Relime Vol.8, Núm.2, julio, 2005, pp. 169-193

¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos

Sabrina Garbin Dall'Alba*

RESUMEN

Las ideas, resultados y reflexiones que desarrollamos, son producto de estudios y parte de investigaciones (Garbin 2000, 2003, 2005 y Garbin y Azcárate, 2001) que han pretendido contribuir con el debate de la problemática del infinito matemático en su dualidad potencial-actual (Fischbein, Tirosh y Hess (1979), Sierspinska (1987), Tall (1980), Tirosh, (1991), Moreno y Waldegg (1991), Tsamir y Tirosh, (1994), D'Amore (1997), Tall (2001), Fischbein, 2001), desde la específica, que genera la influencia de las representaciones y distintos lenguajes matemáticos sobre las percepciones del infinito y razonamientos matemáticos asociados, y en las inconsistencias e incoherencias de las respuestas de los alumnos a problemas que están presentes procesos infinitos. Este escrito fue desarrollado como curso corso en la Relme 18[1].

PALABRAS CLAVE: Infinito, esquemas conceptuales, representaciones, incoherencias, cálculo

How perceive the infinite the students between 16 and 20? The influence of the models, the representations and the mathematical languages

ABSTRACT

The ideas, results and reflections that we develop, are product of studies and part of investigations (Garbin 2000, 2003, 2005 and Garbin & Azcárate, 2001) that have intended to contribute with the debate of the problems of the mathematical infinite in their potential-actual duality (Fischbein, Tirosh & Hess (1979), Sierspinska (1987), Tall (1980), Tirosh, (1991), Moreno & Waldegg (1991), Tsamir & Tirosh, (1994), D' Amore (1997), Tall (2001), Fischbein, 2001) that generates the influence of the representations and different mathematical languages on the perceptions of the infinite and mathematical reasoning associates, and in the weaknesses and inconsistencies of the student's answers to problems in which infinite processes are present.

KEYWORDS: Infinite, conceptual schemas, representations, inconsistencies, calculus

Como pensam os alunos entre 16 e 20 anos sobre o infinito? A influência dos modelos, as representações e as linguagens matemáticas

Fecha de recepción: Noviembre de 2004 /Fecha de aceptación: Marzo de 2005

* Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas. Universidad Simón Bolívar. Venezuela.

[1] Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa realizada en Chiapas, México, Julio 2004.

RESUMO

As ideais, resultados e reflexões que desenvolvemos, são produtos de estudos e parte de investigações (Garbin 2000, 2003, 2005 e Garbin e Azcárate, 2001) que hão pretendido contribuir com o debate da problemática do infinito matemático na sua dualidade potencial - atual (Fischbein, Tirosh e Hess (1979), Sierspinska (1987), Tall (1980), Tirosh, (1991), Moreno e Waldegg (1991), Tsamir e Tirosh, (1994), D’Amore (1997), Tall (2001), Fischbein, 2001), desde a especifica, que gera a influência das representações e distintas linguagens matemáticas sobre as percepções do infinito e raciocínios matemáticos associados, e nas inconsistências e incoerências das respostas dos alunos a problemas que estão presentes processos infinitos. Este escrito foi desenvolvido como curso: corso na Relme 18[2].

PALABRAS CHAVES: Infinito, esquemas conceituais, representações, incoerências, cálculo

Qu’est-ce qu’ils pensent les élèves entre 16 et 20 ans de l’infini? L’influence des modèles, les représentations et les langages mathématiques.

RÉSUMÉ

Les idées, résultats et pensées que nous exposons sont produit des études et sont partie des recherches (Garbin 2000, 2003, 2005 et Garbin et Azcárate, 2001) qui ont essayé de répondre au débat de la problématique de l’infini mathématique dans sa dualité potentiel-actuel (Fischbein, Tirosh et Hess (1979), Sierspinska (1987), Tall (1980), Tirosh, (1991), Moreno et Waldegg (1991), Tsamir et Tirosh, (1994), D’Amore (1997), Tall (2001), Fischbein 2001), du point de vue spécifique, qui génère l’influence des représentations et des langages mathématiques différentes sur les perceptions de l’infini et raisonnements mathématiques associés, et dans les incohérences des réponses des étudiants aux problèmes qui incluent l’infini. Cet article est écrit comme partie de la Relme 18[3].

MOTS CLÉS: Infini, plans conceptuels, représentations, incohérences, calcul

Una etapa en la enseñanza y aprendizaje

La escolaridad y el proceso de enseñanza y aprendizaje se desarrolla a lo largo de etapas delimitadas por edades y contenidos, que comienzan en el preescolar (o tal vez desde la escuela materna) y culminan en la Universidad o en los estudios de postgrado. Estas etapas están en estrecha relación con el desarrollo cognitivo de los estudiantes, y para poder hacer estudios, dar ideas, aportaciones y reflexiones didácticas es importante saber situar la etapa cognitiva en que se encuentran los estudiantes.

Nos situamos en este escrito en la etapa cognitiva de transición entre el Pensamiento Matemático Elemental (PME) y el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). Pero, ¿de qué estamos hablando cuando nos referimos a los procesos de pensamiento que intervienen en la etapa elemental, avanzada y en la de transición?. ¿Cuál es la etapa que consideramos elemental y avanzada en la Enseñanza de las Matemáticas?.

