*Relime Vol. 7, Núm.1, marzo 2004, pp. 49-78*

# Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica

**Sandra Mabel Segura de Herrero***

## RESUMEN

Este artículo detalla la construcción y aplicación de una secuencia didáctica que facilita el aprendizaje y solución de sistemas de ecuaciones lineales, al conjugar en ella situaciones que, además, implican un trabajo en diferentes registros de representación semiótica y pasaje.

La base para elaborar dicha secuencia son investigaciones hechas tanto sobre fenómenos relativos al uso de representaciones semióticas en el aprendizaje –es decir, la necesidad de plantear al alumno actividades que lo induzcan a pasar por situaciones de acción, formulación y validación– como sobre la explicación de problemas que atañen a la aprehensión de objetos matemáticos.
El objetivo del trabajo consiste en diseñar y poner a prueba una secuencia de enseñanza de *calidad* que vuelva asequible el aprendizaje y solución de los objetos sistemas de ecuaciones lineales, con miras a propiciar comportamientos matemáticos y cognitivos en el quehacer de los alumnos, haciendo que el tratamiento y pasaje de registros de representación sea el eje alrededor del cual gire la construcción de las actividades.

**PALABRAS CLAVES**: sistemas de representación semiótica, secuencia, sistemas de ecuaciones lineales, comportamientos cognitivos.

## Linear equations systems a didactic sequence

## ABSTRACT

In this work the operation in situations of representation semiotic registries is observed. It is to say, how the learning of mathematical objects can be facilitated, in this case linear equations systems and the solution of the same one, making conjugate in a sequence situations that in addition imply work in different representation semiotic registries and passage among them.
The sustenance to construct this sequence is the previous research on this area, on the observed phenomena relative to the use representation semiotic registries in the learning; on the necessity to raise to the student activities that induce it to pass by action situations, formulation and validation; and also those that explain problems relative to the learning of these mathematical objects.

---

*Fecha de recepción: marzo de 2003*
**Facultad de Ciencias Económicas. Departamento de Matemática. Universidad Nacional de Cuyo. Luján de Cuyo-Mendoza-Argentina*
**Departamento de Ciencias Básicas. Universidad Tecnológica Nacional-Regional Mendoza. Luján de Cuyo-Mendoza-Argentina*

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Revista Oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

The objective is to elaborate and to probe a "quality" education sequence that facilitates the learning of linear equations systems and solution of the same one, and look for mathematical behaviors in the students task that facilitate the learning of the object and also to obtain cognitive behaviors doing that the treatment and the passage of representation semiotic registries are the axis around as the construction of the activities moves.

**KEY WORDS**: representation semiotic registries, sequence, linear equations systems, cognitive behaviors.



## Systèmes d’ équations linaires: une séquence didactique

### RÉSUMÉ

Dans ce travail on observe le fonctionnement en situations des registres de représentation sémiotique. C’ est à dire qu’ on cherche a comprendre comment peut se faciliter l’ apprentissage des objets mathématiques, en ce cas on analysera les systèmes d’ équation linaires ainsi que la solution des ceux mêmes, en faisant conjuguer dans une séquence des situations qui en plus impliquent du travail en différents registres de représentation sémiotique et le passage entre eux.

Le soutien pour construire cette séquence sont les recherches réalisées à l’ avance, soit sur les phénomènes observés relatifs à l’ usage de représentations sémiotiques dans l’ apprentissage ; soit sur le besoin d’ exposer au élève des activités qui l’ introduisent à passer par des situations d’ action, formulation et validation ; ainsi que celles qui expliquent les problèmes relatifs au apprentissage des objets mathématiques.

L’ objectif est d’ élaborer et de mettre en preuve une séquence d’ enseignement de « qualité » qui facilite l’ apprentissage des objets systèmes d’ équations linaires et la solution du même. Elle se dirigera a réussir des comportements mathématiques dans le travail académique des élèves qui facilitent d’ apprentissage de l’ objet ainsi qu’ a réussir des comportement cognitifs faisant le traitement et le passage de registres de représentation soit l’ axe conducteur autour du quel se déplace la construction des activités.

**MOTS CLÉS**: systèmes de représentation sémiotique, séquence, systèmes d’ équations linaires, comportements cognitifs.

## Sistemas de equações lineares: uma seqüência didática

**RESUMO**

Neste trabalho se observa o funcionamento em situações de registros de representação semiótica. Isto é, como é possível facilitar a aprendizagem de objetos matemáticos, neste caso sistemas de equações lineares e a solução do mesmo, fazendo conjugar em uma seqüência de situações que, além do mais, implicam trabalho em diferentes registros de representação semiótica e passagem entre eles.
A sustentação para construir esta seqüência são as investigações antes realizadas, sobre os fenômenos observados relativos ao uso de representações semióticas na aprendizagem; sobre a necessidade de propor ao aluno atividades que o induza a passar por situações de ação, formulação e validação; como também aquelas que explicam problemas relativos a aprendizagem destes objetos matemáticos.
O objetivo é elaborar e testar uma seqüência de ensino de "qualidade" que facilite a aprendizagem dos sistemas de equações lineares e solução dos mesmos. Nessa seqüência é possível obter comportamentos matemáticos, dos alunos, na realização de tarefas que facilitem a aprendizagem do objeto e também obter comportamentos cognitivos fazendo que o tratamento e os registros de representação sejam o eixo em torno do qual se move a construção das atividades.

**PALAVRAS CHAVE**: sistemas de representação semiótica, seqüência, sistemas de equações lineares, comportamentos cognitivos.



## 1. Introducción

En este trabajo se observa cómo puede facilitarse el aprendizaje de objetos matemáticos –en este caso, los sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución–, haciendo conjugar en una secuencia, situaciones que, además, implican trabajo en diferentes registros de representación semiótica y de pasaje entre ellos.

El sustento para construir tal secuencia de enseñanza son investigaciones antes realizadas, ya sea sobre fenómenos observados relativos al uso de representaciones semióticas en el aprendizaje, sobre la necesidad de plantear al alumno actividades que lo induzcan a pasar por situaciones de acción, formulación y validación, y sobre aquellas que explican problemas asociados con la asimilación correcta de estos objetos matemáticos.

El propósito fue elaborar y poner a prueba una secuencia de enseñanza de *calidad*[1] que facilitara el aprendizaje de los objetos sistemas de ecuaciones lineales y su solución. En ella se apuntó a lograr comportamientos matemáticos y cognitivos en el quehacer de los

---

[1] Una actividad que le permite al alumno hacer matemática y logre niveles de comprensión cada vez más complejos.

alumnos que propiciaran el aprendizaje del objeto, haciendo que el tratamiento y pasaje entre registros de representación fuera el eje alrededor del cual giraran las actividades.

**2. Problemática**

El objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales aparece como tema de estudio en el tercer año de enseñanza media (alumnos de 15 años) y reaparece como herramienta tanto en el mismo grado (sistemas de inecuaciones lineales, móviles que se encuentran en un punto), abarca los años siguientes de enseñanza media (programación lineal, sistemas de ecuaciones no lineales) y llega hasta la enseñanza superior (transformaciones lineales; autovalores y autovectores; sistemas de ecuaciones no lineales; planteo de problemas de análisis funcional con sistemas de infinitas ecuaciones e infinitas incógnitas; estudios de espacios de dimensión infinita; sistemas de ecuaciones diferenciales; método de la punta esquina en programación lineal).

En la enseñanza tradicional, son numerosos los errores en que incurren los alumnos, a pesar de los esfuerzos que hacen los profesores para que los corrijan y eviten en lo sucesivo. Por ejemplo, presentan dificultades para usar las operaciones aritméticas más elementales en problemas verbales que involucran ecuaciones o sistemas de ecuaciones; aún cuando saben aplicar perfectamente los algoritmos de resolución, tales errores vuelven a surgir en la introducción a la escritura literal para valores numéricos y en los comienzos del álgebra, sobre todo en igualdades y desigualdades (Guzmán, 2000).

Además –de acuerdo con otras investigaciones–, resuelven un sistema de ecuaciones lineales y no verifican la solución, es decir, hay una desarticulación entre el objeto sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución (Panizza et al., 1995); no realizan en forma correcta el pasaje del registro verbal al algebraico de un problema que involucre un sistema de ecuaciones lineales (Pérez Donoso , 1998) y recurren pocas veces al pasaje del registro gráfico al algebraico para resolver un sistema de ecuaciones lineales (Pérez Donoso, 1998.). En general, no efectúan la representación y resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales, dándole un estatus inframatemático a este registro de representación (Ramírez, 1997).



Si se toma en cuenta que los resultados de algunas investigaciones han llamado la atención sobre el papel que juegan las articulaciones entre los diferentes registros semióticos (no sólo el de las expresiones algebraicas, sino también el de la lengua natural y el gráfico) en el aprendizaje, particularmente cuando se trabaja con funciones (Artigue, 2000), la intención de la secuencia de enseñanza es poner énfasis en los factores que hacen al pasaje de registro de representación semiótica para favorecer el aprendizaje del objeto sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y su objeto solución.

Las dificultades en el aprendizaje de sistemas de ecuaciones tienen orígenes diversos. Unos están ligados a la complejidad matemática de los elementos básicos que se utilizan en la adquisición del objeto sistemas de ecuaciones lineales (números reales y función afín, ambos en vías de construcción); otros al concepto de sistemas de ecuaciones lineales y su solución, y otros más a la ruptura entre el pensamiento aritmético y el algebraico.

Algunos libros de texto y algunos profesores apuntan al desarrollo algorítmico. No trabajan los pasajes del registro algebraico al verbal ni del gráfico al algebraico, a pesar de que el paso entre registros de representación semiótica resulta necesario para acceder a un objeto matemático. Esto no se trata de una *opción pedagógica*, sino de un aprendizaje obligado (Guzmán, 1990).

Tras considerar los resultados de las investigaciones ya citadas, el desafío fue:

- Estudiar las condiciones que se deben dar en una secuencia de enseñanza para que las actividades que ésta contiene tengan como fin favorecer el aprendizaje del objeto sistema de ecuaciones lineales.
- Proponer una secuencia de enseñanza que contemple las condiciones anteriores como factor equilibrante ante las diversas dificultades en la comprensión del objeto.
- Realizar efectivamente la secuencia con un grupo de alumnos que desconoce el objeto y un profesor sin formación en didáctica de la matemática.
- Confrontar el análisis a priori realizado en la génesis de la secuencia con la realización efectiva en clase, para observar si, poniendo énfasis en las condiciones didácticas y cognitivas que una secuencia debe contener, se favorece el aprendizaje del objeto en cuestión.

