la que una ciudad se ha señalado con el kilómetro 0.



Un coche después de moverse 10 kilómetros hacia la izquierda se quedó en el kilómetro 6 a la izquierda de la ciudad. ¿Cuál era la posición del coche antes de realizar este movimiento?

Dos Cambios. Ascensor. I2

Un ascensor realizó dos movimientos seguidos, de forma que cuando se paró, había bajado 4 pisos con respecto a su posición antes de moverse. Si su primer movimiento fue subir 7 pisos, ¿cuál fue su segundo movimiento?

Comparación. Nivel del mar. I2

Un chico volaba con un “ala-delta” a 11 metros sobre el nivel del mar y un buzo nadaba a 4 metros bajo el nivel del mar. ¿Cuál es la posición del buzo con respecto al chico que practicaba “ala-delta”?

Cambio. Cronología. I2

Una persona nació en el año 123 antes de Cristo y murió en el año 56 antes de Cristo. ¿Cuántos años vivió?

Dos Cambios. Autobús. I3

En una parada de guagua se subieron 6 personas y se bajaron 15 personas. ¿Cuál fue el cambio del número de personas que viajaban en la guagua después de esta parada?

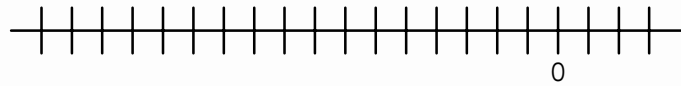
Combinación. Dinero. I2

Fernando es un panadero que está muy cansado de su mala racha económica.

Normalmente hace negocios con la empresa *Ricopan* y con la empresa *Pantosta*. Esta tarde está haciendo recuento de su situación. Al hacer cuentas llegó a la conclusión de que debe en total 23000 pesetas. Si a *Ricopan* debe 6000 pesetas, ¿cuánto dinero debe a *Pantosta*?

Comparación. Carretera. I3

La siguiente recta representa una carretera, en la que una ciudad se ha señalado con el kilómetro 0.



Juan está esperando la guagua en el kilómetro 7 a la izquierda de la ciudad y su compañera Silvia está esperando la misma guagua 6 kilómetros a la izquierda de Juan. ¿En qué kilómetro se encuentra Silvia esperando la guagua?

VERSIÓN PRELIMINAR