Por etapa elemental entendemos normalmente aquella que tiene lugar hasta Secundaria y la

[2] Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa realizada en Chiapas, México, Julio 2004.

[3] Réunion Latino-américaine des Mathématiques Pédagogiques qui a eu lieu a Chiapas, Mexique, juillet 2004.

etapa avanzada aquella que está relacionada con la Enseñanza de la Matemática en la Universidad. Pero entre ambas podemos ubicar una etapa de transición, que aparece en diferentes momentos y distintas duraciones, según el País y a veces según el área de Matemática que se está enseñando. Delimitar ambas etapas y saber reconocer dicha transición ha sido de especial interés para algunos investigadores.

David Tall y Tommy Dreyfus, han elaborado una teoría cognitiva con relación al desarrollo y crecimiento del pensamiento matemático avanzado, basada en aportaciones de la psicología cognitiva (fundamentalmente de Piaget y Bruner), que muestra cuales son las condiciones para ir de un PME a un PMA, pero es el mismo Tall quien afirma que el lugar donde el pensamiento matemático elemental se convierte en avanzado no se ha definido con precisión. La dificultad de establecer una separación significativa entre el PME y el PMA, así como el definir unos límites entre la etapa de transición entre ellos, se debe a variadas y distintas razones.

En cuanto a los procesos de pensamiento, algo que distingue una etapa de la otra es la complejidad y la frecuencia del uso de ciertos procesos, como los de representación, traslación, abstracción, deducción, entre otros. Otra distinción entre una etapa y otra, está en relación con la característica y el nivel de los estudiantes como, por ejemplo, los cursos preuniversitarios o universitarios.

Dos investigadores, Aline y Schwarzenberger (1991) afirmaron que estas características no delimitaban significativamente y de forma clara los dos pensamientos para establecer claramente la discontinuidad. Esto no quiere decir que no reconocieran la existencia de una diferencia entre ambos pensamientos, a veces una discontinuidad. Estos autores la identifican especialmente en las características en cuanto a su enseñanza y evaluación. Al comparar el pensamiento avanzado con el elemental señalan:

a) Se enseña una mayor cantidad de conceptos en menor tiempo.
b) Se enseña con mayor frecuencia los contenidos del currículo de manera formal antes de que el estudiante se haya familiarizado con ellos de manera informal.
c) Se enseñan conceptos que históricamente evolucionaron muy lentamente y, al mismo tiempo, se exige el aprendizaje de demostraciones estándar y la realización de construcciones mentales abstractas.
d) Se enseña una mayor cantidad de conocimientos matemáticos y se exige la comunicación de los mismos y el aumento de estrategias de trabajo; se espera, además, que los estudiantes adquieran la habilidad de distinguir entre pensamiento matemático y metamatemático.
e) La dificultad de evaluar a los estudiantes en tiempos cortos y la de reducir las actividades a tareas elementales; de esta manera se dificulta una evaluación que tome en cuenta la comprensión, el análisis y la síntesis, y no sólo la reproducción de conocimientos por parte del estudiante.

Por otra parte Tall (1995) afirma que el paso del PME al PMA implica una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva. Esta reconstrucción supone, por un lado, el paso de “describir” a “definir”, y por otro, el paso de “convencer” a “demostrar”.

En suma, podríamos decir que los alumnos que se encuentran en la franja de edad de 15-20 años aproximadamente, son los que están en esta etapa de transición. Nuestras investigaciones se realizaron con estudiantes[4] que se encuentran en esta franja de edad, por tanto las ideas, aportaciones y reflexiones que presentamos se sitúan en esta etapa cognitiva.

[4] Se trabajó con estudiantes españoles (Barcelona) de secundaria con edades de 16 y 17, sin tener éstos conocimientos previos de cálculo (límites, derivadas e integrales). También, con estudiantes venezolanos universitarios (USB), con edades comprendidas entre 17 y 20 años, y con conocimientos previos de cálculo (límites, derivadas, integrales, series).

Queremos también subrayar, que el interés, estudio y reflexión sobre el PME, PMA y su transición, no debería ser propio de los investigadores, profesores de niveles últimos de la Educación Secundaria o primeros de Universidad.

Los que trabajan en la etapa elemental propia del desarrollo del pensamiento matemático elemental, preparan los cimientos de un edificio que no puede ser construido sin unos cimientos fuertes y consistentes; acompañan los primeros pasos en el camino cuyo horizonte es el paso al pensamiento matemático, que llamamos avanzado, y que se lleva a cabo a través de una etapa de transición. Si queremos que nuestro quehacer docente favorezca el aprendizaje durante este proceso, tenemos que conocer los procesos de pensamiento matemático involucrados, su complejidad, y qué podría favorecer este tránsito de una etapa a otra.