El aporte de este trabajo consiste en el diseño de una secuencia de enseñanza –fruto de un proceso de análisis didáctico–, de tal forma que los alumnos, al interactuar con ella, gestionen con sentido el objeto sistema de ecuaciones.



## 3. Referencias teóricas

La conceptualización de Duval sobre la relación entre las diferentes representaciones y sus registros (el gráfico, el algebraico o el lenguaje natural) da una interpretación semiótica al vínculo entre distintos sistemas de signos que simbolizan el mismo objeto.

Empero, no se debe confundir el objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales con su representación ya que, como puntualiza Duval, tal desconcierto desencadenará, a mediano o largo plazo, una pérdida de comprensión y los conocimientos adquiridos pronto llegarán a ser inútiles fuera de su contexto de aprendizaje.

Ahora bien, la distinción entre un objeto y su representación constituye un punto estratégico para el aprendizaje de la matemática, debido a que las representaciones no son sólo necesarias para fines de la comunicación, sino también esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. En suma, la *sémiosis* (aprehensión o producción de una representación semiótica) y la *noesis* (aprehensión conceptual de un objeto) son inseparables.

La coordinación de varios registros de representación semiótica resulta fundamental para una asimilación conceptual de un objeto; además, es necesario que el objeto no se confunda con sus representaciones, pero debe ser reconocido en cada una de ellas.

Según Duval (1999), para que un sistema semiótico (entendido como el conjunto de signos y reglas que representan objetos, donde los signos son las unidades elementales del sistema y las reglas ordenan las asociaciones de signos) pueda ser un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis:

1. La formación de una representación identificable como imagen de un registro dado
2. El tratamiento de una representación a través de un proceso interno, que implica sus transformaciones en el mismo registro donde ha sido formado.
3. La conversión de una representación que conlleva su cambio –externo al registro de partida– hacia una de otro registro, conservando la totalidad o sólo una parte del contenido de la representación inicial. Dicha actividad es diferente e independiente a la del tratamiento.

La conversión es una actividad diferente e independiente a la del tratamiento. De las tres actividades cognitivas ligadas a la sémiosis, sólo las dos primeras, según Duval, son tomadas en cuenta en la enseñanza.

Toda representación es parcialmente cognitiva respecto a lo que representa. Pero además, de un registro a otro no son los mismos aspectos del objeto lo que se representa, de ahí que los distintos registros sean complementarios. La conceptualización implica una coordinación de registros de representación, por lo que la comprensión de un objeto matemático reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación.

En la figura 1 se resume lo anterior, en la que se considera a R1 como un registro de representación semiótica 1 y a R2 un registro de representación semiótica 2.

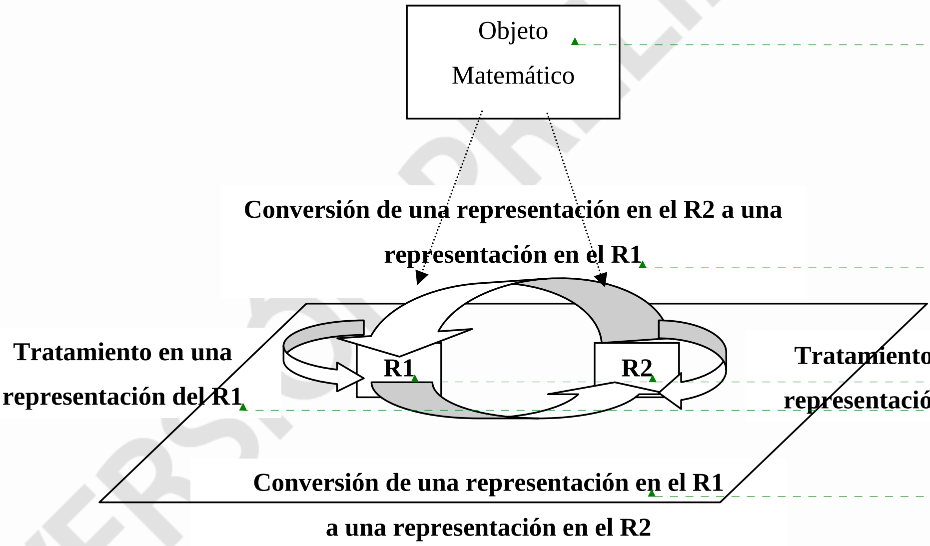


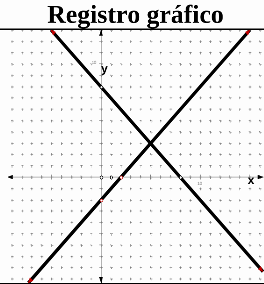
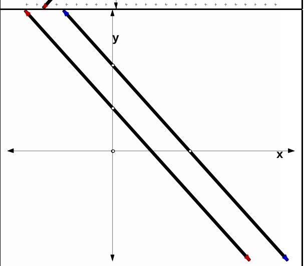
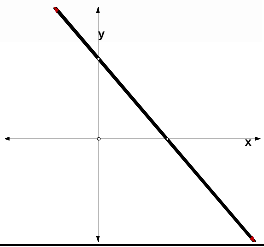
*Figura 1*

El pasaje de un registro a otro algunas veces es natural y otras no; este último caso resulta del fenómeno de no-congruencia entre las representaciones de un mismo objeto que provienen de sistemas semióticos diferentes.

Tal proceso se hace de manera más espontánea cuando las representaciones son congruentes y cumplen tres condiciones:

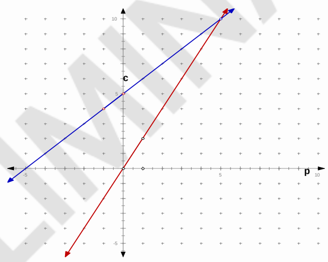
(i) <u>Correspondencia semántica entre las unidades significantes</u>: A cada unidad significante simple de uno de los registros le corresponde una unidad significante simple en el otro
(ii) <u>Orden</u>: Mismo orden de aprehensión de las unidades significantes
(iii) <u>Univocidad semántica terminal</u>: A cada unidad en el registro de partida le corresponde una en el de llegada.

La siguiente tabla muestra las diferentes representaciones de este objeto matemático en diferentes registros de representación semiótica:

| **Objeto matemático** | **Representación** | | |
|---|---|---|---|
| | **Registro verbal** | **Registro algebraico** | **Registro gráfico** |
| Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; solución es un conjunto unitario | Si los lados de un rectángulo se alargan 2 centímetros cada uno, el perímetro es de 24 centímetros. Si se sabe, además, que la diferencia entre la medida de los lados es de 2 centímetros, ¿cuánto miden los lados del rectángulo? | $\begin{cases} 2(\boldsymbol{x}+2)+2(\boldsymbol{y}+2)=24 \\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=2 \end{cases}$ |  |
| Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; su solución es un conjunto vacío | La suma de dos números es 1000 y el doble de su suma da 700. ¿Cuáles son esos números? | $\begin{cases} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=1000 \\ 2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=700 \end{cases}$ |  |
| Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; su solución es un conjunto infinito | El perímetro de un triángulo isósceles es 18 centímetros. Si se suma la medida de uno de los lados congruentes a la mitad de la medida del lado no congruente, se obtiene 9. ¿Cuál es la medida de cada lado del triángulo? | $\begin{cases} 2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=18 \\ \boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\boldsymbol{y}=9 \end{cases}$ |  |

Convertir es cambiar la forma por la cual un objeto es representado, o sea es la transformación de la representación de un objeto que está en un registro en una representación del mismo objeto en otro registro.

Como ya se ha mencionado también al tratamiento en los diferentes registros de representación semiótica, es importante ver su relación. En el caso de los sistemas de ecuaciones lineales, el tratamiento de una representación en el registro verbal implica otro en el algebraico, pero no en el gráfico. A continuación aparece un ejemplo de coordinación entre las representaciones de los tres registros.

| **Registro verbal** | **Registro algebraico** | **Registro gráfico** |
|---|---|---|
| El valor de la entrada al cine cuesta el doble del valor de la entrada al parque. Además, el cine cuesta 5 pesos más que la entrada al parque. ¿Cuánto cuestan las entradas al cine y al parque? | $\begin{cases} c = 2p \\ c = p + 5 \end{cases}$ |  |
| El valor de la entrada al parque cuesta la mitad del valor de la entrada al cine. Además, la entrada al parque cuesta 5 pesos menos que la entrada al cine. ¿Cuánto cuestan las entradas al cine y al parque? | $\begin{cases} p = \frac{1}{2}c \\ p = c - 5 \end{cases}$ | |
| El valor de la entrada al cine menos el doble del valor de la entrada al parque es cero. Además, la diferencia entre el valor de la entrada al cine y el valor de la entrada al parque es 5 de pesos. ¿Cuánto cuestan las entradas al cine y al parque? | $\begin{cases} c - 2p = 0 \\ c - p = 5 \end{cases}$ | |

En general, la enseñanza de la matemática se organiza como si la coordinación entre los distintos registros de representación semiótica fuera rápida y natural.

No basta una serie de problemas para que los estudiantes manejen con responsabilidad un sistema de ecuaciones lineales; es imprescindible trabajar diferentes registros semióticos que admiten un tratamiento en cada uno de ellos. Si se logra un pasaje fluido entre registros y un tratamiento natural en ellos se le permitirá al alumno que examine sus ideas y controle sus resultados. Esta es una de las bases para la construcción de la situación que involucra al objeto ya que, "*el cambio de registro constituye una variable que se revela fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje, pues ofrece procedimientos de interpretación*".[2]

También se pretende que la secuencia de enseñanza lleve al alumno a "hacer matemática", es decir, que se apropie del objeto sistemas de ecuaciones lineales y su solución.

Por ello, se le propuso al alumno una secuencia de enseñanza con determinadas situaciones. El término situación, es comprendido como un conjunto de relaciones establecidas explícita o implícitamente entre un alumno, un cierto medio (otros alumnos, eventualmente instrumentos u otros objetos) y un profesor, cuya función era hacer que los estudiantes asimilen un saber constituido o en vías de construcción, donde los conocimientos aparecieran como la solución óptima y posible de descubrir para los problemas planteados.

