El Teorema de Bolzano o un Teorema que no debe pasar inadvertido

1. INTRODUCCIÓN

En la mayoría de los libros de Cálculo en los que aparece el teorema del valor intermedio se tiene el enunciado del teorema: Si f es una función continua en $[a, b]$ y η es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c en el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(c) = \eta$.

Usualmente se acompaña de una gráfica como la de la Figura 1:

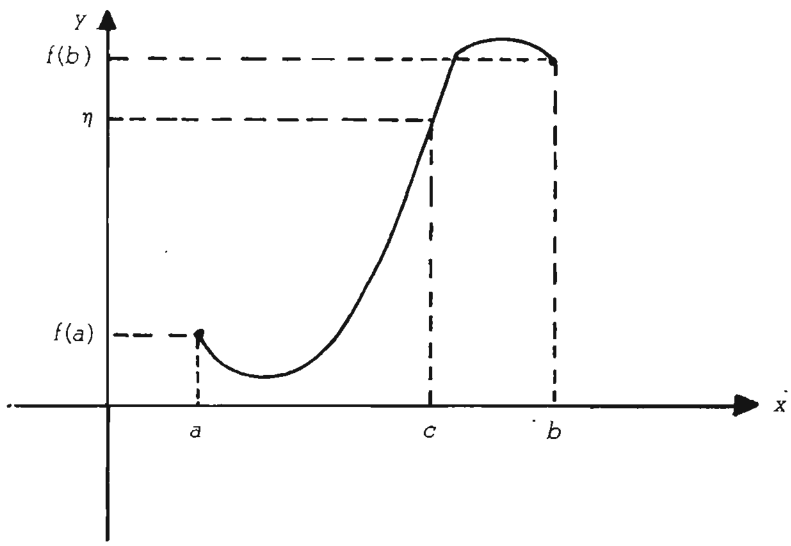

Figura 1

Carlos Bosch Giral

ITAM

Raro es encontrar a continuación la demostración, pero, en general, se hallan comentarios como:

El teorema del valor intermedio debe su nombre al hecho de que f toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$, a medida que x varía de a a b.

O bien

Geométricamente este teorema nos asegura que la gráfica de una función continua no puede saltarse a una recta horizontal. En términos físicos quiere decir que no se puede atravesar un río infinitamente largo sin mojarse o saltarlo.

O bien:

La validez geométricamente de este teorema es evidente. . . . Así mismo: En la gráfica de la figura se aprecia que para este teorema es necesaria la continuidad.

Pero también hay otros que dicen que se omite la prueba por ser demasiado complicada para un curso inicial de Cálculo, o remiten al lector a un apéndice donde aparece la demostración.

A los estudiantes este teorema no les causa ninguna sorpresa y se preguntan: "¿Por qué hay que probar algo tan evidente?" Sin embargo, esta propiedad tan obvia equivale a varias proposiciones nada obvias que enunciaremos más adelante. El teorema ha sido atribuido al matemático checo Bolzano. Sin embargo, él no era el único matemático interesado en desenredar los conceptos básicos del Cálculo.

2. NOTA HISTÓRICA

En la historia de las matemáticas abundan los descubrimientos simultáneos. Este es el caso de Bernhard Bolzano (1781-1848) y de Augustin-Louis Cauchy (1789-1867) que hicieron trabajos muy similares en la aritmetización del Cálculo, las definiciones de límite, derivada, continuidad y convergencia. Cauchy durante su exilio vivió algún tiempo en Praga, ciudad donde nació y murió Bolzano; sin embargo, no hay indicaciones de que se conocieran o intercambiaran ideas. No obstante, Bolzano, un solitario sacerdote en Bohemia, es el primero que publica, en un folleto que circuló únicamente en Praga, una formulación precisa del moderno concepto de continuidad. Como la mayoría de sus trabajos, el primer ejemplo de función continua y no diferenciable, que aparece en 1834, también pasa inadvertido. Lo mismo sucede con el ahora llamado *Teorema de Bolzano-Weierstrass*, enunciado y seguramente también demostrado por Bolzano y usado en sus conferencias por Weierstrass, hacia 1870. Son pocos los teoremas y propiedades que llevan su nombre. Bernhard Placidus Johann Bolzano fue uno de los matemáticos más brillantes y profundos de su época y sin embargo, por su aislamiento, la mayoría de sus resultados tuvieron que ser redescubiertos posteriormente. Fue una de las mentes privilegiadas del siglo XIX, sobre todo en el manejo del concepto de infinito; quizá el primero en darse cuenta, hacia 1840, que el infinito de los números reales es de distinto tipo al de los enteros.

Tal vez Bolzano es el matemático más moderno del siglo XIX. Aquí vamos a tratar el teorema del valor intermedio al que deberíamos llamar siempre el *teorema de Bolzano*, para darle crédito a este excepcional matemático.

