

## Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación

Leonora Díaz\*

### RESUMEN

El artículo reporta hallazgos que se inscriben en el Programa del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Presenta modos de pensar que los estudiantes ponen en juego a la hora de abordar el estudio de la variación. Estas evidencias se obtienen como parte de los resultados de una investigación en curso, que aborda la pregunta por aquellas facetas tanto congruentes como contradictorias de las representaciones cotidianas de variación y aquellas de las matemáticas, que favorecen u obstaculizan los aprendizajes tendientes a la formación de un pensamiento variacional en el estudiantado. En su primera parte presenta un medio de recolección de textualidades estudiantiles – las bitácoras de reflexión- y otro para analizar esos discursos - identificación de metáforas. Enseguida describe una episteme visual de variación; representaciones del tiempo; y, una metáfora didáctica para lo inverso.

**PALABRAS CLAVE:** Variación; Tiempo; Entendimientos Estudiantiles

*Deepening in the student understandings of variation*

### ABSTRACT

The paper reports findings that are included in the Program of the Variational Thought and Language. It presents ways to think that the students put in play at the moment of to undertake the study of the variation. These evidences are obtained as a part of the results of a research in process, which undertakes the question of the routine representations of variation and mathematical representations that favor or obstruct the learning tending toward the formation of a variational thought in the students. In the first part a way to collect texts of the students is presented – the binnacles of reflection – and another to analyze those speeches – metaphors identification. Next a visual episteme of variation is described; representations of the time; and, a didactic metaphor for the inverse.

**KEYWORDS:** Variation; Time; Student Understandings

### RESUMO:

O artigo reporta descobertas que se inscrevem no Programa do Pensamento e Linguagem Variacional. Apresenta modos de pensar que os estudantes põem em jogo na hora de abordar o estudo de variação. Estas evidências se obtêm como parte dos resultados de uma investigação em curso, que aborda a pergunta por aquelas facetas tanto congruentes como contraditória das

*Fecha de recepción: Febrero de 2005 /Fecha de aceptación: Mayo de 2005*

\* Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Chile

representações cotidianas de variações e aquelas da matemática que favorecem ou obstaculizam os aprendizados tendentes a formação de um pensamento variacional no estudados. Na sua primeira parte apresenta um meio de correlação de textualidades estudantis - as bitáculas de reflexão - e outro para analisar esses discursos – identificação metafóricas. A seguir descreve-se uma episteme visual de variação; representação do tempo; e, uma metáfora didática para o inverso.

**PALAVRAS CHAVES:** Variação, Tempo, Entendimento Estudantil.

## **En approfondissant les entendements variationnels Des étudiants**

### **RÉSUMÉ**

L'article fait un rapport sur les découvertes qui s'inscrivent dans le Programme de la Pensée et du Langage Variationnel. Il présente des modes de pensée que les étudiants mettent en jeu à l'heure d'aborder l'étude de la variation. Ces évidences sont obtenues à partir des résultats d'une investigation en cours, qui aborde la question aussi bien par les facettes congruentes que contradictoires des représentations de variation quotidiennes et celles des mathématiques, qui favorisent ou sont un obstacle aux apprentissages tendant à la formation d'une pensée variationnelle dans le milieu étudiant. Dans la première partie, cet article présente un moyen de compilation de textes pour les étudiants -les livres de réflexion- et un autre servant à analyser ces discours - identification de métaphores. Il décrit ensuite l'épistémé visuel de variation ; les représentations du temps ; et une métaphore didactique pour tout ce qui est contraire.

**MOTS CLÉS :** variation, temps, entendements des étudiants

### **Introducción**

Los hallazgos que se presentan a continuación se inscriben en el Programa del Pensamiento y Lenguaje Variacional liderado por Cantoral (2004) quien sostiene que el “*pensamiento y lenguaje variacional* estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida, pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados, utilizando para ello diferentes estructuras y lenguajes variacionales” (op.cit, p1). En este artículo se presentan facetas de epistemes<sup>1</sup> –o modos de pensar de los estudiantes- en juego a la hora de abordar los

---

<sup>1</sup> Para Foucault el concepto de *episteme* refiere al pensamiento de una época que gira en torno de determinadas posibilidades que articulan aquello que será definido como Lo Pensable, aquella configuración subterránea que produce, al mismo tiempo que sus problemas, un entramado del saber que hace posible todo discurso científico. Lo Impensado, por su parte, es toda una serie de imposibilidades de pensamiento determinadas por una episteme y que, tras la aparición de una nueva episteme, aparecen como posibilidades de pensamiento. A esta amplia variabilidad de posibilidades de pensamiento los llama Juegos De Verdad. Estos podrían tomar cuerpo dependiendo de las variaciones epistémicas. Esto implica

aprendizajes de la variación. Estas evidencias de la naturaleza de los entendimientos de la variación, son hallazgos asociados a una investigación en curso que tiene como propósito determinar la estructura y contrastar las representaciones de la variación tanto cotidianas como aquellas de las que se apropian los estudiantes y las estudiantes en la escuela. La investigación aborda la pregunta por aquellas facetas tanto congruentes como contradictorias de las representaciones cotidianas de variación y aquellas de las matemáticas, que favorecen u obstaculizan los aprendizajes tendientes a la formación de un pensamiento variacional en los estudiantes y las estudiantes. A partir de ese conocimiento, el estudio se propone posteriormente validar secuencias didácticas que contemplen a la variación como una temática transversal que pueda imbricar distintos contenidos matemáticos escolares.

Entendemos a las matemáticas como una actividad humana en donde cobra vital importancia la persona haciendo matemáticas y no sólo el producto matemático. Desde esta mirada, resulta relevante considerar -en la praxis educativa- las negociaciones y búsqueda de consenso entrelazadas éstas con las acciones cognitivas de los estudiantes al momento de enfrentarse a la resolución de un problema, pasando por etapas de acción, formulación y validación (Brousseau, 1987) de sus construcciones de estrategias y conocimientos matemáticos. En términos de Candela (1999) el conocimiento científico es una construcción social que está sujeta a ciertos procesos discursivos específicos, que incluyen tanto las versiones sobre ciertos temas como la organización del discurso, las manera de hablar, de argumentar, de analizar, de observar, de construir con palabras el resultado de la experiencia, de validar un conocimiento y de establecer una verdad. Asimismo, atendiendo a lo que afirma Freudenthal (citado por Garrido, M., et al., 2004) “nuestros conceptos, estructuras e ideas matemáticas han sido inventados como herramientas para organizar los fenómenos del mundo físico, social y mental” y a lo señalado por Cantoral (2004) - en relación a aquellas matemáticas elaboradas para manipular con el cambio, permitiendo predecir y controlar estados futuros - cobra especial importancia incorporar a los estudiantes a espacios de experimentación que favorezcan la construcción de unas “matemáticas vivas” y, al mismo tiempo, que tengan una experiencia de primera mano sobre la complejidad puesta en juego en su actividad, en situación escolar, a fin de reconocer y valorar el uso de herramientas matemáticas que traen a escena en sus elaboraciones personales y a la vez en aquellas del trabajo colectivo, enfrentados a comunicar sus hallazgos en ambientes interactivos de aula.

Adscribimos a la noción de representación para estudiar el pensamiento variacional, lo que implica asumir que la realidad, tal y como es, resulta parcialmente determinada por la realidad tal y como es para cada individuo; esto es, la realidad es concebida como el producto de la construcción que subjetivamente hace el individuo de la misma. A su vez, la realidad construida socialmente pasa a tener una cierta "materialidad" o existencia objetiva. Para efectos de este trabajo concebimos episteme como los modos de entender el mundo, a sí mismo y a los otros portados por la persona. Buscamos desentrañar, en el marco de esa complejidad, coherencias de entendimientos intra e interpersonales desde las cuales el estudiantado experimenta y da sentido a nociones variacionales.

### **Medios empleados para identificar epistemes estudiantiles**

**La bitácora como medio de acopio de discursos estudiantiles.** Los medios para la obtención de evidencias han privilegiado la recolección de elaboraciones estudiantiles en distintos registros: oral, escrito, icónico, gráfico; y, distintos instrumentos: entrevista, cuestionario y bitácora. Este último, la bitácora de reflexiones, se mostró particularmente útil para seguir el

---

la posibilidad de abrir una serie infinita de posibilidades subjetivas, teniendo la humanidad la responsabilidad de su construcción (Díaz, 2003).

proceso de construcción de redes de significados estudiantiles en torno a la variación. El estudio de esas producciones fue mostrando al equipo de investigación la importancia y el rol de las narrativas para la vida de las personas, estudiantes, profesores e investigadores de un modo particular. En efecto, como plantean Connelly y Clandinin (1995) en su mirada a la investigación narrativa, somos las conversaciones que establecemos, somos organismos contadores de historias. La narratividad es una condición natural de nuestra experiencia: los relatos nos descubren que la experiencia misma tiene un referente que está hecho de relatos. Los relatos se refieren a la experiencia y la experiencia se refiere a los relatos. Una experiencia presente se vuelve signo de ella misma, signo del relato que será luego.