La secuencia propuesta tiene un alto contenido a-didáctico, es decir, de descubrimiento de conocimientos nuevos con base en la experiencia del alumno y su saber. Su propósito consiste en lograr que, a su forma, sea matemático, a partir del planteamiento y resolución de un



[2] Duval, R., (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Colombia: Universidad del Valle, p. 59.

conjunto de ejercicios con relación al mismo objeto. A fin de que cada tarea sea considerada como un desafío para el alumno, los conocimientos de que dispone para su resolución deben ser insuficientes pero, a partir de ellos, deberá estar en condiciones de desarrollar acciones de toma de información y descubrimiento de relaciones nuevas, de exploración, de hipótesis y de verificación.

Ahora bien, durante la clase no se trabajará con un sujeto aislado. Los intercambios de procedimientos, la confrontación de puntos de vista, la explicitación necesaria, la obligación de poner en coordinación sus acciones y opiniones con los otros harán que el alumno se descentre de su perspectiva, que reevalúe su manera de abordar la cuestión. Sus juicios, acciones y forma de encadenarlas, al compararlas con otras posibles, que no han sido para él lógicas, harán que reestructure su actividad cognitiva.

El proceso de devolución ocurrirá en el aula, ya que el docente planteará buenas preguntas que motivarán la búsqueda de respuestas pertinentes, es decir, autocontroladas, y devolverá una responsabilidad sobre el control de las respuestas; así, lo correcto e incorrecto le pertenecerá al alumno. Tal será la modelación ideal del docente que experimente la secuencia de enseñanza en la fase a-didáctica[3].

Por tanto, no se le da al alumno el significado del objeto, sino que debe construirlo a partir de la serie de actividades donde el objeto funcione en un principio de manera local y luego más global, para que luego tal conocimiento sea necesario en aras de la solución óptima. Si el alumno se adapta a la secuencia y llega a resolverla, dará evidencias de que se ha apropiado del saber en cuestión.

En la fase didáctica[4] el docente ayudará al alumno a que relacione estos conocimientos locales con los institucionales que ambiciona la enseñanza. De este modo, lo guiará para que transforme sus respuestas en saber, de ahí que el maestro redespersonalizará y redescontextualizará el saber que el alumno ha producido para que pueda reconocer un carácter universal en lo que ha hecho, es decir, un conocimiento cultural reutilizable.

## 4. Metodología de investigación

La metodología utilizada en esta investigación es la ingeniería didáctica, que se caracteriza por tener un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase (concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza) y se diferencia de otras que también recurren a la experimentación en clase porque utiliza la validación interna, que se apoya en la comparación entre los análisis a priori y a posteriori de la secuencia.

En el proceso experimental se pueden distinguir cinco fases: análisis preliminar; concepción y análisis a priori de la secuencia de enseñanza; experimentación; análisis a posteriori y confrontación entre el análisis a priori y el a posteriori.

---

[3] En esta fase los alumnos interactúan con otros en un medio que ofrece posibilidades de acción y control. (Artigue, 2000).
[4] Aquí se tiene en cuenta que los alumnos son sujetos de una institución (Artigue, 2000).

## 5. Desarrollo de la investigación

El análisis preliminar constituye el pilar de esta metodología de investigación; una vez hecho, es retomado y profundizado en las distintas fases. Aquí hay las siguientes tareas:

- Análisis de los resultados de investigaciones anteriores –referidos propiamente al objeto en cuestión– a conceptos relacionados con la teoría de registros de representación semiótica, a la epistemología del profesor, al rol que juegan los libros de texto escolar en la enseñanza, entre otros
- Descripción de libros de texto escolar
- Estudio de la evolución histórica y del objeto sistemas de ecuaciones lineales dentro del saber matemático
- Explicitación de especificaciones referidas al campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva, concernientes a los programas y la descripción del conjunto de alumnos que experimentarán la secuencia.

### 5.1. Antecedentes relativos a las concepciones de los alumnos, práctica docente y textos escolares

Como ya se ha visto en la problemática, diferentes investigaciones han desarrollado análisis que involucran directa o indirectamente a los objetos de sistemas de ecuaciones lineales y su solución.

En *Los primeros aprendizajes algebraicos. El fracaso del éxito* (Panizza, et al., 1995), se reportan los resultados de una investigación enmarcada en la teoría de situaciones de Brousseau, en la ingeniería didáctica y en la dialéctica medio-objeto de Douady. Abordan temas relacionados con: la concepción de ecuación como igualdad numérica, la concepción de solución, y la desarticulación entre el objeto sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución. A través de una encuesta que realizaron, encontraron que los alumnos identifican a la ecuación como el procedimiento para resolverla. En relación a la solución, hallaron que la mayoría de los estudiantes la relacionan con el resultado escrito a la derecha del signo igual.

En *La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito*, los mismos autores buscan identificar las condiciones de apropiación del álgebra elemental en alumnos de la escuela media, un trabajo cuyo marco teórico y metodológico entronca con la teoría de situaciones (Brousseau., 1986) y con la ingeniería didáctica (Artigue, 1988).

Al estudiar la propuesta de enseñanza –actual y usual en Argentina– en la que el álgebra se introduce en el primer año de secundaria a través de ecuaciones de primer grado con una incógnita, constatan que, a partir del conjunto de tareas elaboradas por los alumnos, elaboran una concepción donde la ecuación es una igualdad numérica y las letras son números a "develar". Por lo que se plantean la siguiente pregunta: ¿cuál sería la influencia de dicha concepción en la comprensión de otros objetos de enseñanza que aparecen más adelante?, anticipándose al hecho de que los alumnos tendrían dificultades para tratar objetos algebraicos con infinitas soluciones o aún con varias, como las ecuaciones con dos o más variables y ecuaciones de grado mayor que uno.

En *Pasajes de registros. Ecuaciones* (Pérez Donoso, 1988), cuyos marcos teóricos son la teoría de situaciones de Brousseau y los registros de representación de Duval, se reportan los resultados de un cuestionario de respuestas múltiples que contiene ítems sobre sistemas de ecuaciones lineales. Fue aplicado a un grupo de 105 alumnos que cursaban el primer año de diferentes carreras universitarias que incluyen alguna asignatura de matemática. En las conclusiones puntualizan, que los alumnos tienen una tendencia por el uso del registro algebraico para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, y que evaden los problemas dados en el registro verbal. Asimismo, que ocasionalmente recurren al pasaje del registro gráfico al algebraico y frecuentemente (con mayor confianza) del algebraico al gráfico para solucionar un problema que involucre ecuaciones.

En *Passage de l'arithmètique á l'algèbre ou modélisation algébrique?* (Pressiat, 1996), se inicia con un listado de los paradigmas de investigación sobre la enseñanza-aprendizaje del álgebra; entre otros, muestra la problemática del pasaje de la aritmética al álgebra, citando investigaciones de Kieran, Clement, Kücheman, Collis, Davis, Herscovics y otros. Enseguida, explica la dialéctica aritmética-álgebra, para después proponer ingenierías didácticas con situaciones relativas a las nociones de variable y ecuación. Por último, ofrece algunos resultados frente a investigaciones actuales, punto en el que desarrolla dos apartados: uno correspondiente a la introducción de las letras y otro relativo a la puesta en ecuación.

Sobre esto último, afirma que varios alumnos, al escribir la ecuación de un problema que se da habitualmente como ejemplo típico de una ecuación de primer grado con una incógnita, producen el sistema $\begin{cases} f(x) = y \\ g(x) = y \end{cases}$, donde *y* no es una incógnita del problema. Pressiat agrega que, entre las modelizaciones algebraicas $f(x) = g(x)$ y $\begin{cases} f(x) = y \\ g(x) = y \end{cases}$, los alumnos prefieren la segunda, y no considera trivial que pasen de la segunda modelización a la primera, ya que los estudiantes no reconocen que *y* representa lo mismo en ambas ecuaciones; tal dificultad conforma un fenómeno didáctico que persiste en la institucionalización de métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, propiamente en el de sustitución, ya que los alumnos, ante un sistema del tipo $\begin{cases} f(x) = y \\ g(x) = y \end{cases}$, no sustituyen *f(x)* por *y* en la segunda ecuación.

C. Kieran, en *El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar*, lleva a cabo una recopilación de investigaciones. Una de ellas, hecha por Greeno (1982), trata el objeto solución de una ecuación y apunta que los estudiantes novatos en álgebra no conocen las restricciones que hay para aplicar ciertas transformaciones; la única forma que identifican para ver si la solución de una ecuación es incorrecta consiste en volverla a resolver. Así, no reconocen que cuando se reemplaza tal "solución" en los dos miembros de la ecuación original o en alguno de los pasos de la cadena de solución, habrá dos resultados diferentes. Con respecto a la traducción de problemas dados en el lenguaje natural, Kieran puntualiza que los alumnos hacen un proceso de traducción directo, frase por frase, que requiere de un conocimiento semántico, pero sólo se apoyan en el sintáctico.

En *El uso de la calculadora gráficadora y la resolución de problemas algebraico-verbales en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas* (Ramírez, 1997) se reporta sobre ciertas dificultades que se les presentan a los alumnos al realizar el pasaje del registro verbal al algebraico. Se señala además, que, generalmente, la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas se aborda por medio de esquemas abstractos que elaboran los profesores o que son copiados de algún libro de texto. Además, se diserta sobre el estatus inframatemático de la representación y resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales, al que se refiere como un método válido y representativo de resolución.

En una investigación realizada por Slovin (citada por Kieran, 1990), relacionada con las actitudes y creencias de los profesores, sugiere que hay una aproximación estructural (algoritmizada) en la didáctica del álgebra, lo cual comprobó con maestros que estaban por iniciar un curso de enseñanza del álgebra mediante la resolución de problemas. La investigadora observó que muchos docentes sentían necesidad de obligar a los estudiantes a utilizar métodos eficientes (algorítmicos).

La mayoría de los docentes usan textos escolares como base para preparar sus clases, una estrategia que les da seguridad, ya que tanto los alumnos como los padres de familia conocen el programa a través del libro. Este, además, es el referente de los padres si quieren pedirle cuentas al docente (Berté, 1999).

Sessa, C. (1998), en su trabajo *Los efectos de un tratamiento aritmético de los sistemas de ecuaciones lineales. Análisis de un caso en un libro de texto*, describe cuatro libros de texto haciendo un análisis detallado de uno de ellos en el tema: sistemas de ecuaciones lineales. Basándose en la relación aritmética-álgebra de Chevallard y las leyes de Duval acerca del tratamiento en el registro algebraico y su relación con otros de representación semiótica.