3. IMPORTANCIA DEL TEOREMA

Usualmente se introducen los números reales después de haber estudiado al conjunto de los números racionales denotado por **Q** y definido como el conjunto de los números del tipo p/q, tales que p y q son enteros y q es distinto de cero. El conjunto de los números racionales tiene muchas y muy convenientes propiedades. Posee todas las propiedades algebraicas que uno quisiera, ya que es un campo donde todas las operaciones aritméticas (excepto dividir entre cero) tienen sentido. Además **Q** tiene un orden y la propiedad arquimediana; es decir, que para cualquier racional r existe un número natural n tal que $r < n$. Sin embargo en el conjunto de los números racionales hay sucesiones monótonas y acotadas que no convergen a un número racional. Geométricamente esto quiere decir que los números racionales no "llenan" la recta. ¿Qué tipo de condición nos hace falta para poder garantizar que la recta se llene? ¿Qué tipo de propiedad de completitud (o completez) necesitamos? Gracias a estas preguntas podremos empezar a apreciar y a valorar nuestro teorema. Hay un gran número de propiedades que resultan equivalentes al teorema que se analiza, y que aparentemente es tan obvio. Algunas de esas equivalencias se dan a continuación; todos los conjuntos y sucesiones se toman en **R**.

1. **Propiedad del valor intermedio:**

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y se tiene que ξ es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \xi$.

2. **Propiedad de las cortaduras de Dedekind:**

Si A y B son dos conjuntos no vacíos y cuya intersección es vacía, con la propiedad de que cada número está en A o en B, y que si $x \in A$ y $y \in B$ se tiene que $x < y$, entonces se puede concluir que A tiene un elemento que es mayor que todos los demás, o bien B tiene un elemento que es menor que todos sus elementos.

3. **Propiedad del ínfimo:**

Todo conjunto no vacío y acotado inferiormente o por abajo, tiene un ínfimo (una mayor cota inferior).

4. **Propiedad del supremo:**

Todo conjunto no vacío y acotado superiormente o por arriba, tiene un supremo (una menor cota superior).

5. **Propiedad de los intervalos anidados:**

Si $I_n = [a_n, b_n]$ y se tiene que $\ldots \subset I_n \subset \ldots \subset I_3 \subset I_2 \subset I_1$, para toda $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $I_n \neq \phi$.

6. Propiedad de Heine Borel:

Si E es un conjunto cerrado y acotado, y que está cubierto por una colección de abiertos, entonces existe una subcolección finita que sigue cubriendo a E.

7. Propiedad de Cauchy:

Una sucesión $\{a_i : i \in N\}$ es de Cauchy si para toda $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que si $n, m > N$ entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Toda sucesión de Cauchy es convergente.

8. **Propiedad de Bolzano-Weierstrass:**

Todo conjunto infinito y acotado tiene un punto límite. Un punto x es un punto límite de un conjunto E si todo intervalo abierto que contiene a x contiene puntos de E.

9. **Propiedad de las sucesiones acotadas:**

Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

10. **Propiedad de las sucesiones monótonas:**

Toda sucesión monótona acotada es convergente.

11. **Propiedad de acotamiento para funciones continuas:**

Toda función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ es acotada en el intervalo.

Por supuesto que aquí no haremos las demostraciones de estas equivalencias; sin embargo, es interesante notar que nuestro teorema se encuentra rodeado de propiedades sumamente importantes. El teorema de Bolzano es uno de los muchos axiomas que se pueden escoger para 'llenar' la recta. Es la propiedad que nos da la completitud (o completez) de los números reales. Sin esa propiedad el Cálculo Diferencial e Integral no hubiera ido muy lejos.

4. ALGUNAS APLICACIONES

En esta sección veremos diversas aplicaciones del teorema de Bolzano, algunas de ellas sorprendentes. Por ser jugador de bridge, empezaré con una de las aplicaciones que más me gusta y que llama grandemente la atención a mis compañeros de juego y a mí mismo.

1. *La mesa inestable:*

Las mesas de juego suelen ser mesas cuadradas y el extremo de sus patas forma un cuadrado en un plano. La mesa resulta inestable (o como decimos en general, "esta mesa está coja"), debido a que el suelo no está a nivel o parejo. La costumbre más común es meter un bloque de papel doblado bajo una de las patas de la mesa para resolver el problema. Sin embargo, esta no es la mejor práctica, ya que se tiene uno que inclinar y doblar el papel, que a veces queda muy grueso y a veces muy delgado. La mejor solución es hacer girar la mesa, y antes de haber recorrido un ángulo de 90 grados habrá quedado estable. La primera vez que lo hice, mis compañeros de juego y hasta yo mismo quedamos atónitos, quedando en evidencia que soy un matemático "puro", y no uno "aplicado".

Además tuve suerte, ya que esto funciona únicamente si todas las patas tienen la misma longitud y el problema está en el piso.