Las obras de Kieran Egan (1998) y James Wertsch (1991) han difundido la importancia de la narración en el campo de la pedagogía y de la didáctica, en el mundo de habla hispana. Egan ha insistido en la revalorización del papel de los relatos en la educación desde tres perspectivas: la enseñanza, el aprendizaje y la investigación. Egan comparte con Bruner (1988) que la narración es un recurso que posibilita captar y pensar el mundo y la propia experiencia. Los aportes de Egan destacan a la narración como un medio eficaz que al mismo tiempo que ayuda a recordar y que a la vez proporciona un ambiente cómodo y acogedor para la fantasía y la imaginación. Por su parte, Wertsch insiste en el valor de la narratividad como herramienta central para comprender la forma en que los estudiantes se representan un número muy importante de contenidos escolares. En general, la indagación con estudios narrativos nos permite describir y representar las relaciones humanas y la interacción inherente en los actos complejos de la enseñanza y el aprendizaje, para validar sus múltiples realidades y dimensiones.

El estudio de la narrativa, es el estudio de las formas en que la persona experimenta y se representa el mundo, es decir, sus epistemes. Para Teun van Dijk (1995), la primera característica fundamental del texto narrativo consiste en que este texto se refiere ante todo a acciones de personas, de manera que las descripciones de circunstancias, objetos u otros sucesos quedan claramente subordinadas a tales acciones. Esta característica semántica de un texto narrativo se une a otra de orden pragmático –expresión asimismo del modo económico de operar de nuestro cerebro-: por regla general, un hablante sólo explicará unos sucesos o acciones que en cierta manera sean interesantes. Este criterio hay que considerarlo de modo relativo y de acuerdo a cada contexto; sin embargo, presupone que únicamente se explican el suceso o las acciones que hasta cierto punto se desvían de una norma, de expectativas o costumbres, generando una suerte de “ruido” o “alerta” en la persona. No se narra una historia sobre el desayuno, la redacción de una carta o el abrir una puerta si con ello no va ligado algo especial. En otras palabras: un texto narrativo debe poseer de referentes, como mínimo, un suceso o una acción que cumplan con un criterio del interés. Mumby (2002) en tanto, ve la narrativa como parte de un terreno complejo y cambiante, constituyendo el sentido del mundo social, cuyos conflictos son puestos en escena por la narrativa misma, como parte constituyente de ese terreno complejo y cambiante. Tendremos entonces que el corpus de una narrativa cristaliza sucesos que se desvían de lo esperado, encerrando disrupciones en el devenir cotidiano, que por ello ameritan del análisis y búsqueda de alternativas, ya sea para incorporar esa dinámica y sus significaciones en el fluir usual-consciente de la vida de la persona o para modificar aquello que se revele concomitante a un mal-estar o un nuevo-estar de la persona. Para nuestros fines, se corresponde con un mal-entender o con un nuevo entender del estudiante. En suma, una narración nos trae a la mano un “evento especial” en el devenir de los procesos de entendimiento del estudiantado.

Entre los trabajos sobre la naturaleza del conocimiento narrativo más sugerentes de las últimas décadas, nuestro equipo de investigación se ha interesado en los estudios desde una mirada filosófica de Johnson (1981, 1987, 1993) sobre el lenguaje y el conocimiento corporalmente encarnado; el trabajo de Lakoff y Johnson (1980) sobre la metáfora; y, de

especial interés por corresponder al campo de la matemática, el texto “Where mathematics comes from” de Lakoff y Núñez (2000) sobre la naturaleza encarnada del conocimiento matemático. Estos trabajos, entre otros, ilustran un contexto signado por importantes desarrollos en el campo del lenguaje y las neurociencias<sup>2</sup>. Abordamos los análisis de las producciones estudiantiles recogidas en la investigación, incorporando estos elementos a nuestra “sensibilidad teórica”, soportada por el programa del Pensamiento y Lenguaje Variacional.

**Las bitácoras: narraciones de “eventos especiales”.** En sus prácticas docentes, nuestro equipo de investigadores configura a las bitácoras como reflexiones escritas periódicas que los estudiantes elaboran acerca de su comprensión de las temáticas que se tratan en un curso. Estas pueden incluir opiniones y emociones, resultando una narración que ilustra sus procesos, aquello que entienden, cómo lo llegaron a entender, lo que es aún oscuro, las angustias, los aciertos, las dudas (Ávila, 2004; Díaz, 2000). Ellas cristalizan sus representaciones sobre lo que trató el aula y los modos en que las fueron construyendo, es decir, sus modos de representarse y experimentar los saberes que se ponen en escena en el aula. Nos cuentan en sus bitácoras esos “eventos especiales” -o hitos- en torno a los cuales van articulando las significaciones de las que se están apropiando. Cada estudiante está viviendo esos eventos en un continuo experiencial y, al mismo tiempo, los está registrando con palabras, metáforas e íconos, entre otros recursos, mientras reflexiona sus vivencias y las explica al docente por medio de este documento escrito que constituyen las bitácoras. En suma, vive, explica, re-explica y revive esos eventos especiales, prolongando, por estos medios, sus procesos de aprendizaje. Estas pequeñas historias constituyen suerte de “lingotes de tiempo y espacio”, las que exhiben sentido y trama, dando estructura explicativa a una conexión de hechos y datos puestos en la escena del aula por la enseñanza: textualidades del pizarrón, oralidades, contenidos y prácticas presentadas por un texto guía o de consulta del estudiantado, entre otros.

Ilustración de una pequeña historia

*“Cuando comenzamos el trabajo debo admitir que me desconcertó (...) no lograba entender que era lo que el profesor quería de ellas (las bitácoras).*

*Con el tiempo fui comprendiendo (...) cuando comenzaba a explicar lo que había logrado entender, según yo bien, comenzaban a aparecer los primeros signos de inseguridad sobre lo que sabía y si realmente estaba correcto.*

*Fue en ese momento cuando pensé que ese era el real sentido de realizar dichos trabajos, comprender cuáles son mis fortalezas y debilidades en relación a los temas abordados, no solo en cada bitácora sino en conjunto, como un todo, es preciso decir que esta reflexión no aflora de una bitácora para otra sino mas bien fue un proceso gradual que aun no termina.”*

[Narración citada en Ávila (2005)]

La estudiante narra una trama que transcurre en un período de tiempo. Éste va desde que comienza su trabajo de bitácora solicitado por el docente, marcado por el desconcierto ante la

---

<sup>2</sup> Señala por ejemplo Varela (2002) uno de los principales exponentes de los nuevos desarrollos del campo de las neurociencias, respecto de la centralidad del interjuego de coherencias intra e interpersonales de esas nuevas visiones: “los nuevos descubrimientos de la neurología gravitan poderosamente sobre nuestra comprensión de la objetividad. Creíamos en un mundo que está ahí objetivamente para que lo investiguemos. Cualquier duda significaría para muchos el fin de la ciencia (...) no hay razón alguna para abandonar la investigación de un mundo que se presenta igualmente ordenado e interdependiente, pero al que no le imponemos la condición de ser inmutable, estable, independiente (...) Para muchos, una crítica a la objetividad significa forzosamente una defensa del subjetivismo, pero esto es absurdo. Propongo una perspectiva que no afirma ni una cosa ni la otra. Naturalmente, reconozco que debe haber un ordenamiento del mundo. Pero con ello no digo ni remotamente que éste es algo estable, inmutable, independiente, porque no lo puedo (ni debo) separar de mis acciones, de toda mi historia como especie y como sistema biológico. (...) en cuanto (las personas) satisfagan las exigencias mínimas para establecer contacto con el mundo externo, el modo y la forma en que los individuos se comportarán en su entorno, será la expresión de su propia coherencia interna”.

consigna, hasta que entiende “lo que el profesor quería de ellas”. En tanto que va registrando sus explicaciones en varias bitácoras, va identificando sus dudas e inseguridades. En el devenir de su proceso de registro, encuentra significado a la tarea solicitada, superando de ese modo la emoción de desconcierto, que da inicio al relato.

|                |   |
|----------------|---|
| Sujeto:        | La estudiante narradora;  |
| Acciones:      | Registros en términos de la consigna de la bitácora;  |
| Intención:     | Llevar a cabo la tarea pedida;  |
| Consecuencias: | Una estudiante que supera su desconcierto inicial a la vez que comprende el sentido didáctico de las bitácoras. |

En términos generales, trama y escenario estructuran la narrativa (Ricoeur, P.; 1987). El tiempo y el espacio se convierten en construcciones escritas en forma de trama y escenario respectivamente, los que trabajan juntos para crear la cualidad experiencial de la narrativa. El escenario lo componen personajes, ambientes físicos y contextos. La trama es un hilo conductor con comienzo, desarrollo y final. Es una estructura temporal - en “tic-tac” - del evento crítico, del proceso de entendimiento en desarrollo que el estudiantado decide relatar al docente. Dada la naturaleza de diálogo en primera instancia intrapersonal de los registros estudiantiles - quedando en un segundo plano el diálogo estudiante-docente -, se constituye, en el caso de este curso, un escenario externo distinto para cada pequeña historia, en una diversidad de escenarios -objetivos y subjetivos- sobre los cuales cada estudiante construye sus tramas. Todas esas pequeñas historias, tienen como contexto común el marco del curso lectivo en el que se están narrando. Los personajes involucrados, en ese marco narrativo, fueron el estudiantado formándose como futuros profesores de matemáticas y el docente-investigador, en el ambiente físico del aula y en los espacios de estudio estudiantiles. Como contexto mayor, identificamos a los discursos curriculares en juego en la enseñanza de ese curso de Cálculo I, en un espacio-tiempo determinado. Para una descripción con más detalles ver Ávila (2005).