A modo de ejemplo, si estamos trabajando en una edad en donde prevalecen los esquemas finitos y concretos, no tenemos que perder de vista que el estudiante deberá en algún momento "abandonar" sus esquemas finitos para entrar en el "mundo de la infinitud", que cognitivamente hablando está lleno de contradicciones: los nuevos conceptos e ideas matemáticas entran en contradicción con los esquemas finitos previos. Empiezan a suceder cosas "extrañas", como que dos segmentos de recta de longitud distinta tienen la misma cardinalidad, o que el punto, representado con una marca que ocupa espacio, no tiene dimensión, etc.. Algunos alumnos entre los 16-17 años que al ser preguntados sobre la posibilidad de si al dividir un segmento ,$\overline{AB}$, por la mitad, luego por la mitad, y así sucesivamente, el punto de bisección llega a coincidir con el punto extremo del segmento, contestaron afirmativamente y de manera finita, considerando a los puntos de bisección con dimensión (Garbin, 2000). Por tanto debemos cuidar el no favorecer posturas cerradas y erradicadas en situaciones que no permitan dar paso a lo infinito a partir de lo finito... ¿cómo lograr esa transición?.

Por otra parte, los que trabajamos en niveles educativos donde ocurren los procesos cognitivos del PMA, trabajamos sobre los cimientos del PME, estamos obligados a conectar con ellos y construir desde esos primeros conocimientos, conceptos matemáticos, procesos, modos de hacer y comprensiones sobre los procesos elementales involucrados y crear puentes. Es la etapa de transición que permite el paso, entre el PME y el PMA, en este camino de construcción del edificio del aprendizaje matemático. Paso que no es siempre lineal y donde hay que favorecer la construcción y reconstrucción de los conceptos matemáticos.

Intuición de infinito y algunos conceptos

En nuestra práctica docente, enseñando y evaluando, hemos notado la diferencia que muchas veces existe entre los conceptos concebidos y formulados por la matemática formal y las interpretaciones que nuestros estudiantes hacen de ellos.

Es en la década de los años 70 y primeros años de los 80, cuando se detecta esta diferencia. Para explicar esta distinción, Tall y Vinner (1981) definieron lo que llamamos "esquema conceptual" (*concept image*). Inicialmente, Tall y Vinner describieron el esquema conceptual que tiene un alumno de un concepto matemático como toda la estructura cognitiva asociada al concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados a la noción matemática.

También explican que el esquema conceptual no necesariamente es coherente en todo momento y que los alumnos pueden evocar imágenes contradictorias en momentos diferentes.

Mucho más tarde Tall (2001) define "informal image" y "formal image", que nombramos imagen informal y formal, la primera es algún tipo de imagen que se tiene antes del acercamiento con teorías axiomáticas, y la segunda consiste en la parte del esquema conceptual que es formalmente deducido de los axiomas. Esto enfoca en el dominio del infinito, la tensión entre el infinito "perceptual" y el infinito "formalizado".

En particular, nosotros trabajamos con estudiantes que se acercan al infinito, siendo éste no formalizado, y cuya intuición del infinito es la que entra en juego, tanto antes y después de haberse introducido conceptos formales del cálculo diferencial e integral, y empiezan a aparecer interconexiones y confusiones entre la “imagen formal” e “informal” de dichos conceptos.

Desde la realidad psicológica, el infinito es un concepto complejo y contradictorio. Y si observamos su historia, y hacemos presente nuestras intuiciones, podemos ver que estas son similares a aquellas experimentadas por los matemáticos en el desarrollo del concepto.

El concepto aristotélico de infinito es una noción potencial que dominó en la historia hasta la época cantoriana, habiendo tenido una gran influencia en el desarrollo de este concepto. Como ha explicado Fischbein (1982), este concepto potencial de infinito es el que responde a la interpretación intuitiva del infinito. “Un objeto potencialmente infinito (por ejemplo una línea que puede ser extendida indefinidamente) tiene un significado “conductutal”. Una operación potencialmente infinita también tiene un significado “conductual” (por ejemplo dividir indefinidamente un segmento). Un infinito actual no tiene un significado conductual, por tanto no es congruente con una interpretación intuitiva”. En una palabra, el infinito actual es una noción contraintuitiva. (Garbin y Azcárate, 2001).

En este escrito nombramos al infinito actual, como el que está asociado a la idea de totalidad, de completes y de unidad. Un proceso (potencialmente infinito en sus orígenes) se considera acabado y los límites alcanzados.

Los estudiantes entre los 16 y 20 años, en que no se les ha formalizado el infinito cantoriano, y aunque tengan conocimientos de cálculo diferencial e integral, no necesariamente perciben al infinito en algunas situaciones como acabado y los límites alcanzados, sin embargo en otras sí es aceptada la completes del proceso. Esto está muy ligado a la representación de la situación y al foco de atención que los estudiantes mantienen. Analizamos esta situación en los párrafos siguientes.

Incoherencias: impacto de las representaciones y los lenguajes matemáticos

Un elemento relevante a considerar en la actividad matemática y de especial interés, es la importancia de diferenciar la representación del objeto, del objeto matemático. Los objetos matemáticos tienen un significado más abstracto que los objetos físicos. En el mundo real, por ejemplo, un punto es una marca de un lápiz no prolongada y con medida finita; sin embargo en matemática, tal concepto es abstracto, tiene posición pero sin medida. El punto y la línea, en sentido físico, son la representación semiótica de los objetos matemáticos punto y línea. Y cuando nos referimos a la estructura cognitiva, decimos que el esquema conceptual usa el símbolo para conectar convenientemente procesos y relaciones; de esta manera, en la mente se tienen símbolos que se pueden manipular como objetos mentales, sin ser necesariamente objetos físicos.