Probemos esta propiedad usando el teorema de Bolzano. Debemos empezar por suponer que las 4 patas tienen la misma longitud y que el piso está deformado continuamente, y que no hay hoyos o escalones. Por comodidad denotemos con un cuadrado la posición de dos patas opuestas, y por un círculo la de las otras dos, como se indica en la Figura 2. Midamos el ángulo de rotación respecto al eje que une a las dos patas cuadradas, como se indica en la ilustración. Al girar un ángulo θ, definamos $h_1(\theta)$ como la suma de las alturas de la mesa sobre el piso en la dirección de las patas cuadradas, menos la suma de la longitud de las patas cuadradas. Y como $h_2(\theta)$ la suma de las alturas de la mesa al piso en la dirección de las patas redondas, menos la suma de la longitud de las patas redondas.

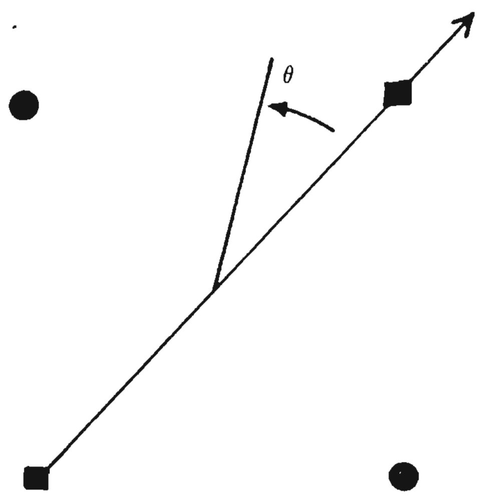

Figura 2

Sea $H(\theta) = h_1(\theta) - h_2(\theta)$. Por estar desnivelada o coja la mesa, puede suponerse que para $\theta = 0$ las patas redondas no están ambas tocando el piso, así que $h_1(0) = 0$ y $h_2(0) > 0$, así que $H(0) < 0$. Observemos que si giramos un ángulo $\pi/2$ (o sea 90^o), las patas cambian de posición; es decir, que las cuadradas toman la posición inicial de las redondas, y viceversa. Así que ahora $h_1(\pi/2) > 0$ y $h_2(\pi/2) = 0$, de donde $H(\pi/2) > 0$. Así que usando el teorema obtenemos que para alguna θ_0 en el intervalo $[0, \pi/2]$, $H(\theta_0) = 0$; es decir, $h_1(\theta_0) = h_2(\theta_0)$, y como la mesa descansa todo el tiempo al menos en tres patas, entonces $h_1(\theta_0) = 0$, o bien $h_2(\theta_0) = 0$. Así que ambas son 0 y las cuatro patas tocan bien el piso.

De hecho esta propiedad de una mesa de bridge es un caso particular del siguiente teorema.

Teorema: Supóngase que el extremo de cada pata de una mesa, está en un plano y forman todos un polígono regular de n lados. Supongamos que el piso es una superficie continua. Entonces con una rotación de menos de $2\pi/n$, al menos cuatro patas tocarán el piso.

Demostración: Si la mesa está descansando en tres patas en $\theta = 0$, después de una rotación de $2\pi/n$ seguirá descansando en tres patas, pero no las mismas tres del principio. Así que en algún momento una de las patas que estaba en contacto con el piso dejó de tocarlo. Eso sólo puede suceder cuando cuatro patas tocan el piso.

Nota: ¿Qué pasa si la mesa es rectangular, o en general, si no tenemos un polígono regular?

2. *División de regiones:*

En la mayoría de los problemas de matemáticas se pide que se resuelva una ecuación, que se calcule algún valor específico o que se construya una figura geométrica. Aquí los problemas que estamos resolviendo son de otra índole. Simplemente se pide probar que existan la raíz, el número o la figura. El método que estamos usando es una aplicación del teorema del valor intermedio (Teorema de Bolzano). Así que proseguiremos con las aplicaciones para dejar en claro la importancia de este teorema.

Veamos ahora que siempre se puede dividir por medio de una recta vertical en dos partes de una misma área, a una región acotada limitada por una curva cerrada en el plano.

Para eso tracemos una recta vertical que se encuentre a la izquierda del conjunto (Fig. 3), y empecemos a moverla hacia la derecha. La recta tocará la frontera del conjunto en algún momento, como se indica en la Figura 3, y luego empieza a pasar por encima del conjunto hasta que vuelve a tocar al conjunto únicamente en la frontera. Luego se colocará a la derecha del conjunto.