### **Presencia de las metáforas en los análisis de discursos**

**Las metáforas: ladrillos a la base de las pequeñas historias de las bitácoras.** Las metáforas constituyen un proceso fundamental del lenguaje y el conocimiento, nos señalan investigadores en lenguaje y cognición (Johnson: 1981, 1987, 1993; Lakoff y Johnson: 1980; Lakoff y Núñez, 2000; Cornejo: 2004). Son metáforas expresiones como las siguientes: “*Los argentinos cortaron el gas*”, “*Se dijo hasta el cansancio*”, “*La economía avanza*”, “*Es una persona cálida*”. Como explica Cornejo (2004), no son menos frecuentes que las expresiones de uso literal, no obstante que ninguna expresión es literal en sí misma. En efecto, la semántica del aserto: “*Todos los hombres son animales*” estará sujeto a los contextos de uso. Imaginemos que se enuncia en el contexto de una clase de biología y que la emite también una novia enojada. Las metáforas están presentes desde las primeras expresiones holistas y enraizadas en la acción del niño: “*Los ríos son como serpientes*”. En su desarrollo, este niño las expone a una creciente descontextualización. En último término, las metáforas están ancladas en un sustrato de experiencia corporal: “*Es una persona fría*” (las emociones son calor). Afirmación clave, la precedente, de los planteamientos de Johnson, que luego retoma Núñez, ingeniero y especialista en ciencias cognitivas, en su tesis doctoral en la que acuña y da sustento a la expresión de las matemáticas “encarnadas” o “corporizadas”.

**Sobre la naturaleza de la metáfora.** Relaciona significados “vivos”, inestables y dinámicos. No es una relación entre dos cosas predefinidas. Se construye exactamente en el momento (microgenético) en el cual las palabras usadas son yuxtapuestas. Es espontánea. Vincula lo previo y lo nuevo. Se construye gramaticalmente por medio de la yuxtaposición de conceptos: “El profesor es un océano/ un árbol/ un auto /una estrella/ un clip/ un ladrillo...”, insinuando características del sujeto u objeto. Genera nuevos sentidos influidos por las claves no lingüísticas de los contextos de uso, de los gestos así como adicionando a la

yuxtaposición inicial de conceptos, una dirección de sentidos en la cual el dominio conceptual de origen, la carga semántica de la frase “el océano” del ejemplo, aporta sentidos y significados al dominio de significados de la frase “el profesor”, pudiendo significar, por ejemplo, al profesor como una persona que porta un océano de conocimientos (Cornejo, 2004). En otra ilustración visualizamos cómo las metáforas incorporan o trasladan una carga semántica no intencionada al dominio objetivo - lo nuevo - desde su dominio base - lo previo - En efecto, al utilizar la metáfora “el tiempo es oro” para dar a entender que el tiempo es valioso, se trasladan con esa yuxtaposición, cargas semánticas del oro adicionales a lo que se desea explicar, tales como su escasez, un alto precio o avaricia entre otros aspectos. La interacción cotidiana recurre a menudo a esta forma de comunicación de significados por lo que un hablante “crítico” hará bien en develar esas cargas semánticas asociadas que no interpretan sus dichos, alertando de ello a su interlocutor, si el contexto es pertinente.

Se relevaron las nociones de las metáforas corporales y las metáforas conceptuales como herramientas útiles para el análisis de las prácticas sociales vinculadas a la elaboración de saberes variacionales, en el marco socio-epistemológico de la investigación que atiende aspectos didácticos, cognitivos, histórico-epistemológicos y socioculturales.

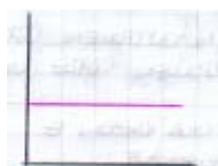
### Resultados del estudio en su primera etapa

Para profundizar en el conocimiento de las representaciones socioculturales, invisibles por ahora a nuestros ojos, buscamos respuesta a la pregunta ¿Cuáles son los modos de pensar y las maneras de operar con la variación<sup>3</sup> en la cultura del estudiantado? En el marco del análisis preliminar realizado, en este escrito se presentan las metáforas de naturaleza icónico-gráfico-visual por medio de las cuales dan significado a nociones del tipo “complejo pseudo concepto” asociadas a contenidos de variación que presenta el aula; las representaciones del tiempo entretejidas con la variación exhibidas por estudiantes de dos grupos etarios consecutivos y aquella elaborada por la matemática, en el conjunto de otras representaciones culturales de tiempo; y el significado de “reciprocidad” que emerge del estudio de las representaciones sociales para la variación proporcional inversa implícitas tanto en las tablillas de cálculo de los babilonios como en los cálculos del campesino medieval y del ecologista contemporáneo.

**Epistemología visual en la construcción de significados variacionales.** *Déjeme que le cuente profe...* Avila (2004)<sup>4</sup> ilustra la presencia de representaciones sociales icónicas a propósito de la textualidad de una estudiante:

*“Cuando el dibujo que se muestra en la gráfica es una recta su razón de cambio es constante, cuando en el dibujo se ve una recta que no tiene movimiento, o sea no varía. Su razón de cambio es cero.”*

[Extracto bitácora 3]



<sup>3</sup> El cálculo matemático trata del estudio y apropiación significativa de las matemáticas que operan con los fenómenos de variación, estudia la forma en que ellos cambian y cambian sus cambios y así, sucesivamente.

<sup>4</sup> Tesis de Maestría en el marco del proyecto: *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos.*

La estudiante se representa la variación por medio del dipolo “...no tiene movimiento, o sea no varía” implicando una cadena asociativa del tipo *no tiene movimiento* → *no varía* → *su razón de cambio es cero*. Dicha cadena asociativa la refiere a la variación de la gráfica en sí misma, dando una mirada global con ausencia de visibilidad de lo local: lo que se mueve o no se mueve es la recta. Pareciera que lo que varía o no varía ha de ser visto. Y “*se ve una recta que no tiene movimiento*” versus otra que sí lo tiene, a pesar de estar ambas estáticas en el plano. ¿Qué puede llevarle a hacer afirmaciones sobre la recta en una suerte de *Gestalt* que invisibiliza lo local? ¿Qué metáforas – icónicas, gráficas, visuales - subyacen? Dado el desarrollo e impacto de la comunicación visual hoy día, culturalmente podemos inferir asociando la horizontal con el ícono de una persona cuya cabeza, tronco y piernas están alineadas en esa posición, por lo que no se desplaza. Lo que varía o no varía es algo corpóreo que se desplaza o no en un espacio y su transferencia al registro visual se expresa en logos altamente estilizados y minimalistas en su expresión. La recta oblicua podría ser esa persona en la disposición corporal del movimiento. En su argumentación entonces presenta una concepción de “complejo pseudo concepto” generalizando el decir de Vygotsky: el complejo formado por una cadena que asocia lo gráfico-visual y los saberes del aula.

## Variación y epistemes de tiempo

**Epistemes culturales del tiempo.** En términos del diccionario de la Real Academia Española, tiempo es, en una primera acepción, *la duración de las cosas sujetas a mudanza*. A mudanza a su vez le asocia la acepción de *acción y efecto de mudar o mudarse*. Y respecto de mudar, *dar o tomar otro ser o naturaleza, otro estado, forma, lugar*. De este modo, tiempo y desplazamiento aparecen compartiendo significados en el diccionario de RAE. Por su parte, por duración entiende *tiempo que dura algo o que transcurre entre el comienzo y el fin de un proceso*, con lo cual nos devuelve a la voz primera de tiempo. Entonces culturalmente hablando, tiempo es una suerte de noción primitiva - algo análogo a la noción de punto en geometría euclídea - no derivada de otras que permitan definirlo y ligada simbióticamente desde un inicio a cambio, a movimiento.