El profesor Duval (1996, 1999) ha desarrollado una teoría cognitiva de las representaciones semióticas y afirma que éstas tienen un carácter distinto a las representaciones mentales y constata que:

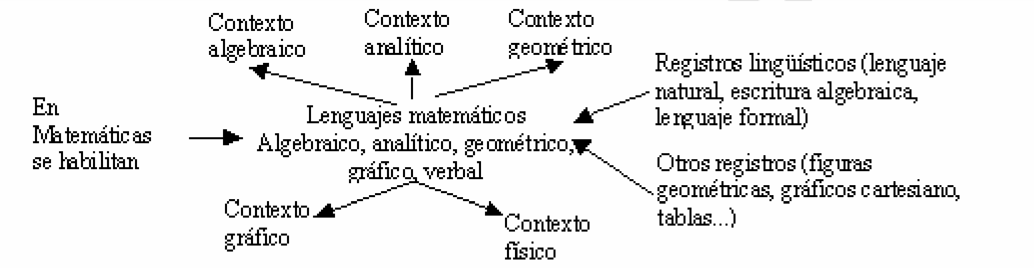
1. No se puede acceder a los objetos matemáticos fuera de un sistema semiótico aunque sea rudimentario. Los objetos matemáticos, no son objetos reales, como pueden ser los de otras disciplinas, por ejemplo la física, que pueden ser manipulables. De aquí la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría, etc.

2. Es necesario no confundir nunca un objeto con su representación semiótica: un número y su escritura, un objeto geométrico y la figura que lo representa, etc.

Es importante tener en cuenta que las representaciones semióticas no son un simple medio de exteriorización de las representaciones mentales para fines de comunicación, sino que también son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento.

La explicación que hace Duval sobre los diferentes sistemas semióticos usados para definir y utilizar conceptos y objetos matemáticos, nos ayuda a establecer cierta relación entre los lenguajes matemáticos, los contextos y los registros de representación semiótica.

En Matemáticas se habilitan diferentes lenguajes matemáticos, como por ejemplo el algebraico, analítico, geométrico, gráfico y verbal. Cada uno de los lenguajes contextualiza el problema, un contexto algebraico, analítico, geométrico, gráfico y verbal, respectivamente. Y, cada lenguaje matemático utiliza unos ciertos registros de representación semiótica que pueden ser del tipo lingüístico (lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal) o de otro tipo (figuras geométricas, gráficos cartesianos, esquemas,...) . Esta descripción está representada en el gráfico siguiente.



Duval, por otra parte, también considera como características esenciales de la actividad matemática: el cambio y la coordinación de los registros de representación. Se entiende por cambio de registro de representación la conversión de la representación de alguna cosa en una representación de esta misma cosa en otro sistema semiótico. Por ejemplo, realizamos un cambio cuando al resolver un problema matemático usamos un gráfico cartesiano para representar una función y en el siguiente paso de la resolución, expresamos con una ecuación algebraica la misma función (o viceversa). Otro ejemplo es cuando transformamos una ecuación en un enunciado en lengua natural (o viceversa).

Por otro lado, como en el dominio del conocimiento matemático se movilizan diferentes registros de representación, también es necesario coordinarlos.

Al cambiar de registro de representación semiótica, es decir, al convertir una representación en otra, en el esquema conceptual asociado a un concepto matemático, no siempre hay consistencia y se pueden producir situaciones de congruencia o de incongruencias.

El tema de las “inconsistencias” seguramente, como profesores, nos ha preocupado alguna vez. No siempre nos resulta fácil erradicar estas ideas, aunque a veces hemos podido usarlas como medio para erradicar otras. Es probable que sepamos muy poco sobre ellas y sobre su rol en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la matemática, pero es importante detectarlas y reconocerlas en nuestros alumnos para intentar emprender con ellas un camino hacia un pensamiento más consistente en nuestros estudiantes.

Un grupo de investigadores en Didáctica de la Matemática, en el año de 1990, enriqueció con sus investigaciones el tema de las inconsistencias. Queremos resaltar aquí el trabajo que realizó Tirosh, quién clasificó las ideas inconsistentes y expuso los posibles orígenes de éstas. La sinopsis que realiza y su clasificación ha sido de especial interés en nuestros estudios.

En particular resulta interesante lo que Tall (1990) y Tirosh (1990) sugieren, y es el mirar las razones de las inconsistencias en tres áreas diferentes: la mente, la matemática y el mensaje.