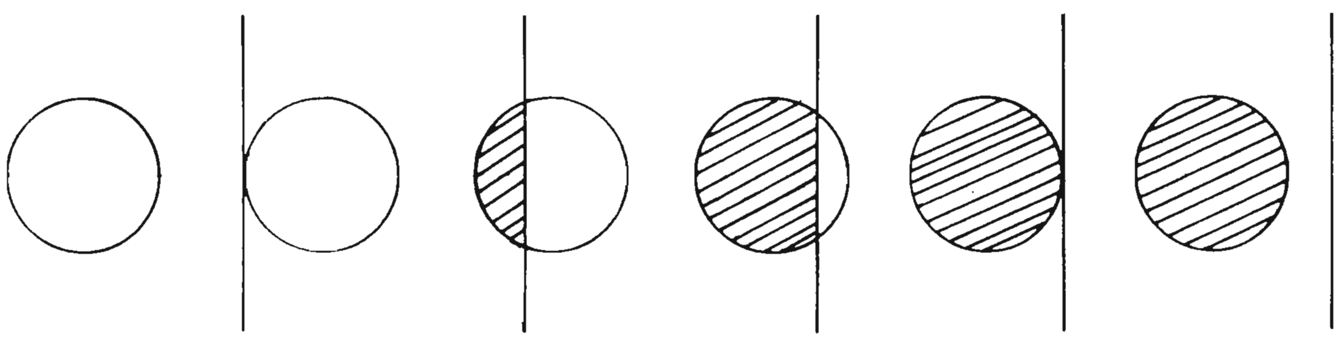

Figura 3

Analicemos cómo se comporta el área delimitada por el conjunto a la izquierda de la recta.

El área varía continuamente desde 0 hasta el área total del conjunto, que denotaremos por A. Así que por el teorema de Bolzano, en cierto momento el área será exactamente igual a la mitad del área total. En ese preciso momento la línea divide al conjunto en dos partes con área igual a $A/2$.

Como en el ejemplo anterior, este método no da un modo de construir la línea requerida, y sólo establece la existencia. Pero tampoco tiene mucho sentido buscar una receta para efectuar una construcción, ya que el conjunto es arbitrario.

Observemos que se ha probado que en cada dirección existe una recta única que divide a la región en dos partes cuyas áreas son iguales.

Veamos la solución desde otro punto de vista. Tomemos un eje horizontal (Fig. 4). La posición de cualquier línea vertical está determinada por el número x, el punto donde la recta corta al eje. Consideremos el área de la parte delimitada por el conjunto y a la izquierda de la recta, y denotémosla por medio de una función, $f(x)$. La gráfica de f se aprecia en la figura. Así que encontrar una recta que divida el conjunto en dos partes con área igual, es lo mismo que encontrar un punto c tal que $f(c) = A/2$. Para esto consideremos la recta $y = A/2$. La parte izquierda de la gráfica de $f(x)$ se encuentra abajo de esa recta, y la parte derecha se halla arriba, ya que $f(a) = 0 < A/2$ mientras que $f(b) = A > A/2$. Así que existe un punto c donde la recta horizontal corta a la gráfica de $f(x)$. En ese punto c se tiene que

$$f(c) = \frac{A}{2}$$

Una vez examinado este problema, es fácil ver que si se tienen dos regiones en el plano hay una recta que divide a ambas a la mitad.

Para esto tomemos una dirección cualquiera en el plano θ respecto al eje horizontal.

Sean $\ell_1(\theta)$ y $\ell_2(\theta)$ las rectas que dividen a las regiones R_1 y R_2 en mitades, respectivamente. Ahora midamos la distancia entre ℓ_1 y ℓ_2.

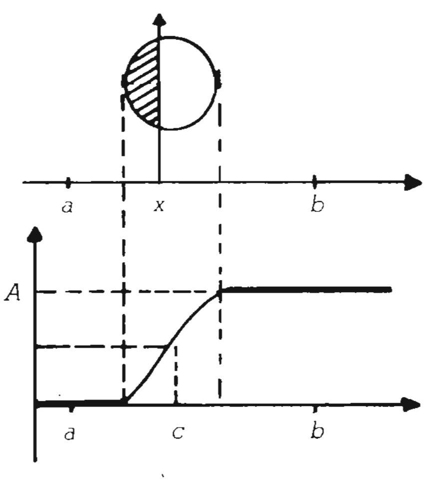

Figura 4

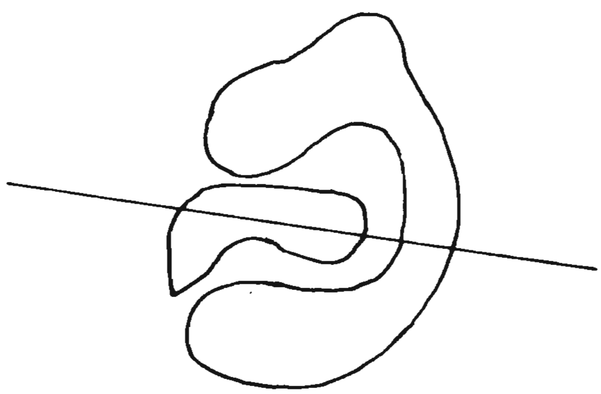

Figura 5

Supongamos que ahora asociamos ese número positivo si ℓ_2 está a la derecha de ℓ_1 si vemos en la dirección de θ, y negativo si ℓ_2 está a la izquierda de ℓ_1. Definamos $D(\theta)$ como la "distancia" con signo entre ℓ_1 y ℓ_2. Entonces D es una función continua en $[0, \pi]$ que depende de θ. Tenemos ahora tres posibilidades dependiendo del valor de $D(0)$.

Si $D(0) = 0$ entonces claramente $\ell_1(0) = \ell_2(0)$ es una línea que divide a las regiones R_1 y R_2 en mitades.