En una segunda acepción, *tiempo* refiere a una magnitud física que permite ordenar la secuencia de los sucesos, estableciendo un pasado, un presente y un futuro (el número del movimiento en el análisis fisicista de Aristóteles). Su unidad en el Sistema Internacional es el segundo<sup>5</sup>. La humanidad para hacerse agraria necesitó una herramienta que le permitiera poner a las estaciones a favor de su subsistencia, sucesos cíclicos de la naturaleza constituidos por otros sucesos en su interior, días y noches e incluidos a su vez en otros mayores. Requirió conocer la duración de estos ciclos “externos” para “predecirlos” y entonces ponerlos al servicio de sus necesidades. En la medida que evolucionaban las necesidades de acción y coordinación humanas, el necesario acoplamiento de las demandas de seres gregarios con la naturaleza fue requiriendo más precisiones, por lo que fue construyendo las horas, los minutos, los segundos y los tiempos infinitesimales que usa hoy para el estudio de lo cuántico. Se trata del tiempo profano o “kronos”, en contraposición a un tiempo de lo sagrado o “kayros”. En las sociedades occidentales, sus ciudadanos parecen estar “a los pies” de kronos, experimentando su intensificación como estrés. Se habla hoy del uso racional del tiempo, por medio de las virtudes de la perseverancia y la tenacidad. Luego de presentar una breve historia de la medición del tiempo, en la que incluye la falla computacional del 2000, que pudo ser un desastre mundial, Vergara concluye: “*No es difícil darnos cuenta de lo poderoso, frágil, ambiguo, cuestionable y terrible que es el tiempo... bastante poder para algo que, a fin de cuentas, no existe*” (p. 32,

<sup>5</sup> Segundo definido por 9.192.631.770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de Cesio 133 (Vergara, 2004).

2004).

Los orígenes del sentido del tiempo se remontan a la etapa prebiológica, en la que ya existían procesos cíclicos, los ciclos de Morowitz (1968)<sup>6</sup> en el marco de un ambiente lleno de periodicidades (noche/día, verano/invierno, bajamar/pleamar, entre otros). Esos ciclos imprimieron, desde sus orígenes, conductas rítmicas a los organismos, y los seres que lograron adecuarse al ciclaje temporal tuvieron indudables ventajas evolutivas (Aréchiga, 1983 citado por Blanck y Cereijido, 1996). Un ciclo central a la vida es el ciclo del ácido cítrico (ver Anexo "El ciclo de la vida"). Según Morowitz, ya estaba presente en los organismos celulares más antiguos. Todas las rutas metabólicas comienzan en los compuestos del "ciclo de la vida": síntesis de azúcares, lípidos, aminoácidos, entre otros<sup>7</sup>. Nos interesa aquí, más que elementos y reacciones químicas en su detalle técnico, retener la forma cíclica de su fluir, arquitectura a la base del aparecer fenoménico de la persona. Señalan Blanck y Cereijido (op. cit.) que *"los organismos, desde las conductas periódicas de sus reacciones moleculares hasta el comportamiento de los unicelulares, y las integraciones multicelulares, están equipados con osciladores periódicos de frecuencias variadas, que se articulan y sincronizan con el medio para funcionar satisfactoriamente. Es como si nuestros relojes no sólo marcharan con energía solar sino que, además, la utilizaran para ponerse en hora. En conclusión: en el momento en que la naturaleza desarrolló al hombre, ya sabía cómo equiparlo con un mecanismo de relojería autosincronizable"*. Sobre la base de estas concepciones se busca detener ese oscilador periódico que gatilla la muerte celular o cierre del ciclo vital celular propios de la vejez. Entendemos, desde esta deriva de la vida, la necesidad de sintonizar eventos: los ritmos cíclicos propios con aquellos ritmos naturales cíclicos también, coordinaciones de eventos. La duración de un minuto coordinada a los 60 saltos de un segundero, una cosecha específica que se coordina con treinta ciclos día-noche. Eventos que ocurrirán con esta cadencia en tanto se mantengan unas condiciones de estabilidad sistémicas. Al desbordar estas condiciones ciertos umbrales específicos, surgirán, entonces, nuevas configuraciones, nuevas arquitecturas, constituyéndose ciclos nuevos, nuevas cadencias y ritmos...

**El tiempo psicológico.** El tiempo se puede detener o enlentecer en la experiencia de la psique humana. Cada uno de nosotros puede haber experimentado que el tiempo psicológico transcurre más lento si se está apurado. Repara Einstein: "La sensación *subjetiva* de un tiempo psicológico nos permite ordenar nuestras impresiones y decir que un evento precede a otro. Pero utilizar un reloj para conectar cada instante del tiempo con un número, o considerar el tiempo como un continuo unidimensional, es desde ya un capricho." Este audaz aserto para su época, alcanza plausibilidad en la interioridad de la experiencia de cada uno de nosotros. En efecto, la Teoría de la Relatividad preguntó: ¿Presente? ¿Qué presente? ¿El "ya" en Tokio o el "ya" en Santiago de Chile? Esto acabó con la posibilidad de existencia de *una* secuencia temporal objetiva y universal para todos los hechos que ocurren en el Universo (op. cit., 1996). Esta interpretación

---

<sup>6</sup> Para Morowitz, en la población de átomos y moléculas de la tierra pre-biológica, el flujo de energía solar significó ganancias organizativas a los mismos, dando origen a un enorme metabolismo prebiótico. En efecto, al absorber la radiación solar, los electrones de los átomos de la tierra se excitan y saltan a las órbitas más externas, pero en seguida (unos cienmillonésimos de segundo más tarde) vuelven a sus órbitas primitivas, eliminando el exceso de energía que les había causado la transición. Mientras están excitados, los átomos son sumamente reactivos y pueden combinarse con otros átomos formando moléculas. Más tarde, los electrones de los átomos que ya están formando una molécula pueden volver a absorber energía y excitarse, pudiendo hacer entonces básicamente dos cosas: (1) romper su ligazón y desarmar la molécula, volviendo a su estado libre, o bien (2) combinarse con más átomos, formando una molécula de mayor complejidad. Muchas de estas reacciones ya se han reproducido experimentalmente en el laboratorio; en ellas se vio que de esta manera se producen azúcares, aminoácidos, nucleótidos y muchas otras moléculas que hoy constituyen las piezas fundamentales de los organismos vivos (Blanck y Cereijido, 1996).

<sup>7</sup> Las investigaciones de Manfred Eigen y sus colaboradores (1971-1981) mostraron cómo las moléculas prebióticas podrían haber dado origen a las primeras cadenas de DNA, de RNA y a las primeras proteínas; y cuáles podrían haber sido los primeros pasos hacia la aparición de una membrana celular y de un cúmulo molecular que pudiera aspirar al título de célula (op.cit. 1996).

de Einstein descarta la noción de tiempo “común” de Newton<sup>8</sup>, tiempo al que éste llamó duración y emparentado con las nociones fisicistas aristotélicas, e introdujo, en cambio, la idea de que *el tiempo es un aspecto de la relación* entre el Universo y un sistema de referencia (el observador). Asume el argumento de Minkowski (1908) quien afirma: "Nadie ha notado jamás un *lugar* excepto en un tiempo, ni un *tiempo*, excepto en un lugar." Levanta la noción de "punto-universo" para un punto espacial observable en un punto del tiempo y resignifica al “universo”, entendiéndolo como la totalidad de los puntos-universos al que referimos hoy como el *espacio-tiempo* (op.cit. 1996). De este modo entonces, de existir una realidad, ubicada allí afuera, esta es un continuo de cuatro dimensiones, donde *tiempo* y *espacio* están unidos indisolublemente constituyendo una realidad independiente. Se puede ver en Anexo 2 ilustraciones de gráficos de desplazamiento en el *espacio-tiempo*.

Más adelante, Bergson, critica este tiempo espacializado de la relatividad como no apto para la vida. En sus reflexiones “*Bergson concibió dos tipos de tiempo. El primero, la duración, es la forma que asume la sucesión de nuestros estados de conciencia cuando nuestro ego "se larga a vivir". En cambio, el otro tiempo es concebido cuando ponemos juntos nuestros estados de conciencia, cuando expresamos la duración en términos espaciales, como si formaran una cadena o una línea continua. Pero, por el contrario, nosotros nunca separamos un estado de conciencia del otro haciendo un corte neto y abrupto. Jamás nos aparecen como elementos discretos de una sucesión. Siempre se mezclan y funden unos con otros de tal forma que las memorias del pasado se mezclan con las expectativas del futuro. Así, el reloj no tiene simultáneamente sus agujas en las doce menos cinco, en las doce, ni en las doce y cinco. Es la permanencia del individuo lo que le permite, mientras percibe el presente (es decir, que son las doce), recordar que el reloj marcaba las doce menos cinco y predecir que luego ha de marcar las doce y cinco*” (op. cit. 1996). Bergson, inaugura así al sujeto psicológico y da inicio a la psicología del tiempo.