La mente.

a) *Pueden entran en conflicto el conocimiento y las creencias*. "Un principal origen de las inconsistencias en la construcción cognitiva del estudiante está en la mente del alumno, que es, la manera como adquiere y reconstruye el conocimiento, su percepción de la matemática, su creencia de los que puede darse en este dominio"

b) *Puede haber discrepancia entre el aprendizaje formal, intuitivo y el conocimiento algorítmico*. El conocimiento formal del estudiante puede ser incompatible con su conocimiento algorítmico. Los estudiantes pueden poseer dos puntos de vista intuitivos contradictorios relacionados con un concepto matemático dado. El conocimiento formal del estudiante puede no ser siempre coherente. El conocimiento algorítmico del estudiante puede incluir procesos diferentes e incompatibles para resolver esencialmente la misma tarea.

c) *Puede haber discrepancia entre el esquema conceptual y la definición del concepto*. Las inconsistencias pueden resultar: de la discrepancia entre dos componentes del esquema conceptual o de la definición del concepto, y/o de la discrepancia entre el esquema conceptual y la definición del concepto.

d) *La naturaleza del contexto en que es adquirido el conocimiento puede ser origen de inconsistencias*. El conocimiento viene asociado a las características del contexto. Estudiantes que resuelven el mismo problema en dos contextos diferentes pueden dar soluciones incoherentes en esos problemas; cada solución está basada sobre un fragmento de conocimiento adquirido en un contexto diferente.

e) *La resistencia al cambio conceptual*. Investigaciones argumentan que los nuevos conocimientos que están en conflicto con el conocimiento existente, muchas veces, es compartimentado y entonces no interfiere con el existente. Parece ser que la necesidad de evitar el conflicto cognitivo, lo que hace, tal vez inconscientemente, es que los estudiantes compartimenten sus conocimientos y coleccionen así ideas inconsistentes.

f) *La percepción de la matemática que tiene el estudiante*. No todos los estudiantes tienen la misma percepción de la matemática: pueden verla como una ciencia de estructuras y sistemas formales; una ciencia de demostraciones exactas; un instrumento para otras áreas tales como las ciencias naturales y las tecnologías; un estudio de las relaciones; una estática colección de hechos, de métodos y reglas. Dependiendo de la concepción que tenga el alumno, podrá ser ésta origen de inconsistencias. Si por ejemplo, la matemática es vista por el estudiante como un conjunto de reglas desconectadas, el alumno no tendrá motivación para anticipar la consistencia.

g) La compleja relación que existe entre la matemática y el mundo físico, es también otro origen probable. La relación que hay entre los dos mundos, el matemático y el físico, generalmente no es comprendida correctamente. Resulta que la validez de una afirmación matemática está establecida por la consistencia con una teoría matemática y no con referencia a datos empíricos. Se usan modelos del mundo real para crear e interpretar la matemática y se usa la matemática para describir fenómenos del mundo físico. Y el problema es que si esta relación compleja no es entendida, se pueden percibir los teoremas o definiciones matemáticas como contradictorias con la experiencia diaria.

Como posibles orígenes de inconsistencias pueden ser incluidas en este apartado las siguientes situaciones que aparecen discutidas en Fischbein (1980) (citado en Tirosh):

a) La dificultad de los estudiantes de entender la naturaleza única de la demostración matemática.

b) Las dificultades de los estudiantes en crear y seguir argumentos deductivos.

c) Las tendencias de los estudiantes a formar prototipos limitados de conceptos matemáticos.

d) Las tendencias a "sobregeneralizar" reglas, propiedades, máximos y procesos.

La matemática: naturaleza relativa.

Un alumno puede comprender insuficientemente la naturaleza relativa de la matemática, ya que hay campos de la misma en que un determinado problema no tiene solución mientras que en otros sí. Esta insuficiencia puede ocasionar como resultado una transferencia inapropiada de teoremas, recurriendo solo a una subcultura matemática. También puede dar como resultado operaciones inconsistentes dentro del sistema en que se está trabajando.

El mensaje.

*a) El lenguaje. L*a matemática debe ser enseñada, comunicada: por tanto es necesario formar un lenguaje matemático que permita tal actividad. Pero no necesariamente este lenguaje es el mismo que se usa en la vida diaria. De hecho, muchas veces, el lenguaje empleado en la matemática está en conflicto con las palabras que se usan todos lo días, como lo son grupo, adición, continuo, entre otras. Y los estudiantes usan muchas veces las palabras cotidianas de una manera inapropiada en el contexto matemático, hecho éste que crea conflicto e inconsistencias.

b) El currículo. Es Tall quien sugiere este posible origen de inconsistencias. Considera que la secuencia de presentación de un tema en el currículo matemático es una causa principal de inconsistencias en la estructura matemática de los estudiantes.

c) *Instrucción.* El currículo es un principal origen de inconsistencias; el problema es que no se sabe bien, o mejor dicho, es difícil distinguir entre los efectos del currículo y los de la instrucción en las inconsistencias. Se piensa que probablemente ciertas estrategias didácticas crean más inconsistencias que otras en la mente del estudiante. La instrucción que hace énfasis en conexiones construidas entre el conocimiento conceptual y el procedural, es la que se considera como la que mejor puede eliminar las inconsistencias que la instrucción pueda generar, a diferencia, de la instrucción que hace énfasis en la adquisición de algoritmos y procedimientos que intenten a ayudar a los estudiantes a unir reglas y procedimientos con su conocimiento conceptual.