Si $D(0) > 0$, entonces $D(\pi) < 0$, y por el teorema del valor intermedio para alguna θ_0 en $[0, \pi]$, se tiene que $D(\theta_0) = 0$; así que la recta que divide a las regiones R_1 y R_2 en mitades, es $\ell_1(\theta_0)$ (Fig. 5).

Si $D(0) < 0$, entonces $D(\pi) > 0$, y repetimos el argumento anterior.

Ahora podemos generalizar lo anterior para ver que si se tiene una torta formada de pan, jamón y queso, siempre es posible con un sólo corte plano dividir a los tres ingredientes en mitades.

3. *El problema del excursionista y los teoremas de punto fijo.*

Un excursionista sale desde el punto A a las 9 de la mañana de un lunes y llega después de su caminata, tal vez con varias paradas, comida y un rato de siesta, y planta su campamento en el punto B.

El martes a las 9 de la mañana sale del campamento siguiendo el mismo camino de regreso. Aunque parezca increíble, veamos que el excursionista estaba en el mismo punto del camino a la misma hora del lunes y del martes.

Esto lo podemos ver con argumentos que no utilizan Cálculo, si suponemos que tenemos un clon del excursionista que el martes sale a las 9 de A hacia B, repitiendo el mismo camino con paradas, comidas, etc., que hizo el día anterior el excursionista original. El clon y el excursionista se van a encontrar en el camino. De hecho el problema puede ser formulado en términos de puntos fijos, los cuales juegan un papel central en ciertos problemas matemáticos; sobre los cuales hay una extensa literatura y de ello hablaremos más adelante.

Se puede dar otro argumento usando el teorema del valor intermedio.

Denotemos por $d_1(t)$, la distancia recorrida por el camino desde el punto A el lunes después de caminar un tiempo t, y por $d_2(t)$ la distancia del excursionista al coche después de un tiempo t; por supuesto que $t = 0$ corresponde a las 9 de la mañana.

Consideremos ahora la función $D(t) = d_1(t) - d_2(t)$. Se tiene que D es continua y $D(0) < 0$, ya que $d_1(0) = 0$ y $d_2(0)$ es la distancia de A a B por el camino; además t_0 es el tiempo que tarda el excursionista en llegar hasta el punto B. $D(t_0) > 0$ así que usando el teorema del valor intermedio se tiene que existe t' tal que $D(t') = 0$; es decir $d_1(t') = d_2(t')$. Esto quiere decir que el excursionista efectivamente estaba en el mismo punto a la misma hora del lunes y del martes.

Veamos ahora un teorema de punto fijo que se deriva del teorema del valor intermedio.

Teorema: Si f es una función continua del $[0, 1]$ en el mismo, entonces existe un punto c en $[0, 1]$ para el cual $f(c) = c$; es decir, c es fijo bajo la función f.

Demostración: Si $f(0) = 0$, o bien si $f(1) = 1$, tenemos un punto fijo y el teorema queda demostrado.

Supongamos entonces que $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$, y recordemos que el contradominio (o rango) de f es un subconjunto de $[0, 1]$.

Definimos $g(x) = f(x) - x$. Entonces $g(0) > 0$, mientras que $g(1) < 0$.

Así que por el teorema del valor intermedio hay una c en $[0, 1]$ donde $g(c) = 0$; así que $f(c) - c = 0$, y de ahí c es un punto fijo.

Este teorema se puede generalizar a un espacio de n dimensiones y así obtener el llamado *teorema del punto fijo de Brouwer*.

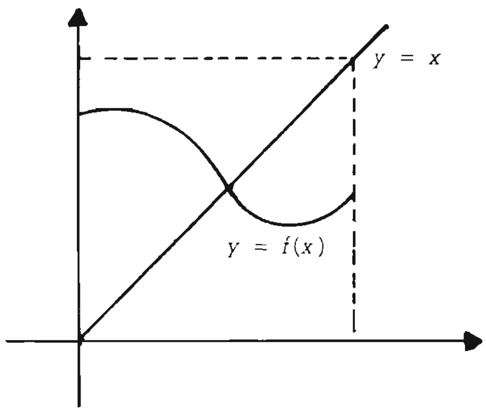

Figura 6 En algún punto la gráfica de f tiene que cortar a la recta $y = x$.

Una bonita prueba de este teorema se puede encontrar en el artículo de Milnor. (véase la Bibliografía) (Fig. 6).

4. *Cubiertas universales:*

Veamos primero qué se entiende por diámetro de un conjunto cerrado y acotado A. Si denotamos por $d(x, y)$ a la distancia entre los puntos x, y, el diámetro de A es el máximo de todas las distancias $d(x, y)$, con x, y en A; es decir que el diámetro de A = máx $\{d(x, y): x, y \text{ en } A\}$.