Volviendo a la experiencia vital del tiempo, cabe traer a la mano el concepto de tiempo del filósofo Heidegger<sup>9</sup> (1971). Para este pensador, el *Ser* no es un ente, sino que "va siendo", usando para el *Ser* la palabra alemana –sin traducción- *Dasein*. De aquí se sigue que el *Dasein* es un *no-aún*, por lo que la única manera de existir que tiene el *Dasein* es proyectando posibilidades. Se encuentra esta visión con la que sustenta el cristianismo para el cual la persona vive un presente, fagocitando de un pasado y proyectándose al futuro que “no es aún”, signado positivamente por la plenitud de la humanidad. Este tiempo –este estar, esta duración- es existencia histórica (ver también desarrollo de Carrasco<sup>10</sup>). Volvamos, con estos “tiempos”, sobre la lectura analítica de las voces estudiantiles.

**El tiempo de las experiencias vitales del estudiantado.** Las epistemes estudiantiles de tiempo aparecen explícita o implícitamente en el marco de representaciones estudiantiles cotidianas de la variación (Díaz, 2004). Estas últimas ostentan una naturaleza estática y discreta, dinámica y

---

<sup>8</sup> Newton aceptó que había un tiempo absoluto, verdadero, matemáticamente regular, y que fluye con independencia de cualquier factor externo; y otro tiempo (al que llamó duración), relativo y aparente, que identificaba con el tiempo común, medible por el cambio y movimiento de las cosas (el de las agujas de un reloj, el de la Tierra alrededor de su eje, etc.). En general los autores se refieren a esos dos tiempos newtonianos llamándolos *absoluto* y *relativo* respectivamente. (op.cit. 1996).

<sup>9</sup> Recordamos con Echeverría (1993, p.20) que “la filosofía no hace sino sistematizar lo que, de una u otra forma, se encuentra en la estructura del sentido común y que pertenece a todas y cada una de las personas”.

<sup>10</sup> Tesis de Maestría en el marco del proyecto: *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos*.

continua, constituyendo sentidos en los que entra en juego la noción de variación según niveles de abstracción crecientes y consecutivos por su aparición temporal: el primero concreto-estático y el segundo abstracto-dinámico, cosmovisiones cíclicas y lineales -en el sentido de una sola dirección- modos de pensar tanto dinámicos como estáticos. Los estudiantes del décimo año de escolaridad privilegian el cambio respecto de la variación, siendo el cambio una palabra sustantiva, que tiene la fuerza, el impulso que gatilla sus realizaciones.

La noción común de tiempo es connatural al modo de pensar los cambios del estudiantado del décimo año en tanto que el tiempo aparece de un modo implícito en los más jóvenes para quienes su transformación biológica y síquica recién comienza. Para el estudiantado entre los 13 y los 14 años “*la ley de la vida es cambiar, es inevitable*”. En conjunto, los jóvenes de este grupo etario se visualizan más a merced de los cambios y variaciones, que como actores de ellos, por lo que se preocupan por esas consecuencias que procurarán evitar. Para el habla del estudiantado de octavo año de escolaridad, lo variado es estático. En efecto, hay una colección en donde hay muchos distintos, presentes simultáneamente, que se comparan entre ellos mismos y son distintos por algún atributo, pueden ser de distinta naturaleza -hay variados elementos encima de la mesa: unos lápices, una goma, una radio. Así la voz de variación es pasiva “ahí yacen elementos diversos” a los que se asocian emociones tales como aburrimiento y comodidad.

Por su parte, el tiempo está muy presente entre los 15 y los 16 años. El cambio en sus voces tiene que ver con estados distintos acordes a pasos del tiempo, se compara un antes y un después de una misma cosa a la que se le detectan estados diferentes y se describen, dando cuenta del tipo de cambio ocurrido. Vemos aquí la acepción cotidiana, en la que el tiempo es la duración de las cosas sujetas a mudanza. Pero duración en la voz cotidiana es a su vez, el tiempo que dura algo o que transcurre entre el comienzo y el fin de un proceso (Vergara; 2004). En la manera de pensar de los jóvenes, la visualización de cambio responde al dinamismo de la acción que ocurre en el tiempo. Las representaciones estáticas no son naturales en el habla espontánea de este grupo etario de jóvenes, propio de la vorágine de cambios en las que se hallan inmersos, como en un huracán.

**El tiempo en la comunicación de los estudiantes.** Para hacer presente en los estudiantes los desafíos de la comunicación, valorando los distintos registros de la misma así como levantando las nociones con las que construye sus entendimientos, se realizó una actividad en la que grupos observan los cambios experimentados por dos globos y luego comunican esto a otro grupo que no ha estado presente en la experiencia. Nuestro interés se centró en relevar las nociones que pone en juego el estudiantado a propósito de comunicar situaciones de cambio antes de que el aula de matemática les introduzca en las herramientas del discurso curricular respectivo, suscribiendo que “*el acto social del lenguaje da existencia a nuestra realidad, a nuestra cognición y por ende a nuestras herramientas (...) Consideramos la comunicación y el lenguaje en sentido amplio, donde se incluye el lenguaje natural, escrito y hablado; las gráficas utilizadas; los gestos y señas; y los movimientos que se reproducen*” (Arrieta, 2003, p.140).

Las consignas de la actividad destacan a los grupos que quedan en el aula, que se trata de una observación atenta y para ser comunicada. Comunicar los cambios experimentados por cada globo, de modo que sus interlocutores se formen una idea lo más cercana posible de lo sucedido. Se les invita a usar gráficos, dibujos y un relato escrito, en hojas en blanco y un papelógrafo. Los grupos usan los registros verbal, escrito, icónico y tabular para comunicar la experiencia, registrándolos en el papelógrafo. Uno de los grupos usa la tabla:

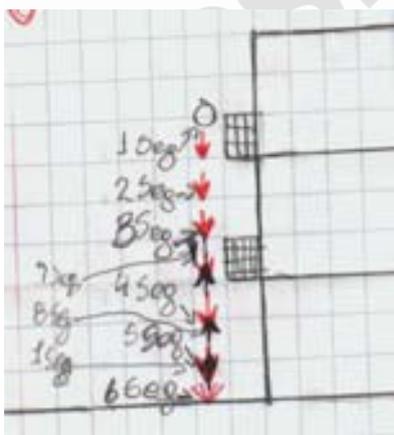
|            | 1er Globo | 2do Globo |
|------------|-----------|-----------|
| Velocidad: | Mucha     | Poca      |
| Tiempo:    | Menor     | Mayor     |

El grupo que recibe este relato que usa, entre otros registros, esa tabla, se retira para, a su vez, registrar lo que se le expuso y comunicarlo al resto de los grupos de la sala en que se realiza la experiencia. Reconstruye la comunicación recibida en un papelógrafo en el que incluye también una tabla para comunicar lo acaecido con los globos. Realizan la siguiente tabla:

|  | 1er globo | 2do globo |
|--|-----------|-----------|
| Velocidad al desinflar                       | Mayor     | Menor     |
| Cant. de aire en el globo antes de desinflar | Menor     | Mayor     |

En ella aparece la categoría de “velocidad al desinflar” y en el lugar del tiempo de la tabla que se les expusiera, focalizan en la “cantidad de aire en el globo antes de desinflar”, categoría más cercana - por su materialidad - a sus experiencias. Al primer grupo se les solicitó observación atenta y una comunicación de cambios lo más cercana a lo acaecido. Comunican entonces la actividad recurriendo a un tiempo psicológico que les permitió ordenar sus impresiones y describir lo sucedido, evento a evento. Entre sus textualidades señalan “*comenzaron a disminuir su tamaño, lo cual disminuyó rápidamente*” y “*se demoró menos en llegar al estado normal*” destacando las velocidades de desinflado de cada globo. El segundo grupo, que no vivió la experiencia psicológica del tiempo que demora el inflado y desinflado de cada globo, luego al evocarla desde un relato de terceros no evoca tiempo sino velocidad – en su acepción cotidiana – sin reparar en la variable tiempo de la situación relatada sino que se conecta fluidamente con la acepción cotidiana de velocidad de sus relatores. El tiempo en nuestros estudiantes es una vivencia subjetiva y que ha de ser experimentada para proceder a corporalizarla, con recurso a las representaciones compartidas social y culturalmente.