Identifica, que cada uno de los libros ofrece diferentes alternativas para tratar los sistemas de ecuaciones lineales. Su análisis, intenta mostrar que, aún incorporando la validación de los procedimientos, hay una complejidad en el tema inherente a los elementos de ruptura con el tratamiento aritmético que los nuevos objetos requieren. No se conoce hasta el momento una propuesta didáctica que contemple tanto el desarrollo del tema en toda su complejidad como la validación del tratamiento algebraico de los sistemas de ecuaciones.

La investigación ahonda en dos textos escolares que funcionan como referencias fundamentales para los profesores (Panizza, et al., 1995) porque son de los más utilizados en enseñanza media y hace hincapié en sus definiciones, conceptos, registros de representación privilegiados, pasajes más recurrentes y su articulación.

Uno de ellos propone 80 ítems (solicitudes expresas del autor para indicar acción) relativos a los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; algunos son ejemplos dados por los autores y otros consisten en ejercicios para el alumno. Se notó que dicho texto prioriza el tratamiento algebraico –bajo la instrucción “Resuelve”–, al conformar el 50 por ciento de las actividades propuestas, dejando a un lado los tratamientos verbal y gráfico. Con respecto al pasaje entre registros –17.5 por ciento de las actividades– se descubrió que en el texto aparece la palabra “Plantea”, que se puede interpretar como una solicitud de pasaje del registro verbal al algebraico, mientras que en el pasaje entre el registro algebraico y el gráfico (10 por ciento de las actividades) sólo hay la orden “Grafica”; no se solicita al alumno que efectúe el pasaje del registro algebraico al verbal o del gráfico al algebraico ni aparece en ningún ítem la articulación entre los diferentes registros.

El otro libro propone 102 ítems relativos a los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y también prioriza el tratamiento algebraico (74.5 por ciento de los ejercicios propuestos), con la instrucción “Resuelve”, dejando de lado los tratamientos en el registro verbal y en el gráfico que, además, son abordados en forma separada. Con respecto al pasaje entre registros –10 por ciento de los ejercicios– sólo pide que se haga el pasaje del algebraico al gráfico, mientras que sobre el paso del verbal al algebraico (11. 7 por ciento de los ejercicios) tampoco solicita tal proceso ni el pasaje del registro gráfico al algebraico; además, no aparece en ningún ítem la articulación entre los registros. En cuanto a la solución, ningún ejercicio precisa su definición y los ejercicios que piden verificar la solución aclaran que sea en forma geométrica, es decir, como intersección entre rectas y no como raíces comunes entre los polinomios involucrados.

En suma, se comprobó que los dos textos dan un peso dominante al trabajo en el registro algebraico, el pasaje entre registros es tomado en un sentido (RV→RA, RA→RG), sin considerar su sentido inverso y la coordinación (o articulación) entre registros no es tomada en cuenta.

## 5.2. Análisis epistemológico

El análisis epistemológico de un objeto es necesario para el desarrollo de situaciones que lo involucren; sin embargo, la evolución histórica muestra obstáculos en el desenvolvimiento del objeto, ya sea por la simbología (primero el álgebra retórica, luego el álgebra sincopada y finalmente el álgebra simbólica), o bien por el campo numérico donde se sitúa el objeto sistemas de ecuaciones lineales (primero en el de los números naturales, luego en el de los racionales positivos, posteriormente en el de los enteros y finalmente en el de los reales).

También puede verse su progreso desde un funcionamiento puramente numérico (matemática babilónica y china) a otro algebraico (Diofanto, Al-Khowarizmi, Viète), pasando también por el de carácter geométrico (Descartes).

El estudio histórico, de igual manera, da pautas sobre las construcciones de los algoritmos que hoy son enseñados generalmente sin justificación (por ejemplo, los desarrollados por Diofanto o Leibnitz).

5.3. Especificación del campo de restricciones donde se sitúa la realización didáctica efectiva

Con respecto al sistema de ecuaciones lineales, se **tratan sistemas de** dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en el campo de los números reales, cuya gráfica sea dos rectas (secantes, paralelas coincidentes o paralelas no coincidentes).

En los programas oficiales argentinos de enseñanza media, el objeto sistemas de ecuaciones lineales aparece en tercer año (alumnos de 15 años), después de las ecuaciones lineales y función afín. Las expectativas de la secuencia didáctica diseñada son:

- Utilizar funciones, ecuaciones, inecuaciones y sistemas sencillos para resolver situaciones problemáticas, seleccionando los modelos y las estrategias de resolución en función de la situación planteada.
- Resolver problemas seleccionando y/o generando estrategias; juzgar la validez de razonamientos y resultados y utilizar el vocabulario y la notación adecuados en la comunicación de los mismos.

La secuencia de enseñanza se presentó a alumnas de 15 años (tercer año de enseñanza media en el sistema escolar argentino) del Instituto Santa María Goretti, institución privada de carácter confesional de la provincia de Mendoza.

El curso estaba conformado por 29 alumnas acostumbradas a una enseñanza tradicional, según el modelo normativo propuesto por Charnay, donde el profesor explica la teoría y el alumno se apropia o no de ella (según distintos grados); luego el maestro da una serie de ejercicios tipo y finalmente el alumno desarrolla una serie de ejercicios y los confronta con los realizados por el profesor.

Ahora bien, la docente no tenía formación en didáctica de la matemática, aunque estuvo dispuesta a hacer efectiva la experiencia y trató de seguir la modelación propuesta para él.

Los instrumentos de que disponían las alumnas (o conocimientos previos) eran el trabajo en el campo de los números reales (numérico para operatoria y algebraico para ecuaciones lineales), en el de las funciones (numérica y afín) y en el geométrico (posiciones de rectas en el plano).

Se destaca que la secuencia fue el primer acercamiento que tuvo el grupo con el objeto sistemas de ecuaciones lineales.



### 5.4. Especificación de las intenciones didácticas en la concepción de la secuencia de enseñanza

El objetivo principal de la secuencia era facilitar la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales. A continuación se explicitan las intenciones que subyacen en ella.

Se pretendía que las alumnas, mediante la acción, tuvieran éxito en el desarrollo de las tareas propuestas, luego formularan ecuaciones de rectas que de forma simultánea pasan por un punto del plano y posteriormente hallaran, gráfica y/o algebraicamente, rectas que pasaran por un punto dado del plano, es decir que a partir de un punto encontraran un sistema de ecuaciones lineales cuya solución fuera el punto dado.

Asimismo, que verificaran las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales –gráfica y/o algebraicamente–; que hicieran pasajes del registro algebraico al gráfico y viceversa, y del verbal al algebraico y viceversa; que realizaran tratamientos en los registros algebraico, gráfico y verbal; que observaran la coordinación entre el tratamiento en el registro gráfico y en el algebraico; que, dado un sistema de ecuaciones lineales, hallaran gráfica y/o algebraicamente su solución o soluciones; que validaran sus conjeturas de manera gráfica y/o algebraica, y que se acercaran a la noción de sistemas incompatibles y compatibles indeterminados.

### 5.5. Sinopsis y análisis a priori de la secuencia de enseñanza

Además de las variables consideradas para especificar el campo de restricciones de la secuencia, se tomaron en cuenta variables *macrodidácticas* (organización global de la secuencia) y *microdidáctica* (organización de la clase).

Las variables *macrodidácticas* fueron:

- Ligadas a la dimensión cognitiva: Se concibió una secuencia de enseñanza cuyas actividades giraran en torno al pasaje de registros de representación semiótica y tratamiento entre ellos
- Ligadas al contenido: La secuencia fue diseñada para ser trabajada en el campo de los números reales. Abarcó un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas y conjuntos de solución unitario, vacío e infinito; las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales fueron pares de números enteros y racionales, mientras que las ecuaciones de las rectas correspondientes a cada ecuación lineal del sistema contemplaron ordenadas al origen enteras y pendientes racionales
- Ligadas al proceso de aprendizaje: La secuencia fue concebida como una serie de actividades, considerando las fases de acción, formulación, validación e institucionalización.



En el caso de las variables *microdidácticas*, se estuvieron:

- Con respecto a la gestión de la situación en el aula: El escenario previsto para el desarrollo de la secuencia fue con respecto a las alumnas, es decir, que trabajaran en forma grupal todas las actividades; que realizaran una producción del trabajo en forma individual y escrita, y que hubiera una discusión entre el grupo al término de cada actividad, moderada por la docente.

Debido a que para elaborar la secuencia de enseñanza había que considerar tanto las referencias teóricas ya citadas como los antecedentes, por tanto debía proponer tareas que motivaran a las alumnas a plantear preguntas; a proponer argumentos y explicaciones, así como a trabajar en diferentes registros de representación semiótica, lo cual les permitiría emplear y tomar conciencia de su saber antiguo, llevándolos a construir un nuevo conocimiento. También se decidió que los registros de representación a trabajar fueran el gráfico, el algebraico y el verbal.

Si bien esta no es la única secuencia que permite facilitar el aprendizaje y solución del sistema de ecuaciones lineales, si se conjugan medidas tendentes a crear comportamientos matemáticos y cognitivos en el alumno que, según lo expuesto en las referencias teóricas, pueden efectivamente trazar un camino más directo en la adquisición de dicho objeto matemático.

A fin de desarrollar y observar los comportamientos matemáticos en el alumno se ocupó la teoría de situaciones, mientras que para los cognitivos la teoría de registros de representación semiótica.

Desde la teoría de situaciones se observará, en general, la aparición de actividades que permitan el desarrollo de las fases de acción, formulación y validación, siendo importante que se den en tal orden (previendo, naturalmente, las dialécticas entre una y otra).

La teoría de registros de representación semiótica permitirá analizar las actividades que se desarrollen en diferentes registros y los pasajes entre ellos en ambos sentidos. Se prestará atención especialmente a proponer ejercicios que requieran de pasajes entre representaciones no congruentes (según el sentido de conversión) ya que, como dice Duval, *"...un cambio de registro resulta interesante y fecundo cuando los tratamientos en dos registros diferentes no son computacionalmente equivalentes, es decir, no son congruentes"* (Duval, 1999, p. 53).

Así, la secuencia fue pensada como una actividad posterior a la enseñanza de función afín y de ecuaciones con dos variables y anterior a los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Mediante esta secuencia, se enfrenta a las alumnas con una serie de cinco actividades de complejidad creciente para el nivel de la escuela media.

Las actividades de la secuencia aluden al contexto de un laboratorio donde hay un dispositivo en el que se observan virus; el fin es eliminarlos con rayos que son emitidos por ciertas fuentes.