Un conjunto de diámetro 1 en el plano se puede colocar dentro o en un cuadrado de lado 1, o ser tapado completamente por el cuadrado de lado 1. En el libro de Lay (véase la Bibliografía) se encuentra una demostración de este hecho. Aquí nos haremos la pregunta de qué tan grande tiene que ser un círculo para que cubra o tape a cualquier conjunto de diámetro 1. La respuesta sorprendente es que no es 1, sino que tiene que ser mayor que 1: es de radio $2/\sqrt{3}$.

Observemos que el triángulo equilátero de diámetro 1 está inscrito en un círculo de ese radio, como se puede ver en la Fig. 7.

Aquí probaremos usando el teorema del valor intermedio que cualquier conjunto de diámetro 1 se puede cubrir o tapar con un hexágono de lado $1/\sqrt{3}$, y como éste se puede cubrir con un círculo de radio $1/\sqrt{3}$ tendremos que cualquier conjunto de diámetro 1 se puede cubrir con un círculo de diámetro $2/\sqrt{3}$.

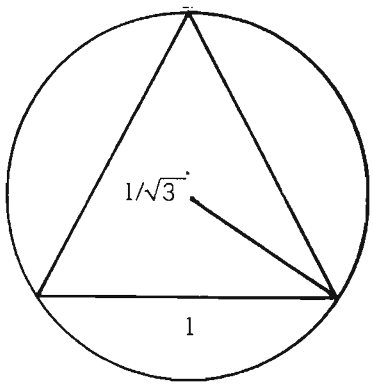

Figura 7

Es fácil ver que para tapar un círculo de radio uno es necesario un hexágono de lado $1/\sqrt{3}$, así que uno de lado menor no puede ser cubierta universal de conjuntos de diámetro 1. Para verificar que ese hexágono es suficientemente grande, consideremos un conjunto S de diámetro 1.

Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas tangentes a S y que formen un ángulo de $\pi/3$; ℓ_1' y ℓ_2' son rectas paralelas y a una unidad de ℓ_1 y ℓ_2, respectivamente. Entonces S está contenido en el rombo $ABCD$, donde A, B, C y D son los puntos de intersección de las rectas ℓ_1 con ℓ_2, etc. (Fig. 8).

Tracemos ahora una recta tangente EF a S, y que AEF forme un triángulo equilátero. Lo mismo hacemos con GH. Ahora S está dentro de un hexágono $BGHDEF$, y la distancia entre EF y HG es a lo más 1.

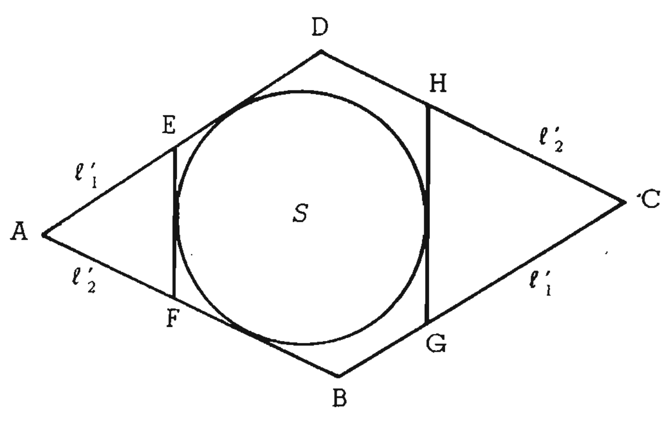

Figura 8

Si EF y HG son dos segmentos iguales y están a una distancia 1, entonces el hexágono resulta ser regular. Así que si EF y HG no están a distancia 1 basta recorrerlos de tal forma que sigan siendo iguales y que se encuentren a la distancia 1. Si los dos segmentos EF y HG no son iguales se puede girar la figura respecto a S, manteniendo ℓ_1 y ℓ_2 tangentes a S. Después de un giro de 180°, los segmentos EF y HG cambian de lugar, y así si HG era mayor que EF en $\theta = 0$, lo inverso sucede para $\theta = \pi$. Por el teorema del valor intermedio los dos segmentos tendrán la misma longitud para algún ángulo θ en $[0, \pi]$.

5. *Propiedades de funciones continuas periódicas:*

Las funciones periódicas son parte importante de nuestra vida. Sus gráficas pueden ser las bien conocidas de seno o coseno, o bien curvas más complicadas como las que un médico examina en un electrocardiograma. La siguiente curva (Fig. 9) es la gráfica de $y = \text{sen } x \cos 2x + \text{sen } 4x$.