**Tiempo cotidiano y tiempo matemático pugnando en las gráficas estudiantiles.** Las producciones de los estudiantes revelan grandes dificultades para expresar variaciones en una gráfica distancia – tiempo, reporta Carrasco (2005). La figura siguiente ilustra la competencia que se gatilla en el papel a la hora de adjudicar un eje al tiempo y un eje al desplazamiento. Se trata del dibujo de un estudiante del décimo año, sin preparación previa en gráficas a quien se le



ha pedido que dibuje la trayectoria “a través del tiempo” de una pelota desde un tercer piso. Y es que se debe resolver para una variable que no está “a la vista” como lo es el tiempo. Cuando hablamos en el aula del tiempo asociamos un “adelante” para el futuro y un “atrás” para el pasado. Metáfora que refiere a un eje de longitud unidimensional (una recta). Atendiendo a los desarrollos de Lakoff y Núñez y (2000) de que “*el tiempo es metafóricamente conceptualizado (por los matemáticos) en términos de distancia*” entonces ocurre que al dibujar el avance del tiempo en un gráfico distancia/tiempo la representación del tiempo entra a competir – para su representación - con la dimensión lineal propia del desplazamiento. Dos dimensiones que refieren a distancia, no pueden ocupar el mismo eje, entonces el estudiante en su dibujo reserva el eje para el desplazamiento y hace marcas sobrepuestas para el paso del tiempo. Entre las evidencias recogidas en esta fase del estudio, se constatan diferencias entre el tiempo construido por la comunidad matemática y el, o los, tiempos evidenciados por los estudiantes en sus textualidades. Variados tiempos: en sus gráficos escolares tiempos de detención, tiempos del movimiento, tiempos “puntuales” e “intervalares”. Por su parte, en sus referencias experienciales del tiempo aparecen por una parte el tiempo poseído, otorgado, objeto de negociación en el que se experimenta al tiempo con un

locus de control interno; y por otro lado, el tiempo gatillador de cambios o que esclaviza a la persona en tanto que lo experimenta con un locus de control que le es externo. Asimismo, se profundiza en los tiempos de la física actual, tiempos que se comprimen y tiempos que se expanden, de modos no lineales e intentos de establecer un tiempo intervalar. De modo concomitante, los estudiantes reconocen en su *experiencia vital* variados tiempos que no son regulares -se acortan si estamos entretenidos, se dilatan si estamos aburridos. Dado que para la construcción de gráficas distancia/tiempo de un fenómeno se requiere visualizar al tiempo como una variable involucrada en la situación, que co-varía con los demás parámetros a graficar, corporalizándose como una distancia – representación laboriosamente construida por la comunidad matemática en el proceso de numerización del tiempo Newtoniano, necesario para la cuantificación del cambio – el diseño de la intervención didáctica para su enseñanza demandará diferenciar esta particular representación de las otras representaciones sociales del tiempo (de otras comunidades científicas, de las cotidianas y previas de nuestros estudiantes entre otras) para favorecer tales construcciones, no triviales.

En el marco de esta investigación y en tanto se hacía acopio y análisis de textualidades estudiantiles, las epistemes escolares asociadas a la variación inversa dieron pie a un estudio de caso tendiente a elaborar alternativas al discurso curricular de la proporcionalidad inversa propio de los currícula vividos en las aulas. Correspondiendo al estudio a priori de una ingeniería didáctica, sobre la base de las producciones estudiantiles de un curso del décimo año de escolaridad y atendiendo a primeros análisis de aspectos didácticos, cognitivos, histórico-epistemológicos y socioculturales, se esboza una propuesta de enseñanza para favorecer la significatividad de este contenido entre los estudiantes.

**Reciprocidad como metáfora didáctica para el estudio de la variación proporcional inversa.** Consultados los estudiantes sobre sus entendimientos en esta materia muestran como las prácticas operatorias mecanicistas les dejan con un sinnúmero de preguntas en un registro algebraico carente de significado para la variación proporcional inversa, como lo muestran las siguientes textualidades:

*“¿Por qué había que dar vuelta una parte del sistema inverso?”*

*“¿Cuando se invierten las incógnitas en las ecuaciones de  $3 \times 3$  indirectas?”*

*“¿Por qué dar vuelta una parte de la ecuación en la variable inversa?”*

*“Me quedó una duda respecto a un problema  $3 \times 3$  inverso el cual el inverso de  $2c$ , es  $2/c$  según nuestro compañero, lo que creo que está bien, pero también podría ser  $1/2c$ .”*

¿Cómo dotar de significatividad a las prácticas operatorias que pone en escena el aula para la variación proporcional inversa? Ledesma (2005)<sup>11</sup> pesquisó en los modos de operar a propósito de tres casos ilustrativos, a saber, el análisis de tablas babilónicas, el modo de reflexionar la proporción entre surcos y semillas del campesino de la Edad Media y el desastre ecológico de la sobre-explotación del sembradío actual, por una parte, y, por la otra, se indagó en los avances en el campo del lenguaje, las neurociencias y la sociología del conocimiento para entender los procesos de construcción de saberes y de aquellos en particular. Se relevaron las nociones de las metáforas corporales y las metáforas conceptuales como herramientas útiles para el análisis de las prácticas sociales vinculadas a la elaboración de saberes, en el marco socio-epistemológico de la investigación que contempla a la vez aspectos cognitivos, didácticos, histórico-epistemológicos y socioculturales (op. cit., 2000). Asimismo, se elaboró una primera aproximación a una “metáfora didáctica” a incorporar al discurso curricular sobre la variación proporcional inversa, dotando de significado a este saber matemático entre los estudiantes. Tal metáfora “corporiza” el modo de operar de la proporcionalidad inversa: busca la manera de interpretar cualidades propias de “dimensiones o variables” que se relacionan de forma polar, aceptándose y reconociéndose mutuamente, de acuerdo a un mismo referente, con

<sup>11</sup> Tesis de Maestría en el marco del proyecto: *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos.*

comportamientos de variación “inversa”. Se trata de cambios de comportamientos al interior de un todo de naturaleza dual. Esta “imagen” reflejaría el tipo de “corporalidad” implícita tanto en culturas de época remota expresadas en las “tablas de los recíprocos” de los babilonios como en los cálculos del campesino medieval y del ecologista contemporáneo. Sería plausible - a la luz de estos hallazgos - dar sentido de un modo “natural”, a un encuentro de un concepto de “inverso”, con el significado cultural de “reciprocidad” en las representaciones estudiantiles. No es un modo de operar “inverso” de otro modo de operar - de una “proporción directa” desde la perspectiva formalista de la matemática - sino que refiere a un modo de operar con un sentido en sí mismo.

### **A modo de cierre**

El trabajo realizado hasta aquí nos ha puesto en evidencia las complejidades de las epistemes de las cuales somos portadores tanto estudiantado como profesorado y especialistas, mostrando lo desafiante que es la construcción de ideas variacionales que dialogan con cada una de sus epistemes asociadas, estableciendo redes de significados entre ellas.

Desde el estudio de los procesos de entendimiento de ideas variacionales sobre la base de bitácoras, constatamos que éstas nociones se van corporizando en metáforas formadas por cadenas asociativas complejas que incluyen expresiones icónicas y visuales, dando corporalidad a la recta que se mueve y a aquella que no se mueve (razón de cambio cero), mirando objetos globales más que localidades y refiriendo en los ejes magnitudes distintas al tiempo, el que persiste en su invisibilidad para el estudiantado cuando el contexto de trabajo no es directamente la clase de matemática - el estudiantado aborda el registro de su bitácora normalmente fuera del aula. Ilustra este aserto la textualidad en que la estudiante señala que “*se ve una recta que no tiene movimiento*” versus otra que sí lo tiene, a pesar de estar ambas estáticas en el plano en el que las dibuja. Reflejo de la cultura visual en la que estamos inmersos, que comunica con logos estilizados y minimales reservando para líneas oblicuas la representación de movimiento, representaciones que deben incluirse en los diseños de nuestra enseñanza.

Asimismo, el instrumental de las bitácoras mostró con mayor nitidez que aún tratándose de registros que tratan de un diálogo más intrapersonal, dejando el diálogo estudiante-docente en segundo plano, hay también un “diálogo” estudiante-contexto (estudiantes formándose como profesores, docente-investigador, ambiente físico del aula y espacios de estudio estudiantiles) que gatilla efectos en el estudiante y que de algún modo tendrían que considerarse partes constituyentes de diseños didácticos. No sólo la secuencia en sí misma como “estructura” que se aplica en aula sino entrando, en la misma secuencia, a instrumentales que permitan monitorear o acercarse a las tramas implícitas que vivencian los estudiantes, concomitantes a esos diseños didácticos.

Reconocemos, a partir de los discursos de estudiantes, que el tiempo es connatural al modo de pensar los cambios del estudiantado que cursa el décimo año de escolaridad y tiene que ver con estados distintos acordes a pasos del tiempo, se compara un antes y un después de una misma cosa a la que se le detectan estados diferentes y se describen, dando cuenta del tipo de cambio ocurrido. Vemos aquí la acepción cotidiana en la que el tiempo es la duración de las cosas sujetas a mudanza. Pero duración en la voz cotidiana es a su vez, el tiempo que dura algo o que transcurre entre el comienzo y el fin de un proceso. Este tiempo cotidiano es el que deberá dialogar con las secuencias didácticas de variación.