Para cada una de las actividades se lleva a cabo una descripción general; una especificación sobre los comportamientos matemáticos y cognitivos esperados; las posibles estrategias y errores de los alumnos, y el rol del docente, entre otros. A continuación, se muestra el análisis de una de las actividades.

Actividad 2: El objetivo es que la alumna explícitamente escriba un sistema de ecuaciones lineales, observando su simultaneidad, de ahí que deba proponer más de un rayo para eliminar a un virus ubicado en un cierto punto del plano.

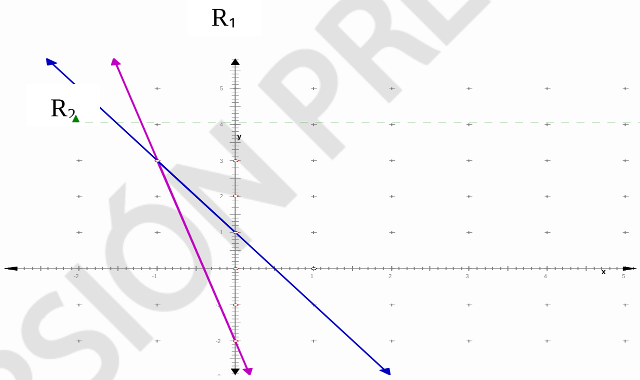
Por mutación, el virus está siendo cada vez más fuerte y no alcanza con un solo rayo para matarlo. Hay que enviarle dos rayos de manera simultánea para que pueda ser destruido.

El comportamiento matemático esperado consiste en que el alumno proponga algebraicamente y/o gráficamente rectas que, de manera conjunta, pasen por un punto dado –en síntesis, que fundamente sus decisiones con argumentos sólidos–, mientras que el cognitivo es que trabaje en los registros de representación semiótica gráfico y algebraico, que realice pasajes del RA →RG y del RG →RA, y que haga un tratamiento en el registro gráfico. Esto se solicita en las tareas b), c) y d) con la intención de que la alumna observe los sistemas equivalentes, es decir, distintos sistemas de ecuaciones lineales que tengan la misma solución.

*Secuencia de tareas para la actividad 2:*

a) Si el virus aparece ahora en el punto de coordenadas **(2,3)**, dibuja dos rayos que lo alcancen y propón las ecuaciones de los rayos dibujados. Verifica algebraicamente que los rayos alcancen al virus.

b) Un virus aparece en el punto **(-1,3)** y los rayos que emiten las fuentes son los siguientes:






¿Cuáles son las ecuaciones de cada uno de los rayos?

c) Si en vez del **rayo 2** se emite otro rayo desde la fuente ubicada en el punto **(0,2)**, ¿cuál sería la ecuación del rayo para eliminar el mismo virus? Dibújalo

d) Realiza lo mismo que en el punto c), pero la ubicación de la fuente ahora será el punto **(0,3)**

e) El virus aparece ahora en el punto **(2,3)**. Una de las fuentes emite un rayo, el de ecuación **$y = 2x - 1$,** que impacta en el virus; diseña la ecuación de otro rayo para que elimine al virus de forma paralela con el rayo ya citado.

Las posibles estrategias de las alumnas y un punteo sobre los errores que pueden cometer en el desarrollo de las tareas son detallados en el siguiente cuadro:

| *Posibles errores de las alumnas* | **Actividad 2** | **Posibles estrategias de las alumnas** |
|---|---|---|
| | | |
| • Que den ecuaciones de dos rectas: una que pase por el punto dado y otra que no lo haga.<br>• Que no verifiquen de forma algebraica la solución de un sistema de ecuaciones lineales.<br>• Que den ecuaciones de rectas que no pasen por el punto dado.<br><br>• Que ubiquen de manera incorrecta el punto en el sistema de referencia, dando una ecuación que pase por el punto graficado, pero no por el dado.<br>• Que ubiquen de manera incorrecta el punto en el sistema de referencia, dando una ecuación que no pase por el punto graficado ni por el dado.<br>• Que den una ecuación correcta y, al compararla con sus compañeros, crean que es incorrecta.<br>• Que no realicen en forma correcta el pasaje del registro gráfico al algebraico.<br>• Que no efectúen en forma correcta el pasaje del registro algebraico al gráfico. | Tarea a) | a) Que propongan, en primera instancia, una resolución gráfica, es decir, que marquen el punto dado y dos rectas que pasen por el punto (en un sistema de ejes referenciados). Luego, que intenten dar las ecuaciones de las rectas; si no lo logran (porque pusieron al azar cualquier recta, sin prever la ordenada al origen y pendiente) tendrán que rectificar y plantear gráficamente otras rectas. También pueden proponer las ecuaciones en el registro algebraico, verificando que pasen por el punto dado y luego las comprueben gráficamente.<br>Cuando se les pide la verificación algebraica, las alumnas pueden:<br>• Reemplazar el valor de *x* y ver si el de *y* coincide<br>• Suplir los valores de *x y* simultáneamente y ver si se verifica la igualdad |
| | Tarea b) | b) Que planteen las ecuaciones de las rectas, aunque pueden tener dificultades, ya que su punto de intersección está en el segundo cuadrante |
| | Tareas c) y d) | c) y d) Que diseñen su respuesta:<br>• Primero en el registro gráfico y luego en el algebraico<br>• Primero en el registro algebraico y luego en el gráfico |
| | Tarea e) | e) Que den su respuesta:<br>• Primero en el registro gráfico y luego en el algebraico<br>• Primero en el registro algebraico y luego en el gráfico<br>En cualquiera de los casos puede verificar |



Algunos errores descritos se deben a fenómenos de no-congruencia que resultan de la conversión de las representaciones. Por ejemplo, en las tareas a) y b) se le solicita a la alumna la representación de un rayo en el registro gráfico, y se le pide explícitamente una conversión al algebraico. Por la misma razón explicada en la actividad 1, se observa que no hay univocidad semántica terminal, otro fenómeno de no-congruencia, ya que ante la representación de una recta en el registro gráfico se pueden proponer distintas representaciones en el algebraico.

En cuanto al rol ideal del profesor como observador durante el desarrollo de la actividad, si detecta dificultades en los alumnos hará preguntas para que, por ejemplo, reconstruyan el significado de solución de una ecuación, pendiente de una recta. Al finalizar el ejercicio, cuando realice la discusión entre todos los grupos, deberá animarla con la diversidad de respuestas para elegir las más apropiadas y rechazar las no pertinentes.

Las dificultades que pueden surgir en el desarrollo de la actividad pueden provenir de los conocimientos insuficientes sobre la ubicación de puntos en el plano cartesiano, así como del significado de la ecuación de una recta que pasa por un punto dado o de su solución.

Esta actividad apunta a reforzar la concepción de los alumnos en la solución de una ecuación de dos variables y a establecer la relación entre los puntos de una recta y las soluciones de la ecuación correspondiente; tales ideas son analizadas por Panizza, Sadovsky y Sessa (1995, 1999). De igual manera, solicita explícitamente pasajes del registro gráfico al algebraico ya que, al ser representaciones no congruentes en ese sentido de conversión, resultan más interesantes y fecundas –como puntualiza Duval (1999)–, pero más difíciles de realizar, según Kieran (1994) y Pérez Donoso , (1998).

Para dar una visión total de la secuencia referida al comportamiento cognitivo esperado, se presenta el siguiente esquema:

RG: **registro gráfico** $\longrightarrow$ RV: **registro verbal** $\longrightarrow$ RA: **registro algebraico**

**$A_i$ k):** Actividad 1, tarea k

Las flechas que unen distintos registros implican una actividad con pasaje entre ellos, y las que parten y vuelven al mismo registro implican un tratamiento. Hay actividades que se encuentran en más de un lugar porque dependen de la estrategia que utilice el alumno (ver figura 2):



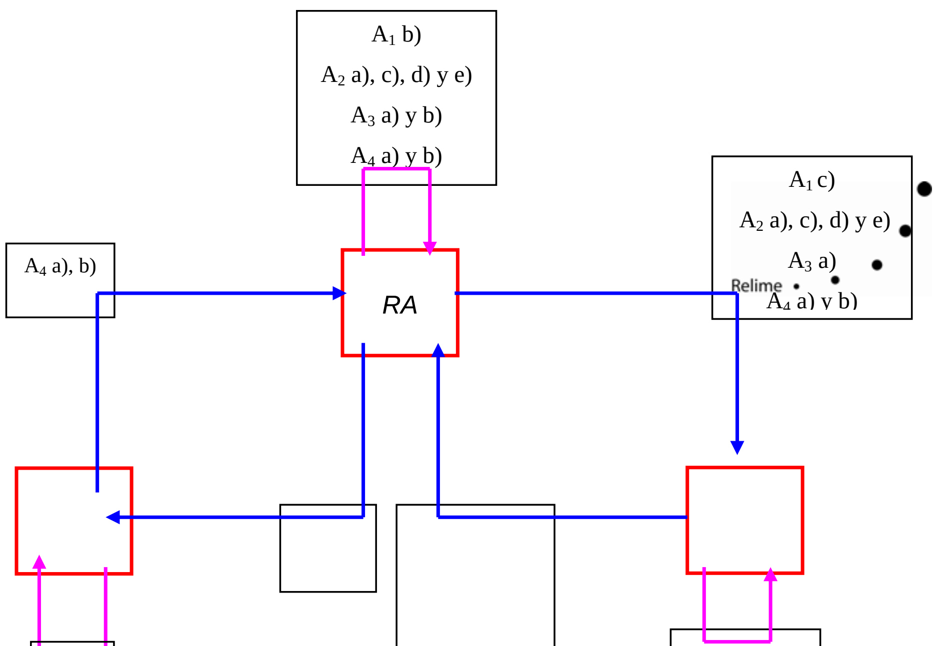


*Figura 2*

Al término de la secuencia, el docente elegirá una serie de tareas como refuerzo. Luego de su desarrollo someterá a los alumnos a una evaluación donde se observarán tanto los comportamientos matemáticos logrados como los cognitivos trabajados en la secuencia.