El caso particular que queremos subrayar y es el que más nos ha interesado en nuestras investigaciones y presentamos en este escrito, es el impacto de las representaciones y los lenguajes matemáticos en el área de la mente, como motivo de inconsistencias o de conflicto, en el caso del infinito.

Volviendo entonces a lo que nos concierne específicamente, sabemos que el problema del uso de ciertas representaciones y en especial de ciertos modelos, que puede ser una figura, un dibujo, especialmente en el dominio del infinito, puede causar ciertas contradicciones entre las deducciones formales y los modelos intuitivos, especialmente esto ha causado el problema de conocidas paradojas.

Fischbein que se ha interesado en la relación del infinito y los modelos tácitos, subraya precisamente la dificultad de librarnos psicológicamente de ciertas imágenes, por ejemplo, por muy entrenados que seamos, aunque sepamos que los puntos matemáticos no tienen dimensiones, nosotros seguimos pensando tácitamente, inconscientemente, en pequeños puntos.

Las enormes contradicciones en el tiempo de Cantor, ante los hallazgos del infinito actual, se debía a la dificultad de librarse de los modelos tácitos primitivos de los razonamientos matemáticos. Y el problema principal de las contradicciones y de las paradojas en el dominio del infinito, es la “no existencia y no influencia tácita de modelos en nuestro razonamiento en el dominio del infinito actual”(Fischbein, 2001).

Desde el punto de vista constructivista, esta última afirmación revela un profundo problema, que es de interés para algunos investigadores: ¿cómo construir o reconstruir el concepto de infinito actual si no tenemos imagen cognitiva de éste o modelo tácito del mismo?. Hasta ahora se han usado ciertas representaciones, y cierto tipo de situaciones problema, en el análisis estándar, para poder introducir o acercarse intuitivamente al infinito en su dualidad potencial-actual, sin embargo los resultados de las investigaciones van dirigidas a mostrar que no necesariamente favorecen un acercamiento intuitivo a esta noción matemática y más bien pueden causar cierto tipo de inconsistencias, o simplemente permanece la “incredulidad” ante la resolución matemática a ciertas situaciones planteadas, como el caso de las conocidas paradojas de Zenón..

Los lenguajes matemáticos, los registros de representación semiótica y el contexto, elementos que de forma relacionada, conforman el enunciado del problema que el alumno tiene que enfrentar, puede causar y de hecho así lo confirman nuestras investigaciones y las de otros investigadores, ciertas contradicciones entre las deducciones formales, los modelos intuitivos y nuestras creencias sobre lo que puede darse en este dominio de conocimiento del infinito.

Respuestas y percepciones de los alumnos

Hemos trabajado en nuestros estudios con cinco problemas inspirados en la primera paradoja de la división, de Zenón y diferenciados por el contexto matemático.

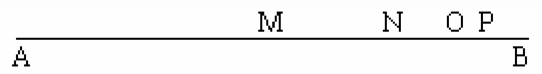
Con estos problemas, presentados a través de un cuestionario a estudiantes de últimos años de secundaria y primeros de universidad, queríamos explorar los esquemas conceptuales de los alumnos asociados a la noción del infinito actual, conocer las ideas de los estudiantes y poner en evidencia el pensamiento intuitivo más o menos consistente con la noción matemática que estamos trabajando. En particular, analizar los efectos que tiene en la percepción de los estudiantes preuniversitarios y universitarios, la presencia implícita del “infinito pequeño” en preguntas planteados en distintos lenguajes matemáticos y contextos matemáticos. Estudiar además qué tipo de conexiones y qué focos de atención presentan y establecen las distintas cuestiones.

Todo esto, como propuesta didáctica, nos ha llevado a formular lo que hemos definido como “tarea de conexión”, la cual podría incidir en el desarrollo de un pensamiento matemático coherente que posteriormente podría impulsar un pensamiento consistente y menos compartimentado. De esto hablaremos más adelante.

Los problemas son los siguientes:

Pregunta 1

Observa la siguiente figura.
Nos muestra un esquema en el que se biseca cada vez el segmento de la derecha, es decir los puntos M, N, O, P, son los puntos medios de los segmentos AB, MB, NB y OB respectivamente.



Si se siguen haciendo más y más bisecciones, ¿crees que es posible llegar a una situación en la que un punto de la bisección coincide con el punto B?. Explica tu respuesta.

Pregunta 2

Se deja caer una pelota desde 2 metros de altura sobre una superficie horizontal. Cada vez que la pelota llega al suelo, tras caer desde una altura h, rebota hasta una altura h/2.
¿Podrías calcular la distancia total recorrida por la pelota?. Explica tu respuesta.
¿Podrías decir cuantos rebotes hará la pelota?. Explica tu respuesta.