En el marco de los desafíos de la comunicación y la valoración de los distintos registros de esa comunicación, se llevó a cabo una actividad en la que un grupo observa inflar dos globos y luego comunica lo observado a otro grupo. El primer grupo usa los registros verbal, escrito y tabular para comunicar la experiencia a un grupo que, sin haberla presenciado, a su vez la comunica. Se observa con sorpresa que éste recupera el registro tabular del primer grupo pero no considera al tiempo como variable en su tabla. En su lugar pone la

“cantidad de aire en el globo antes de desinflar”, categoría más cercana - por su materialidad - a sus experiencias. Este grupo no vivió la experiencia psicológica del tiempo, lo que demoró el inflar cada globo, luego al evocarla desde un relato de terceros no evoca tiempo sino “cantidad de aire”, dejando el tiempo invisible a la situación relatada. El tiempo en nuestros estudiantes es una vivencia subjetiva, no reconocida como una distancia y que ha de ser experimentada. Ello aportará, en particular, a la superación de las producciones de los estudiantes que revelan dificultades para expresar variaciones en una gráfica distancia-tiempo. En ellas la representación matemática que concibe a la dimensión de tiempo como una distancia, compite - a la hora de graficarlos juntos - con la dimensión propia del desplazamiento. En suma, la distinción de una diversidad de representaciones sociales sobre el tiempo, respecto de la representación consensuada por la comunidad matemática, desafía diseños que den oportunidad a los estudiantes de construirla significativamente.

Representaciones sociales para la variación proporcional inversa implícitas tanto en culturas de la época de los babilonios como en los cálculos del campesino medieval y el ecologista contemporáneo harían plausible dar sentido, entretejiendo a la vez que distinguiendo, un concepto de “lo inverso” del aula de matemáticas con el significado de “reciprocidad” de las representaciones estudiantiles. Es sabido el rol fundamental que juega el pensamiento metafórico en la actividad matemática. Usamos didácticamente el pensamiento metafórico en la enseñanza de la matemática. Creemos, por ejemplo, que construir metáforas cuyas redes de significados asocien “reciprocidad” por un lado y por otro lado, “lo inverso” y la “proporcionalidad inversa” robustecerá el entendimiento de esta última en el estudiantado.

## Referencias

- Almeida, I. (1993). La inteligencia narrativa. En “*Seminario Internacional. Comunicación, discursos, semióticas*”. Rosario, Argentina: UNR, Editora.
- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado. México: Cinvestav-IPN.
- Ávila, J. (2004). *Reflexiones estudiantiles ligadas a la razón de cambio*. Ponencia presentada a las XII Jornadas de la Sochiem. Valparaíso, Chile.
- Ávila, J. (2005). *Representaciones estudiantiles de variación desde mediaciones pedagógicas*. Tesis de Maestría, primera versión de circulación restringida. México: CICATA-IPN.
- Blanck-Cereijido, F y Cereijido, M. (1996). La emergencia de la idea del tiempo. En *La vida, el tiempo y la muerte*. México: FCE.
- Brousseau, (1987). *Fundamentos de Didáctica de la Matemática*, Texto base en los créditos de 3er ciclo impartidos por el profesor Brousseau, Programa de Doctorado de la Universidad de Zaragoza. Traducción de las profesoras Centeno J. y Melendo, B. y el profesor Murillo, J.
- Bruner, J. (1988). *Realidad mental y mundos posibles*. Barcelona: Gedisa.
- Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula*. México: Paidós Educador
- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional, Una Mirada Socioepistemológica. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 17, Tomo I*, pp. 1-9. México: Clame.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Revista Epsilon 42*. España.
- Carrasco, E. (2005). *Visualizando lo que varía*. Tesis de Maestría, primera versión de circulación restringida. México: CICATA-IPN.
- Connelly y Clandinin, Editores (1995). *Déjame que te cuente, ensayos sobre narrativa y educación*. Edición en castellano. Barcelona: Laertes. 1995.
- Cornejo, (2004). La metáfora como motor del cambio conceptual. *Conferencia dictada en Seminario de Actualización: Cognición en el Aula*, PUC. Santiago de Chile.
- Díaz, L. (1999). *Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite. Un estudio de casos*. Tesis Doctoral, Puc, Chile.
- Díaz, L. (2000). *Las bitácoras, método para la enseñanza significativa de la matemática*. Documento de trabajo de circulación restringida. Carrera de Pedagogía en Matemática e Informática Educativa. UCSH. Santiago de Chile.
- Díaz, L. (2003). *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos Matemáticos*. Proyecto Fondecyt 2003-2005. Santiago de Chile.
- Díaz, L. (2003). Reflexión de nuestras Epistemes como Eje Transversal en Procesos de Estudio de Matemática Educativa. Ilustraciones. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 16*. Santiago de Chile.

Díaz, L. (2004). Construyendo relaciones benéficas entre imaginarios culturales y aprendizajes matemáticos. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 17, Tomo I, pp 10-20. México: Clame.

Echeverría, R. (1996). *El Búho de Minerva*. Santiago de Chile: Dolmen Ediciones.

Egan, K. (1998). Narrativa y aprendizajes. Una travesía de inferencias. En McEwan, H. y Egan, K. (comp.), *La narrativa en la enseñanza, el aprendizaje y la investigación*. Buenos Aires: Amorrortu editores.

Garrido, M.; Guerrero, S.; Paillalef, M. (2004). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional generalizado*. Proyecto integrado de diseño curricular. Tesis de Magíster en Educación, primera versión de circulación restringida. UMCE, Santiago de Chile.

Heidegger, M. (1971). *El ser el tiempo*. Traducción de José Gaos. México: Fondo de Cultura Económica

Johnson, M. ed. (1981). *Philosophical Perspectives on Metaphor*. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Johnson, M. (1987). *The Body in the Mind. The Bodily Basis of Meaning, Imagination and Reason*. Chicago and London. The University of Chicago Press. Versión en castellano (1991) *El cuerpo en la mente*. Madrid: Debate

Johnson, M. (1993). *Conceptual metaphor and embodied structures of meaning*. *Philosophical Psychology*, 6(4), 413-422.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1980). *Metaphors We Live By*. Chicago: Chicago University Press.

Lakoff, y Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From*. New York: Editorial Basic Books.

Ledesma, F. (2005). *Significatividad de la proporcionalidad inversa en estudiantes del décimo año de escolaridad*. Tesis de Magíster, primera versión de circulación restringida. UMCE, Santiago de Chile.

Minkowsky, H. (1908). «Espacio y tiempo». Conferencia ante el 80° Congreso de Científicos y Médicos Alemanes. Colonia.

Morowitz (1968). *Flowing Biology*. USA: Scientific American.

Mumby, D. (2002). *Narrativa y Control Social*. Argentina: Editorial Amorrortu.

Ricoeur, P. (1987). *Tiempo y narración I. Configuración del tiempo en el relato histórico*. Madrid: Cristiandad,

Van Dijk, T. A. (1995). *Texto y contexto*. Madrid: Cátedra.

Varela, F. (2003). Entrevista en <http://www.netexplora.com/textos/entrevistavarela.htm>

Vergara, C. (2004). Tempus Fugit. *Revista Universitaria* 85. Santiago de Chile: Editorial PUC.