**6. La experimentación**

*La experimentación se llevará a cabo en seis jornadas de dos horas cada una (80 minutos) y el material se entregará por partes, actividad por actividad, al inicio de la sesión respectiva.*

*Al final de cada actividad se hará un debate que moderará la profesora. El papel del investigador y de su colaborador será el de observadores pasivos; no tendrán ninguna interacción con los alumnos ni con el docente que pone a funcionar la secuencia. Se hará un registro directo (grabaciones y filmaciones) y algunas entrevistas a las alumnas para poder diferenciar sus estrategias.*

7. Análisis a posteriori

*Cada tarea que comprendió la secuencia fue detallada a través de su fecha de inicio; duración; participación de la docente; análisis de las producciones de los seis grupos de alumnas; diálogos donde se observaron las actividades de las alumnas, decisiones y algunas dificultades; estrategias y descripción del debate.*

A continuación se presenta un resumen que detalla el análisis de una parte de la segunda actividad, llevada a cabo el 3 de agosto de 2000, durante dos horas de clase. Antes de entregar la actividad, la docente retomó el ejercicio del día anterior y entabló el siguiente diálogo (***A***, alumna; ***D***, docente):

**–*D:*** ¿Qué estaban haciendo ayer?
**–*A:*** Matando virus.
**–*D:*** ¿Con qué mataban virus?
**–*A:*** Con rayos.
**–*D:*** ¿Y cómo representaban esos rayos?
**–*A:*** En un gráfico, con rectas, y algebraicamente con ecuaciones.
**–*D:*** Ahora van a seguir matando virus, pero se les van a proponer otras condiciones.

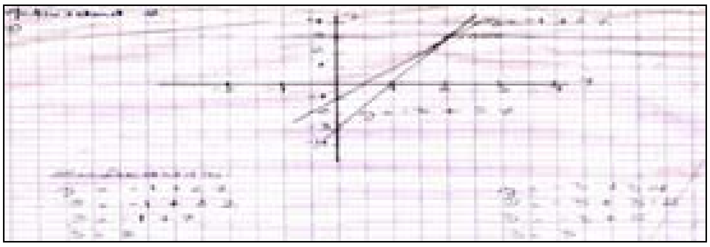
La docente hace observar que se pueden representar a los rayos algebraicamente y gráficamente. Además, ofrece un adelanto de la segunda actividad porque, se supone, no está acostumbrada a trabajar con secuencias de enseñanza y algo les tiene que decir a las alumnas para que no se sientan desorientadas (aunque pudieron resolver las actividades sin mayores inconvenientes).

También se nota, en la última parte del diálogo, que su papel se redujo a orientar, tarea que no atañe al proceso de devolución.



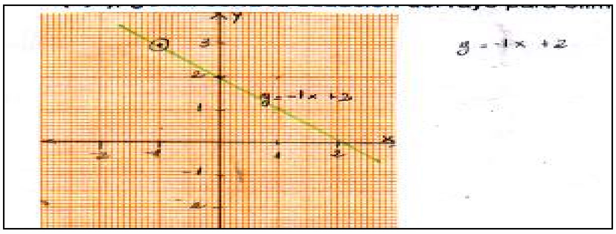
A continuación, se analizan las producciones de algunos grupos:

El grupo 1, en la tarea a) propuso gráfica y algebraicamente dos rectas que pasaban por el punto de coordenadas (2,3) y luego verificó algebraicamente que efectivamente el punto (2,3) estaba en ambas rectas. Lo que hizo fue reemplazar el valor de **x** (2) y el de **y** (3) en las ecuaciones y constatar si se daba la igualdad.

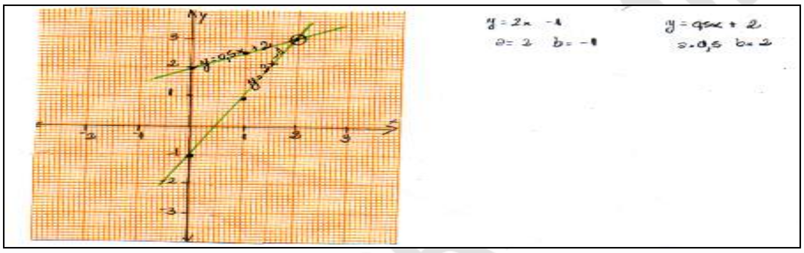


En la tarea b) formuló las ecuaciones de cada una de las rectas, aunque confundió **y** con $\mathbf{R_1}$ o $\mathbf{R_2}$, ya que $\mathbf{R_1}$ y $\mathbf{R_2}$ eran los nombres de las rectas en el gráfico, pero las variables que estaban en juego en las ecuaciones eran **x, y**.

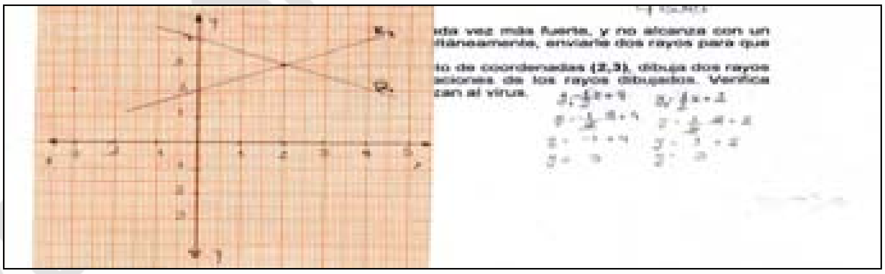
Para las tareas c) y d) sugirió gráficamente otra recta que pasaba por los puntos solicitados, pero sólo graficó y presentó esta nueva recta, sin hacerla conjugar con la recta 1.




Con respecto a tarea e), propuso gráfica y algebraicamente otra recta que pasaba por el punto de coordenadas (2,3) y la distinguió en el gráfico colocando la ecuación sobre el trazado en el sistema de ejes cartesianos.



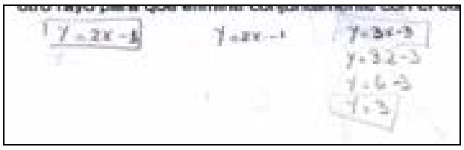

El grupo 2, en la tarea a) planteó gráfica y algebraicamente dos rectas que pasaban por el punto de coordenadas (2,3) y verificó algebraicamente que efectivamente el punto (2,3) estaba en ambas rectas. Lo que hizo fue reemplazar el valor de **x** (2) en cada ecuación y obtuvo el valor de **y** (3).



En la tarea b) sugirió las ecuaciones de cada una de las rectas, llamando $y_1$, $y_2$ las correspondientes a $\mathbf{R_1}$ y $\mathbf{R_2}$, respectivamente.

Para las tareas c) y d) trazó gráfica y algebraicamente otra recta que pasaba por los puntos solicitados, pero sólo presentó a esta nueva recta, no la conjuntó con la recta 1.

En la tarea e) propuso gráfica y algebraicamente otra recta que pasaba por el punto de coordenadas (2,3) y la distinguió en el gráfico al colocar la ecuación sobre el trazado en el sistema de ejes cartesianos. También verificó algebraicamente que la recta que estaba proponiendo pasara por el punto (2,3).




Al resolver las tareas c) y d) graficó una recta que pasaba por los puntos solicitados, pero no la presentó conjuntamente con la recta 1.

En la tarea e) propuso gráfica y algebraicamente otra recta que pasaba por el punto de coordenadas (2,3) y la distinguió en el gráfico colocando la ecuación sobre el trazado en el sistema de ejes cartesianos.

Aquí, la docente respondió algunas preguntas de los grupos. Se reproducen a continuación algunas, en el orden en que surgieron y se justifica el porqué se transcriben.

Actividad 2 a)
–***A*₁:** Para mí es más fácil primero hacer el gráfico y después las ecuaciones.
–***A*₂:** Tienes razón.

Las alumnas expresan su decisión de hacer primero el gráfico de la recta y luego la ecuación, es decir, que realizarán un pasaje del registro gráfico al algebraico. Este diálogo se transcribe porque en la producción de las alumnas no se puede saber si primero efectúan el gráfico y luego el pasaje al registro algebraico o viceversa.

–***$A_1$*:** Mira, si eliges una ordenada al origen, por ejemplo 2, y reemplazas **x** e **y** del punto, te da la pendiente y ya tienes la recta:
3 = a 2 + 2, entonces $a = \frac{3-2}{2}$, entonces $a = \frac{1}{2}$, entonces una recta que pasa por el punto es $y = \frac{1}{2}x + 2$.

–***$A_2$*:** No, eso es muy difícil, déjame que primero haga el gráfico y después saco las ecuaciones.

Aquí se observa la preferencia de una alumna por el trabajo puramente algebraico y la respuesta de su compañera marca su decisión de elaborar un pasaje del registro gráfico al algebraico.

A continuación se muestran las estrategias observadas en las alumnas, ya sea en sus producciones discursivas o por la observación directa del desarrollo de la actividad en el aula.

Tarea a):
- **Estrategia 1**: Propusieron un par de rectas en el registro gráfico y realizaron un pasaje del registro gráfico al algebraico; ahí hicieron un tratamiento
- **Estrategia 2**: Trazaron un par de rectas en el registro algebraico; realizaron allí un tratamiento y luego un pasaje del algebraico al gráfico

Tarea b):
- **Estrategia 1**: Obtuvieron, por inspección en el gráfico, primero la ordenada al origen y pendiente de la recta y luego determinaron la recta y = a x +b

- **Estrategia 2**: Sobre el modelo y = a x + b, reemplazaron la ordenada al origen y la pendiente que obtuvieron por inspección en el gráfico

Tarea c)

- **Estrategia 1**: Hicieron un pasaje del registro gráfico al algebraico para poder proponer otra recta que pasara por los puntos solicitados
- **Estrategia 2**: Realizaron un tratamiento en el registro algebraico y luego un pasaje del registro algebraico al gráfico para poder proponer otra recta que pasara por los puntos solicitados

Tarea d):

- **Estrategia 1**: Efectuaron un pasaje del registro gráfico al algebraico para así proponer otra recta que pasara por los puntos solicitados
- **Estrategia 2**: Realizaron un tratamiento en el registro algebraico y luego un pasaje del registro algebraico al gráfico para poder proponer otra recta que pasara por los puntos solicitados

Tarea e):

- **Estrategia 1**: Llevaron a cabo un pasaje del registro algebraico al gráfico de la ecuación dada, luego propusieron gráficamente otra recta y, sobre ella, realizaron un pasaje del registro gráfico al algebraico
- **Estrategia 2**: Hicieron un tratamiento en el registro algebraico y luego un pasaje del registro algebraico al gráfico para poder proponer otra recta que pasara por el punto dado
- **Estrategia 3**: Efectuaron un trabajo en el registro algebraico por ensayo y error (los números son adecuados para ello)

Ya concluida la segunda actividad, aproximadamente a los sesenta minutos, la docente coordinó un debate en el que hizo una recopilación de los ejercicios y analizó las estrategias utilizadas por los grupos. Al comprobar la actividad 2 a) algunas alumnas escribieron en el pizarrón pares de rectas que pasaban por el punto (2,3). Una propuso un par de rayos que no pasaban por el punto, de ahí que otra estudiante del grupo dijera:

–***A:*** Profesora, estas rectas no pasan por el punto (2,3)
–***D:*** ¿Por qué?
–***A:*** Porque si reemplazamos **x** por 2 no me da **y** = 3.