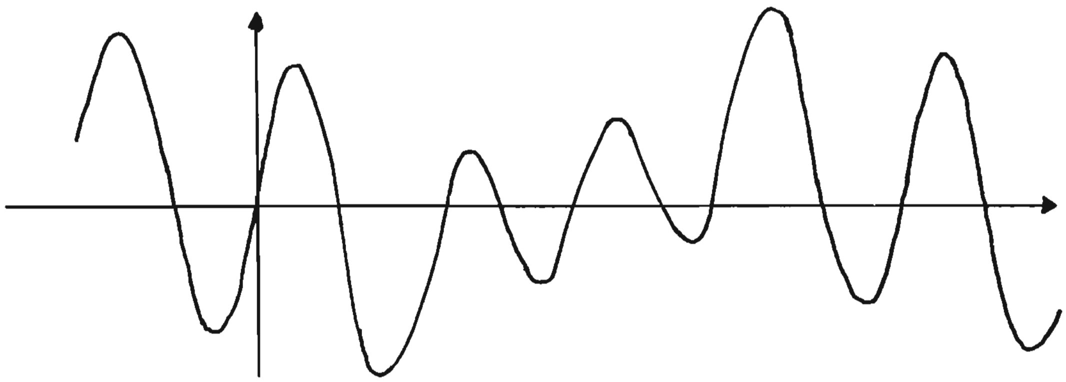

Figura 9

Independientemente de qué tan "complicada" sea la gráfica de una función periódica, siempre hay ciertas propiedades garantizadas. Por ejemplo, si se corta una porción de la gráfica de cualquier tamaño, ese fragmento siempre coincidirá con algún otro simplemente trasladándolo. El siguiente teorema es una propiedad importante y muy curiosa de las funciones continuas periódicas.

Teorema: Si f es una función continua periódica, con periodo p y L es una longitud cualquiera, entonces existe un segmento horizontal de longitud L cuyos extremos están en la gráfica de f.

Para probar esto utilizaremos integrales. Primero observemos que si tenemos una función periódica, la integral de f en cualquier intervalo de longitud p, el periodo, es la misma; es decir,

$$\int_0^p f(x)\,dx = \int_a^{a+p} f(x)\,dx$$

lo cual podemos reescribir como

$$\int_0^p f(x)\,dx = \int_0^p [f(x + L)]\,dx$$

De donde

$$\int_0^p [f(x) - f(x + L)]\,dx = 0$$

Aquí se considera que f es continua; es decir, que el integrando es continuo. De ahí que es idénticamente cero, o bien al ser la integral igual a 0, se tiene que $f(x) - f(x + L)$ es positivo en cierto lugar, y $f(x) - f(x + L)$ es negativo en otro. Así que aplicando el teorema del valor intermedio se tiene que existe $x_0 \in [0, p]$, tal que $f(x_0) = f(x_0 + L)$ para una cierta L. Así que el segmento que se busca es el que une $\theta(x_0, f(x_0)$ y $(x_0 + L, f(x_0 + L)$ en la gráfica de f. Con lo cual terminamos la demostración.

Estas ideas pueden ser utilizadas para obtener más información acerca de la gráfica de f.

Por ejemplo:

$$\int_0^p [f(x) + f(x + 2L) - 2\,f(x + L)]\,dx = 0$$

Así que para alguna $x_0 \in [0, p]$ se tiene que

$$f(x_0) + f(x_0 + 2L) - 2\,f(x_0 + L) = 0$$

Es decir,

$$f(x_0 + L) = \frac{1}{2}[f(x_0) + f(x_0 + 2L)].$$

De manera que el segmento que va de $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0 + 2L, f(x_0 + 2L)]$ tiene por punto medio a $[x_0 + L, f(x_0 + L)]$.

Así que dada una función periódica y continua, y un segmento de cualquier longitud, éste se puede colocar con sus extremos y el punto medio en la gráfica de la función (tal vez no sea horizontal).

En general, si $L_1 < L_2 < \ldots < L_n$ son n números, entonces para alguna $x_0 \in [0, p]$ se tiene que $f(x_0 + L_1) + \ldots + f(x_0 + L_n) = n \cdot f(x_0)$. Interpretando gráficamente este resultado se traduce como que el valor de f en x_0 es el promedio de los valores de f en

$$x_0 + L_1 m x_0 + L_2, \ldots, x_0 + L_n$$

Esto parece realmente increíble.

Se puede obtener un poco más de información mediante el siguiente teorema:

Teorema: Si f es periódica y diferenciable en $[a, b]$ y η es un número entre $f'(a)$ y $f'(b)$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f'(c) = \eta$. En otras palabras una función f' que es la derivada de otra función periódica f en $[a, b]$, también tiene la propiedad del valor intermedio a pesar de que podría no ser continua.

Es claro que si la derivada de una función periódica existe, ésta es también periódica con el mismo periodo p. Supongamos que f tiene periodo p y que

f' existe y es integrable. Así que todos los argumentos anteriores se pueden aplicar para obtener los siguientes resultados:

(a) Dada $L > 0$, existe x_0 tal que la pendiente de la curva en $[x_0, f(x_0)]$ es la misma que en $[x_0, f(x_0 + L)]$.

(b) Dada $L > 0$, existe x_0 tal que la pendiente de la curva en $(x_0, f(x_0)$ es el promedio de las pendientes en $[x_0, f(x_0 - L)]$ y $[x_0, f(x_0 + L)]$.

(c) Dadas $L_1 < L_2 < \ldots < L_n$ para alguna x_0, entonces

$$f'(x_0) = \frac{1}{n}[f'(x_0 + L_1) + f'(x_0 + L_2) + \ldots + f'(x_0 + L_n)]$$

Antes de finalizar vale la pena considerar una demostración del teorema de Bolzano o teorema del *valor intermedio*.

5. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA

Sea f: $[a, b] \to \mathscr{R}$ una función continua para toda x en $[a, b]$. Sea $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, y supongamos que $\alpha \neq \beta$. Sea γ un número entre α y β. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = \gamma$.

La prueba del teorema aplica directamente el axioma del supremo que recordamos a continuación:

Axioma del supremo:

Un subconjunto no vacío de números reales acotado por arriba tiene un supremo (cota superior mínima).

Ahora estamos listos para llevar a cabo la demostración anunciada. Para esto definimos al conjunto $S = \{x: a \leq x \leq b \text{ y } f(x) < \gamma\}$.

El conjunto S es no vacío, ya que a es un elemento de S; además es acotado por arriba, ya que b es una cota superior de S. Por lo tanto, por el axioma del supremo, existe una cota superior mínima que denotaremos por c.

El número c es el mínimo con la propiedad: Si $f(x) < \gamma$ entonces $x \leq c$. Claramente $a \leq c$ (ya que a está en S), y $c \leq b$ (ya que b es una cota superior de S).

Se tiene por la tricotomía de los números reales tres posibilidades.

$$f(c) < \gamma, \ f(c) \geq \gamma, \text{ o bien } f(c) = \gamma$$

Veremos que los dos primeros casos nos llevan a una contradicción, y por lo tanto, se tiene que cumplir $f(c) = \gamma$, con lo que queda demostrado el teorema.

Por comodidad vamos a tomar $\alpha < \beta$.

Supóngase que $f(c) < \gamma$. Entonces $f(c) < \beta$; así que $c \neq b$ y $c < b$. Como f es continua en c se tiene que $f(x) < \gamma$, para x cercana a c. De modo que hay puntos a la derecha de c tales que f es menor que γ. De este modo, esos puntos pertenecen a S. Como c es una cota superior de S, tales puntos no pueden estar a la derecha de c. Esto es una contradicción.

Supongamos ahora que $f(c) > \gamma$. Entonces $f(c) > \alpha$, así que $c \neq a$ y $c > a$. Como f es continua en c se tiene que $f(x) > \gamma$, para x cercana a c. Esto quiere decir que hay un número c, tal que $a < c_1 < c$ y $f(x) > \gamma$ para todo $c_1 < x < c$. No hay puntos de S a la derecha de c, pues c es el supremo. Además como todos los puntos entre c_1 y c cumplen con $f(x) > \gamma$, no hay puntos de S a la derecha de c_1. Así que c_1 es una cota superior menor que c, lo cual es una contradicción.

6. CONCLUSIONES

Nuestra intuición geométrica es una guía esencial, pero desafortunadamente no es infalible. Hay proposiciones que resultan geométricamente obvias pero que son falsas.

La demostración no reemplaza en ningún sentido; nuestra intuición, sin embargo, la refuerza. Sólo nuestra intuición e imaginación, aplicadas a casos particulares, pueden sugerir teoremas generales. Únicamente una demostración rigurosa asegura que no vamos por un camino equivocado.

El teorema de Bolzano, o del valor intermedio, resulta ser un teorema importante, considerando a lo que es equivalente, y sobre todo, al sinnúmero de aplicaciones de las cuales aquí sólo hemos dado algunas. Hay que darle su real valía al "obvio" teorema de Bolzano, y no dejar que pase inadvertido.

BIBLIOGRAFÍA

Arizmendi, Hugo, et al. *Cálculo*. Addison Wesley-Iberoamérica, 1987.

Bers, Lipman. *Calculus*. Holt Rinehart & Wiston Inc., 1967.

Bolzano, Bernard. *Las paradojas del infinito*. Mathema-Edición en español, 1991.

Bosch, Carlos. *"El que parte y reparte se queda con la mejor parte"*. *Ciencias*, No. 25, enero 1992, pp. 29-23.

Bosch, Carlos, et al. *Cálculo diferencial e integral*. Publicaciones Cultural, 1987.

Ellis, Robert; Gulich, Dennis. *Calculus*. Harcourt Brace Jovanovich, 1986.

Larson, R.; Hostetler R. *Cálculo y geometría analítica*. McGraw-Hill, 1989.

Lay, S. *Convex sets and their applications*. John Wiley and Sons, 1982.

McAloom K., Trombo A. *Cálculo*. Publicaciones Cultural, 1978.

Milnor, J.L. *Analytic proofs of the hairy ball theorem and the brouwer fixed-point theorem*. Am. Math. Monthly, 85, 1978, 521-524.

Purcell, E.; Varberg, D. *Cálculo con geometría analítica*. Prentice-Hall, 1987.

Robertson, J. *The intermediate value theorem*. Math. Notes W.S.U. Vol. 29, No. 3-4, Nov. 1986.

Tabachnikov, S.L. *Considerations of continuity*. Quantum, May 1990, 8-12.

Xun-Cheng Huang. *From intermediate value theorema to chaos*. Math. Magazine, Vol. 65, No. 2, April, 1992.