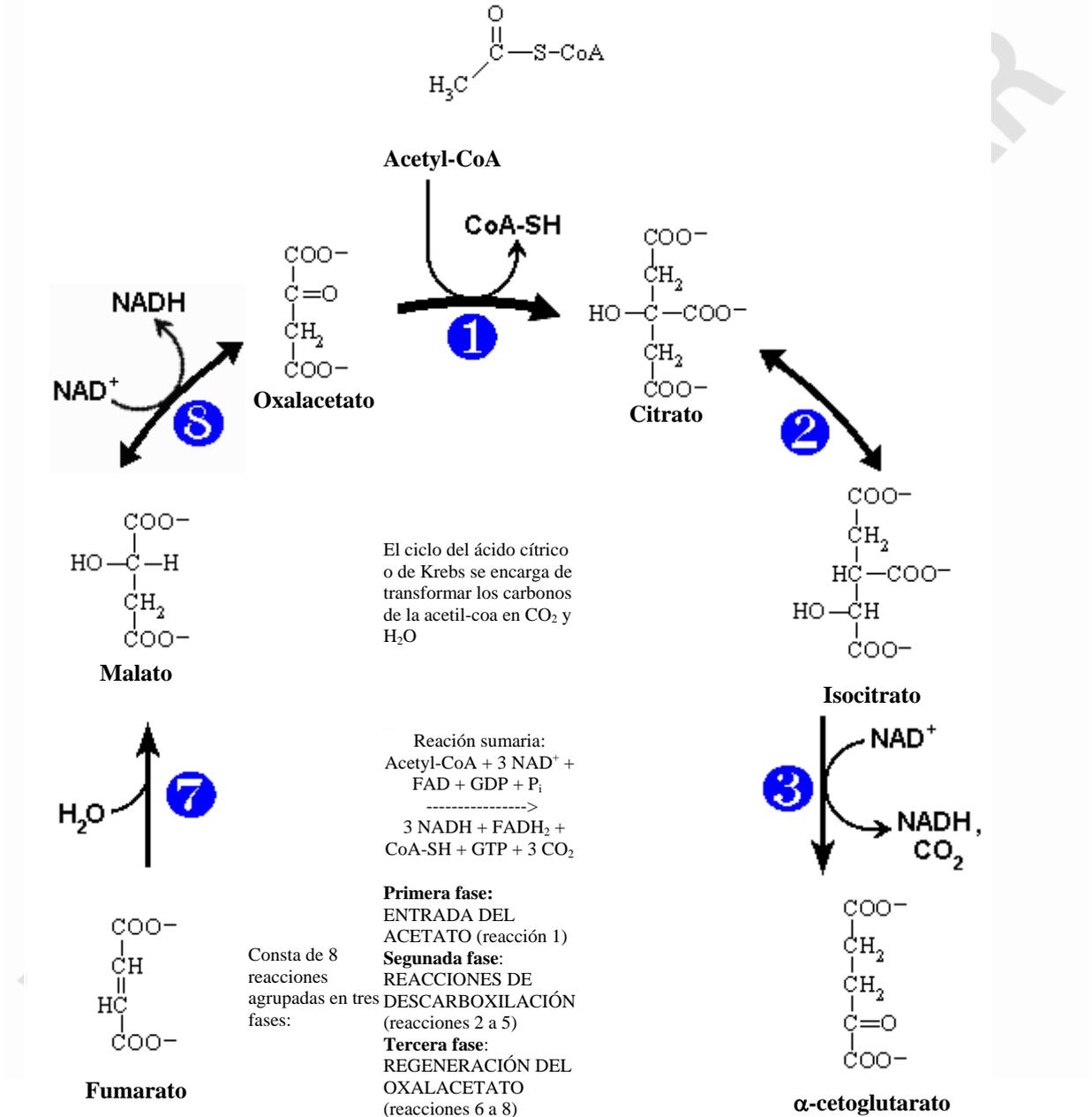
Wertsh, J. (1993). *Voces de la mente. Un enfoque socio cultural para el estudio de la Acción Mediada*. Madrid: Visor Distribuciones

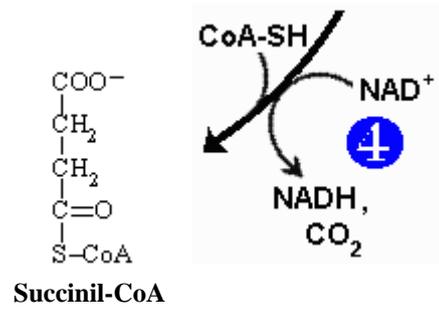
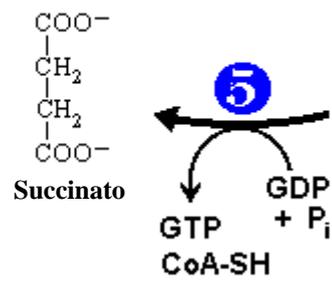
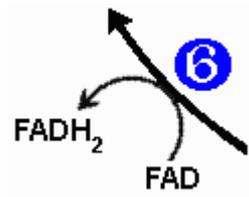
*Dra. Leonora Díaz*  
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación  
Santiago de Chile  
E-mail: [ldiaz@umce.cl](mailto:ldiaz@umce.cl)

VERSIÓN PRELIMINAR

# ANEXO 1

## EL CICLO DE LA VIDA





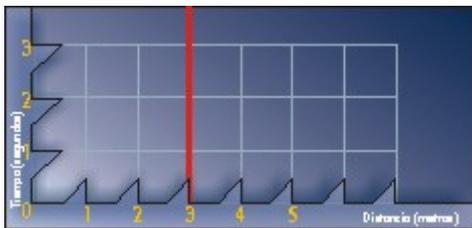
VERSION PRELIMINAR

## ANEXO 2

### VISUALIZANDO EL ESPACIO-TIEMPO

Tomado de la EXPERIENCIA PILOTO COSMOEDUCA  
Responsables y Coordinadores Luis A. Martínez Sáez y María Concepción Anguita (Itziar)  
Autores de los Materiales didácticos de Gravitación: Antonio Mampaso y José Luis Barceló.  
<http://www.iac.es/cosmoeduca/gravedad/complementos/enlace4.htm>

Desde el punto de vista de Newton, la Tierra sigue una trayectoria en el espacio euclidiano en forma de elipse (por cierto, es casi una circunferencia) alrededor del Sol. Desde el punto de vista de Einstein, la Tierra sigue la trayectoria más corta posible (una geodésica o "recta" generalizada) en un espacio-tiempo que ya no es euclidiano porque ha sido deformado por la masa del Sol. Imaginemos que sólo hay una dimensión espacial y que Einstein nos pide que inventemos el espacio-tiempo de dos dimensiones. Entonces dibujaríamos un gráfico donde un eje (por ejemplo, el horizontal) fuera el espacio y el otro eje (el vertical) el tiempo. En el eje del tiempo podemos poner marcas, por ejemplo, cada segundo. Si queremos podemos poner también marcas *en segundos* en el eje espacial (y cada marca correspondería a una distancia de 300.000 km. Esto puede ser una unidad inconveniente para las medidas de cada día: ¿cuánto mides tú de alto en segundos?). Por ello pongamos marcas normales, por ejemplo, cada metro. Ahora jugamos a poner sucesos reales en este gráfico. Por ejemplo, tú estás quieto a 3 metros de mí. Tu "trayectoria" en el gráfico espacio-tiempo es la línea recta vertical que se muestra en la figura:



En la figura de

la izquierda, vemos que aunque tú estás quieto, el reloj sigue marcando los segundos, tic-tac, tic-tac... y por eso tu trayectoria es una recta que se alarga a medida que el tiempo pasa. Ahora supón que te alejas de mí con una velocidad de 1m/s. Tu trayectoria en el gráfico espacio-tiempo es una línea recta inclinada como lo muestra la figura de la derecha:

Modifiquemos ligeramente el gráfico, y pongamos en el eje horizontal (el de las distancias) la *altura* que tienes sobre el suelo (el eje vertical lo dejamos como estaba, el tiempo). Intenta visualizar ahora que si das un salto hacia arriba tu trayectoria en el gráfico espacio-tiempo es una curva llamada parábola (ver figura), supuesto, claro, que hay una fuerza de gravedad que "tira" de tí hacia abajo.

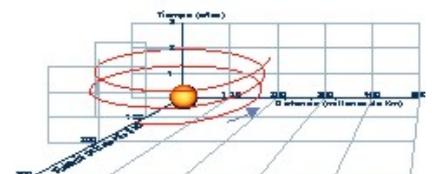


Éste es un resultado muy interesante: *las trayectorias en el gráfico espacio-tiempo son curvas cuando actúa la gravedad.*

Ahora vamos a ser más valientes y vamos a representar la trayectoria en un gráfico espacio-tiempo de *tres dimensiones* (ahora serán dos dimensiones espaciales, más el tiempo) de un planeta (por ejemplo, la Tierra) en órbita circular alrededor del Sol. Ya hemos aprendido que el eje del tiempo siempre corre igual, los segundos aumentan monótonamente como dice nuestro reloj, tic-tac-tic-tac... así que la trayectoria de la Tierra

en este gráfico es una hélice regular y de sección circular. Para hacer este gráfico (ver figura), tenemos un problema insalvable (describir tres dimensiones en un mundo de dos, el papel) que arreglamos mal que bien como es habitual, con una perspectiva.

Pero lo importante es que vemos de nuevo que *donde hay gravedad* (la Tierra y el Sol atrayéndose) *las trayectorias en los gráficos espacio-tiempo son curvas* (no son líneas rectas). Este resultado es la clave para entender la genial idea de Einstein sobre la gravedad: Si en el universo siempre hay gravedad, dado que hay muchas masas y la fuerza gravitatoria tiene un radio de acción infinito, entonces *todas* las trayectorias en el espacio-tiempo han de ser líneas curvas. "¡Qué Universo tan curioso!", pensaría Einstein, "no hay trayectorias rectas, todos los cuerpos van en trayectorias curvas viajando por el espacio y por el tiempo... Entonces, ¿por qué empeñarse en describir el Universo usando un espacio plano de tres dimensiones... ¿No sería mucho mejor



imaginar que el espacio-tiempo no es plano, sino que se ha "deformado" por las masas adquiriendo una geometría no-euclidiana?"

VERSIÓN PRELIMINAR