Pregunta 3

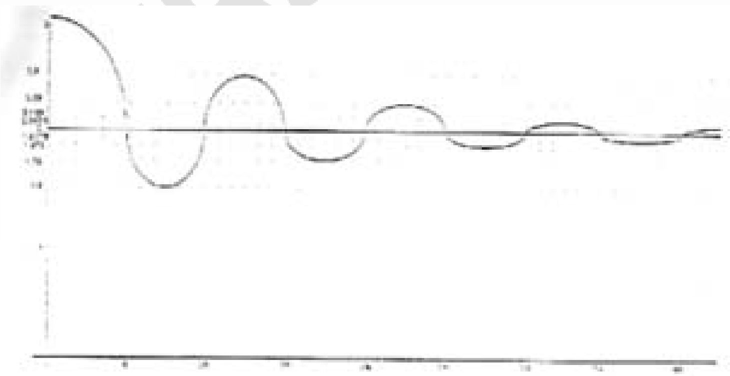
Considera la siguiente suma:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\ldots$$

¿Cuál crees que es el valor de esta suma?. Explica tu respuesta.

Pregunta 4

La siguiente figura representa la gráfica de una función



Describe lo que pasa con la función para valores muy grandes de x. ¿Podrías determinar el valor de la función cuando x se hace muy grande?. Explica tu respuesta.

Pregunta 5

Considera la siguiente ecuación:

$$y = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

¿Podrías decir para qué valor de n resulta $y = 2$?. Explica tu respuesta.

Recordemos que la paradoja de la dicotomía pone en superficie dos aspectos. Si nos queremos mover del punto 0 al 1 de la recta podemos hacerlo con un procedimiento finito, o podemos utilizar un procedimiento infinito, moviéndonos ½ unidad, después ¼ unidad, y así sucesivamente. Si se ignora la posibilidad de que hay puntos distintos a una distancia infinitesimal entre uno y otro, es evidente que ambos procedimientos conducen al mismo punto. Este hecho está expresado en la "igualdad" $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$, que Zenón consideraba paradójica. El hecho es que asumía "a priori" que no existía el "infinito actual" y entonces que ningún proceso infinito podría considerarse completo (Rucker, 1995).

La segunda pregunta, igual que la versión de la primera paradoja de Zenón, enfrenta al estudiante con una situación que, en nuestro mundo concreto y finito, es impensable: "la pelota hará un número infinito de rebotes". La quinta pregunta usa la misma suma de la pregunta 3 pero transformada en una ecuación y la gráfica de la cuarta pregunta, respeta la misma divisibilidad infinita en mitades de las preguntas, 1, 2 y 3, originando las mismas paradojas. En particular las 5 preguntas presentan una misma situación en cuanto a procesos cognitivos, que en lenguaje de Nuñez (1994) presentan un infinito pequeño que implica una coordinación simultánea, el creciente número de divisiones y el decreciente "espacio" que se recorre o "resultado parcial" que se opera, llamados procesos de convergencia y divergencia.

Cada problema, en su enunciado, tiene una parte que usa la lengua natural como registro lingüístico al explicar el problema y la cuestión planteada, y otra parte en que se usa otro registro de representación semiótica. Como se puede observar, los registros de representación semiótica (indicamos R.R.L. para indicar registro de representación lingüístico y R.R. registro de representación no lingüístico) que aparecen en el enunciado son:

1. R.R.: figura geométrica (segmento de recta)
2. R.R.L.: lengua natural
3. R.R.L.: numérico (suma infinita)
4. R.R.: gráfico cartesiano (función cartesiana)
5. R.R.L.: escritura algebraica (ecuación con suma infinita)

Las preguntas están expresadas en lenguajes matemáticos distintos y con registros semióticos distintos. Cada uno de estos registros alude, incide, fomenta, convence, permite que surjan en la mente del estudiante, concepciones, elementos y experiencias matemáticas específicas, fruto de sus limitaciones o de sus oportunidades, en el sentido de su característica de producción. Es decir, cuando nos referimos a "oportunidades" hacemos alusión al aspecto funcional de cada registro, que permite manifestar las tres funciones cognitivas fundamentales: comunicación, tratamiento y objetivación.

Para hacer el análisis, descriptivo e interpretativo por pregunta, el primer paso fue el de familiarizarnos con las respuestas de los estudiantes. A partir de repetidas lecturas fuimos tratando de buscar elementos comunes, características que nos permitieran establecer alguna organización de éstas, para establecer algunas categorías y facilitar el análisis. Optamos por usar un sistema de representación de las respuestas, las llamada redes sistémicas (Bliss, Monk, y Ogborn, 1983), que permiten mirar todas las respuestas efectivas de los alumnos encuestados. Describir y analizar cualitativamente las respuestas de los estudiantes nos permitió acercarnos a los esquemas conceptuales de los alumnos poniendo en evidencia las limitaciones y oportunidades que ofrecían los registros de representación usados en los problemas, a modo de ejemplo a continuación presentamos lo evidenciado en tres de las preguntas y planteadas en el estudio con estudiantes de 16 y 17 años (Garbin, 2000).

Pregunta 1

- La representación del segmento que se hace el alumno puede ser física, en sentido de medición. Es decir, como un espacio finito y con medida, lo cual tiene como consecuencia un proceso finito de bisección.

- Cada segmento resultado de cada bisección puede ser identificado por el estudiante como un espacio geométrico, una distancia numérica o como la cardinalidad de la bisección. Cada identificación puede llevar a un proceso finito o infinito de bisecciones.