La alumna que había propuesto ese par de rectas se dio cuenta del error y lo corrigió.

En esta parte de la discusión se notó que algunas alumnas habían aceptado la responsabilidad de sus respuestas, a iniciativa de la docente.

Para la actividad 2 b), varias alumnas propusieron

$$\boldsymbol{y} = -\frac{1}{0{,}2}\boldsymbol{x} - 2 \qquad \text{y otras} \qquad \boldsymbol{y} = -5\boldsymbol{x} - 2$$

$$\boldsymbol{y} = -\frac{1}{0{,}5}\boldsymbol{x} + 1 \qquad\qquad \boldsymbol{y} = -2\boldsymbol{x} + 1$$

Entonces, la docente preguntó:

–***D***: ¿Están bien las dos?

**–*A*$_1$**: Sí, porque si reemplazamos **x** por –1 da **y** = 3 en las dos.
**–*D:*** ¿Entonces para una misma recta puedo dar más de una ecuación correcta?
**–*A*$_2$**: Sí, siempre que se verifique en el punto.

De nuevo la docente le dejó la responsabilidad a las alumnas y ellas la aceptaron, al grado de que validaron sus respuestas con un tratamiento en el registro algebraico.

Otra alumna escribió en el pizarrón $\begin{array}{l} y = 5x - 2 \\ y = -2x + 1 \end{array}$

**–*A*$_3$**: Profesora, la primera está mal.
**–*D:*** ¿Por qué?
**–*A*$_3$*:*** Porque si reemplazamos ***x*** por –1 y da... 5 por –1 es –5 **-**2... y me da –7, no 3.
**–*D:*** Bien, ¿cómo se puede solucionar?
**–*A*$_3$*:*** Cambiando el signo a la pendiente.
**–*D:*** Muy bien.

La alumna que había propuesto la ecuación de la recta errónea la corrige. Aquí se observó que la docente no sólo le dejó la responsabilidad a las alumnas, sino también orienta sobre los procedimientos correctos. La alumna corrige en el pizarrón no bajo su propia responsabilidad, sino bajo la de la docente y de su compañera.

Actividad 2 c)
La docente pasó dos alumnas al pizarrón y les pidió que graficaran el nuevo rayo. Después les preguntó cómo obtuvieron la ecuación.

**–*A*$_1$*:*** Primero trazamos el rayo y a partir de él obtuvimos la ecuación.
**–*D:*** Bien, ¿qué ecuación obtuvieron?
**–*A*$_2$*:*** y = **-** x + 2

Este diálogo se marcó la decisión de una alumna por hacer un pasaje del registro gráfico al algebraico. La docente les explica el sentido de este pasaje para que los otros grupos reflexionen sobre su preferencia.

Actividad 2 e)
**–*D:*** (*Al curso*) Esta actividad ¿es igual a la anterior?
**–*A:*** No, ahora nos dan como dato la ubicación del virus y una de las rectas y nos piden la otra.
**–*D:*** Bien, a ver ¿qué recta propusieron?
**–*A*$_1$*:*** y = **-**2 x + 7.
**–*A*$_2$*:*** y = 5 x – 6.
**–*A*$_3$*:*** y = 2 + 0,5 x.
**–*A*$_4$*:*** Profesora, hay una mal.
**–*D:*** ¿Cuál?
**–*A*$_4$*:*** La de *A*$_2$
**–*D:*** ¿Por qué?
**–*A*$_4$*:*** Porque si reemplazamos a **x** por 2, **y** no da 3.
***D:*** –¿Cómo encontraron las ecuaciones?
**–*A:*** (*La mayoría*) Primero graficamos y luego obtuvimos la ecuación.

*–A$_5$:* Nosotras no lo hicimos así, reemplazamos x por 2 y buscamos un número que nos diera y=3.
*–D:* Bien. Como ven, hay varias formas para llegar a resultados correctos.

De nuevo se observó que la docente le dejó la responsabilidad a las alumnas, pero también sancionó los procedimientos equivocados. Asimismo, les detalló sus preferencias sobre el sentido de conversión de las representaciones dadas en distintos registros.

Al término de las dos horas de clase, la docente recogió los ejercicios y los entregó a la investigadora.

## 8. Confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori

La sinopsis de la secuencia atendió los comportamientos matemáticos y cognitivos que promovió cada actividad, las estrategias podían usar las alumnas, las dificultades que podían tener, los errores que podían cometer y el papel de la docente que hizo efectiva la secuencia en clase.

Una de las funciones de la profesora fue estudiar la secuencia de actividades y, a partir de ahí, elaborar sus predicciones sobre el trabajo de las alumnas. Tal aspecto resultaba importante para que pudiera desempeñar la función de apoyo y orientación en caso de que las alumnas tuvieran alguna dificultad y avanzaran en la resolución de la secuencia.

En cuanto a su rol durante la puesta en escena de la situación, se limitó a observar, recorrer los grupos y responder preguntas. Algunas eran relativas a la interpretación de las consignas (muy pocas, algunas están transcriptas en la experimentación); otras a ciertos conceptos (previamente adquiridos), como la ecuación de una recta dada en el registro gráfico o el tratamiento en el registro algebraico de una ecuación. Frente a tales inquietudes la docente se mostró un poco conductista, al contestar "está bien" o "está mal", no hizo que la alumna reconociera su acierto o error; en esos momentos la validación estuvo a cargo de la docente y no del alumno (en la experimentación se pueden observar algunos diálogos para constatarlo). Es decir, la interacción con la profesora resultó intensa, ya que trató de devolver las preguntas o llamar la atención sobre las afirmaciones hechas –tanto habladas como escritas–, pero muchas veces sus intervenciones fueron enunciaciones sobre si una propuesta estaba bien o mal realizada.

La puesta en común, hizo hincapié en la riqueza y diversidad de los procedimientos empleados; además (al término de las actividades 4 y 5) constituyó el momento de la institucionalización. También puso en evidencia las relaciones que había entre los diferentes procedimientos y la articulación de los diferentes registros de representación semiótica.

Si bien la institucionalización estaba prevista al término de la actividad 5, según lo pactado con la docente, decidió hacerla al término de la actividad 4. Tal decisión puede explicarse en términos de Brousseau, quien afirma, en la dialéctica de la acción y de la formulación, que el alumno utiliza un "modelo implícito"[5] (en este caso el de sistemas de ecuaciones lineales) sin saberlo; entonces la docente, cuando vio que funcionaba dicho sistema, optó por institucionalizarlo, aunque la secuencia de las actividades se había completado.

El modelo implícito la docente lo ve en el desarrollo de la actividad 4, cuando algunos grupos, al efectuar las tareas, resolvían también el sistema de ecuaciones. Ella supuso que, si las alumnas estaban capacitadas para resolver un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado, también lo estaban para recibir la institucionalización del objeto sistema de ecuaciones lineales y su solución.

Los problemas aparecían al término de la quinta actividad ya que, por un lado, debía retomar la definición sistemas de ecuaciones dada al término de la cuarta actividad para ampliarla, por otro, reconstruir el concepto de solución del sistema, siendo esto más difícil por la diferencia sustancial de la noción referida a sistemas incompatibles y compatibles indeterminados.

En cuanto a las estrategias, por un lado estuvieron las previstas en el análisis a priori, por otro, las que emplearon las alumnas. Tras haber revisado sus producciones y por inspección directa se pudo establecer un paralelo para ver cuáles de las estrategias previstas no fueron utilizadas y cuáles de las manejadas por las alumnas no fueron previstas (el análisis detallado se encuentra en la tesis de mi autoría).

## 9. Conclusiones

El modelo seguido para desarrollar este trabajo consistió en tomar un objeto matemático y seleccionar, de diferentes teorías e investigaciones en didáctica de la matemática, los elementos necesarios para diseñar una secuencia de enseñanza que previera desarrollos en el campo matemático y en el cognitivo.

Los comportamientos que se querían generar en torno a un objeto matemático, permitieron definir las intenciones didácticas propuestas y, a partir de ellas, concebir una secuencia de enseñanza donde se propusiera a los alumnos que plantearan preguntas

[5] Conjunto de relaciones o reglas sobre las cuales los alumnos toman sus decisiones sin ser capaces de tomar conciencia de ello y, a posteriori, sobre éste formulan sus conjeturas.

y dieran argumentos durante su desarrollo; actividades de tal índole son esenciales para que los alumnos pongan en juego herramientas matemáticas y puedan valorar las estrategias utilizadas. No sólo interesó que las alumnas llegaran a obtener un resultado o respuesta final en primera instancia, sino también que las fundamentaran para que, al momento del debate, aceptaran o refutaran sus argumentos.

Las alumnas afrontaron la situación con sus propios recursos. En el proceso se requirió que la profesora las orientara y, sobre todo, que validara las afirmaciones que formulaban; en algunos casos dejó que las alumnas realizaran la validación, pero en otros este proceso estuvo a cargo de ella.

Como ya se dijo, la docente no tenía formación en didáctica de la matemática y por tal razón (aparte de la costumbre en la enseñanza tradicional) tomó la responsabilidad de llevar a cabo la validación. De ahí que, en el caso de repetir esta secuencia, es necesario trabajar primero con el profesor –sobre todo en los efectos de ruptura de contrato[6]– para enseguida ponerla a funcionar.

Aquí habría que tener en cuenta las investigaciones sobre reproductibilidad de situaciones didácticas, un fenómeno donde se establecen los factores que posibilitan el logro de los propósitos didácticos de la situación, al repetirla en diferentes escenarios. Por consiguiente, quedan abiertas algunas preguntas hacia próximas investigaciones: ¿Cuáles serían las pautas para un profesor que quisiera reproducir esta secuencia? ¿Cómo prever lo que suceda en una situación real y modelar al profesor? ¿Bastaría con un profesor formado en didáctica de la matemática?

De regreso a lo ocurrido en la experiencia, hubo tareas que propiciaron discusiones entre los grupos debido a las características de la secuencia, pero la forma de responder, el tiempo dedicado al debate y el modo o características de las respuestas fueron determinados tanto por la dinámica de discusión adoptada por el grupo como por las intervenciones de la profesora.

Esta secuencia de aprendizaje constituye una sucesión de actividades que, a su vez, da pie a otra de tareas. No provoca grandes desviaciones, permite que todos los alumnos pasen por los mismos problemas y ofrece la oportunidad de explorar tanto distintas formas para afrontarlos como argumentaciones para justificar los resultados.

[6] Contrato didáctico es el conjunto de reglas de juego y estrategias de la situación didáctica que implica responsabilidades mutuas entre el profesor y el alumno.

Al término de la secuencia, de las actividades de reempleo y de la evaluación, se pudo constatar el logro de las intenciones didácticas propuestas y el respeto al objeto matemático seleccionado, siendo esto justificado en la confrontación entre el análisis a priori y el a posteriori.

Durante el desarrollo de la secuencia, la mayoría de las alumnas pasaron satisfactoriamente por las fases de acción, formulación y validación que propone Brousseau para el proceso de aprendizaje.

Posterior a la experimentación con la secuencia, se observó que quedaron subsanados algunos fenómenos descritos en las investigaciones citadas, como la desarticulación entre los sistemas de ecuaciones lineales y su solución. Al ubicar los virus y luego los rayos se parte de la solución de un sistema; los alumnos deciden cuál la tiene, por lo cual se afirma la articulación. Una vez logrado esto, se pudo continuar con el curso normal de enseñanza –el orden natural tanto histórica como matemáticamente–, es decir, empezar de los sistemas y hallar la solución como se hizo en la secuencia. También, al partir de la solución de un sistema de ecuaciones, se evita que los alumnos la identifiquen con el resultado escrito a la derecha del signo igual (fenómenos descritos en las investigaciones realizadas por Panizza y otros (1995)).

Con respecto al reconocimiento del objeto sistema de ecuaciones lineales sólo como un conjunto de ecuaciones dadas en forma algebraica, el trabajo con los tres registros de representación facilita que el alumno identifique al objeto en todos los registros, ya que se emplean en forma indistinta para simbolizarlo.

La secuencia no asocia el objeto sistema de ecuaciones lineales con los métodos de resolución, por lo cual evita que se confunda el objeto con los algoritmos, fenómeno que a menudo se presenta, como en el tratamiento planteado por los libros de textos que analizó la investigación de Sessa y otros trabajos descritos.

En cuanto a las proyecciones de este trabajo todavía queda mucho por realizar, sobre todo en la comprensión de enunciados que se modelen con un sistema de ecuaciones lineales, teniendo en cuenta la coordinación y los fenómenos de no-congruencia entre representaciones del registro verbal que requieran de una conversión a una representación en el algebraico.

Este es un primer paso para una ingeniería didáctica de producción. Investigaciones posteriores podrían proponer otras secuencias que conduzcan al alumno a resolver sistemáticamente un sistema de ecuaciones lineales y buscando desarrollar en él comportamientos matemáticos y cognitivos. Al respecto, habría que realizar tratamientos y pasajes de registro de representación semiótica, así como observar la coordinación entre los diferentes registros.

El objetivo de este trabajo fue elaborar y poner a prueba una secuencia de enseñanza que facilitara el aprendizaje de los objetos sistemas de ecuaciones lineales y su solución. Se logró desarrollar en la alumna comportamientos matemáticos y cognitivos que no sólo le sirvieron para que asimilara estos objetos, sino también que hay otra forma de aprender. Incluso en el colegio donde se desarrolló la secuencia (en el que imparto clases en el nivel terciario) las alumnas que me ven en el pasillo me llaman la profesora de "los virus". Para ellas fue una experiencia diferente y provechosa.



Bibliografía

**Aleksandrov, A.; Kolmogorov, A., & Laurentievi, M. (1994). *La matemática: su contenido, métodos y significados* (tres volúmes). Madrid, España: Alianza Editorial, serie Alianza Universidad. Volumen 1, 2 y 3.**

Andrillo, S., & Hecker, D. (1999). *Elementary linear algebra.* USA: Academic Press.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 33-59). Santa Fé de Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Artigue, M. (2000). *Didáctica de la Matemática y formación de profesores*. Conferencia pronunciada en la Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Barbin, E., & Douady, R. (1996). *Enseñanza de las matemáticas: relación entre saberes, programas y prácticas.* Paris, France: Topiques Éditions.

Berté, A. (1999). *Matemática dinámica.* Buenos Aires, Argentina: A-Z Editora.

Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial, serie Alianza Universidad Textos. (Versión española de Mariano Martínez Pérez).

Brousseau, G. (1986). La théorie des situations. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7 (2).

Brousseau, G. (1988). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra e I. Sáiz, (compiladores), *Didáctica de las matemáticas: aportes y reflexiones.* Buenos Aires Argentina: Paidós Educador.

Brousseau, G. (1989). Utilidad e interés de la didáctica para un profesor. *Petit X* 21, 21-68. (Traducción de J. Díaz Godino).

Burgos, Román, J. (1997). *Álgebra lineal*. Madrid, España: Mc Graw Hill.

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations*. New York, USA: Dover Publications Inc.

Charnay, R. (1988). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Sáiz, (compiladores), *Didáctica de las matemáticas: aportes y reflexiones.* Buenos Aires Argentina: Paidós Educador.

Chemello, G. & Díaz, A. (1997). *Matemática. Metodología de la enseñanza. Parte II.* Buenos Aires, Argentina: CONICET.

Consejo Federal de Cultura y Educación (1997). Contenidos básicos para la educación. Buenos Aires: Ministerio de Cultura y Educación de la Nación Argentina.

Cordier, N. (1993). Les problèmes de mise en équation, en 3ème et en 2nde. *Annales de Didactiques et Sciences Cognitives* (volumen V, pp. 149-176). Strasbourg, France: IREM.

Cortes, A., & Kavafian, N. (1998-1999). Les principies que guident la pensée dans la résolution des équations. *Petit X* 51, 47-73.

De Guzmán, M. (1997). *Aventuras matemáticas. Una ventana hacia el caos y otros episodios*. Ediciones Pirámide, colección Ciencia Hoy.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactiques et Sciences Cognitives* (pp. 37-65 ). Strasbourg, France: IREM.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Suisse: Peter Lang.

Duval, R. (1999). *Sémiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Colombia: Universidad del Valle.

Galvez, G. (1985). La didáctica de las matemáticas. En C. Parra e I. Sáiz, (compiladores), *Didáctica de las matemáticas: aportes y reflexiones.* Buenos Aires Argentina: Paidós Educador.

Glaeser, G. (1982). *Didactique des mathématiques experimental.* Strasbourg, France.

Guzmán, R. I. (1990). *Le role des representations dans l´appropiation de la notion de fonction*. Tesis de doctorado, Universidad Louis Pasteur, Francia.

Guzmán, R. I. (1998). Apuntes del curso Didáctica experimental de la matemática. (Magister en Enseñanza de las Ciencias con mención en Didáctica de la Matemática). Valparaíso, Chile: Universidad Católica de Valparaíso.

Guzmán, R. I. (1999). Apuntes del curso Fundamentos teóricos de la didáctica de la matemática. (Magister en Enseñanza de las Ciencias con mención en Didáctica de la Matemática). Valparaíso, Chile: Universidad Católica de Valparaíso.

Guzmán R. I. (2000). Conferencia dictada en el seminario interdisciplinario *Problemáticas de la didáctica.*

Kieran, C. (1994). El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar. En la página electrónica de Una Empresa Docente: www.ued.uniandes.edu.co (traducción de Vilma Mesa)

Mena Lorca, A. (2000). *Elementos de matemáticas 1 y 2.* Valparaíso, Chile: Universidad Católica de Valparaíso (Facultad de Ciencias Básicas y Matemáticas).

Ministerio de Cultura y Educación de la Nación Argentina. Consejo Federal de Cultura y Educación. (1997). *Contenidos Básicos para la Educación.*

Moreau, E. (1999). Apuntes del curso Ciencias Cognitivas II.(Magister en Enseñanza de las Ciencias con mención en Didáctica de la Matemática). Valparaíso, Chile: Universidad Católica de Valparaíso.

Muir, J. (1996). *Of men & numbers. The story of the great mathematicians.* New York, USA: Dover Publications Inc.

Panizza; Sadovsky, P. & Sessa, C. (1995). *Los primeros aprendizajes algebraicos. Comunicación REM* 95-96.

Panizza; Sadovsky, P. & Sessa, C. (1999). *La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito*. Trabajo de investigación realizado en el marco del proyecto UBA EX –120, UBA TW89 y PICT 00571. Buenos Aires, Argentina.

Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Pérez Donoso, L. (1998). *Pasaje de registros: Ecuaciones*. Tesis del magister en Enseñanza de las Ciencias con mención en Didáctica de la Matemática, Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Pressiat, A. (1996). Passage de l'arithmètique á l'algèbre ou modélisation algébrique?. Les débuts de l'algèbre ou collège. *INRP*, 7-31.

Ramírez, M. (1997). *El uso de la calculadora graficadora y la resolución de problemas algebraico-verbales en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas"*. Tesis de maestría, CINVESTAV-IPN, México.

Rey Pastor, J. & Babini, J. (1951). *Historia de la matemática*. Buenos Aires, Argentina: Espasa-Calpe.

Rosas, J. R. (1995). La comprensión del álgebra y los números racionales. *Educación Matemática* 7 (2).

Sessa, C. (1998). *Los efectos de un tratamiento aritmético de los sistemas de ecuaciones* *lineales. Análisis de un caso en un libro de texto.* Buenos Aires, Argentina: Universidad de Buenos Aires.

Smith, D. E. (1958). *History of mathematics* (volumen II). New York, USA: Dover Publications Inc.

Strang, G. (1993). *Introduction to linear algebra.* USA: Wellesley-Cambridge Press.

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history



**Sandra Mabel Segura de Herrero**

Facultad de Ciencias Económicas. Departamento de Matemática

Universidad Nacional de Cuyo- Luján de Cuyo-Mendoza-Argentina

Departamento de Ciencias Básicas. Universidad Tecnológica Nacional- Regional Mendoza

Dirección postal Constitución 8364-Carrodilla-Luján de

Cuyo-Mendoza-Argentina.

Código Postal 5503

E mail: ssegura@uncu.edu.ar