- Los puntos resultados de cada bisección M, N, O, P, etc., pueden ser considerados como una marca física, con medición. El grosor del lápiz puede ser determinante para dar el número de bisecciones posibles (finitas).

- El segmento puede ser considerado como un conjunto de infinitos puntos, por tanto el proceso de bisección en este caso es infinito. La coincidencia del punto de bisección con el punto extremo B no es necesariamente aceptada.

- Para dar una respuesta no necesariamente es tenido en cuenta el proceso infinito de bisección. Para algunos alumnos se hace relevante que B es punto extremo del segmento y por tanto geométricamente no puede ser punto de bisección.

- El proceso geométrico de bisección, el cálculo de M, N, O, P, etc., puede ser considerado como un proceso numérico asignándole una medida al segmento.

- **Pregunta 2**

- Puede percibirse el problema como parte del mundo físico, real y concreto. La experiencia es compatible con la experiencia real dado que el objeto involucrado es una pelota. La infinitud no está presente. Puede producir consideraciones en los estudiantes del tipo: fórmulas físicas, velocidad, gravedad, tiempo, presión, lugar, masa, elasticidad de la pelota, fuerza de rozamiento.

- Las respuestas de los estudiantes son sensibles al nuevo registro de representación semiótica que usa el alumno al convertir el enunciado del problema que está escrito en lenguaje natural. La limitación del problema está sujeto a la limitación del nuevo registro de representación semiótica empleado por el alumno, dibujo del recorrido de la pelota, cálculo de la distancia recorrida por la pelota, la suma infinita o infinita del recorrido, influenciado éste por el objeto: la pelota. La finitud o infinitud del proceso dependerá de cada representación, así mismo si la infinitud es actual o potencial.

- Generalmente se necesita una conversión de representación, la mayoría de las veces el dibujo de la situación descrita en el problema.

- **Pregunta 3**

- No siempre es aceptada la cardinalidad infinita de los sumandos. Puede haber omisión de los puntos suspensivos y calcularse la suma con los cinco sumandos.

- La suma es infinita no sólo por los puntos suspensivos, como expresión algebraica, sino como un proceso numérico: la posibilidad de dividir infinitamente al número 1.

- Cada uno de los sumandos puede no ser caracterizado como la mitad del anterior y por lo tanto la cantidad numérica que se va sumando no siempre es considerada.

- La expresión infinita de la suma puede aludir a considerar que no es posible sumar una cantidad infinita de términos o, que el resultado siempre es aproximado. En el primer caso el tipo de sumandos no es tenido en cuenta.

- La expresión infinita de la suma puede aludir a considerar que el proceso no es acotado, alude visualmente a un infinito potencial, induciendo a una respuesta infinita pero no cómo número sino como indeterminación.

- Puede ser evadida la suma infinita, observando sólo el comportamiento de la sucesión $1/2^n$.

No sólo hemos trabajado con alumnos de secundaria, también con estudiantes de los primeros años de Universidad, y podemos decir que tanto unos como otros, perciben al infinito en las preguntas del cuestionario de manera distinta, algunos se sitúan ante una percepción potencial del infinito y no consideran que el proceso es completo, y otros "aceptan" la completes del proceso infinito y perciben al infinito como actual.

Los alumnos más avanzados muestran que si bien saben calcular una suma infinita (aunque no la calculen), reconocen si es convergente o divergente, y conocen y saben calcular un límite al infinito, algunos aceptan la situación de que en el infinito se alcanza al punto límite y otros no. El proceso infinito implícito para algunos alumnos es completo, para otros no lo es y un menor número (y en mayor número aquellos estudiantes sin conocimientos de cálculo diferencial e integral) mantuvieron esquemas finitos o físicos, a pesar de la infinitud del proceso. Pero las respuestas no se mantienen "estables" o coherentes entre las preguntas. Las razones son varias y están delimitadas por el tipo de lenguaje, representación y contexto.

Nos podemos preguntar sobre qué tipos de argumentos usaron los estudiantes para contestar a las preguntas. Curiosamente se han usado los mismos argumentos tanto para responder afirmativamente o negativamente a las preguntas. Con lo cual este tipo de razonamientos no necesariamente llevan a aceptar la situación límite. Los alumnos contestaron las preguntas:

a) Dejándose llevar por la intuición o por la contextualización de la pregunta

b) Con argumentos que recurren a la división infinita en mitades, posibilidad de poder dividir infinitamente, o a la existencia de infinitos puntos en una recta.

c) Sumando y/o aproximando valores

d) Aceptando sin demostración, la convergencia o divergencia de la serie $1/2^n$. En particular, de 89 alumnos con conocimientos previos de cálculo diferencial e integral, sólo dos de éstos prueban, a partir del cálculo del límite de las sumas parciales, que la serie es igual a 1, y ninguno usa alguna prueba de convergencia.

En general los estudiantes usaron pocos argumentos matemáticos formales para responder a las cuestiones, y es un menor número de los alumnos, los que nombran los conceptos de límite, sucesiones o series (de los que tenían como conocimientos previos estos conceptos). Por otra parte sólo 5 alumnos de los 89 antes mencionados, relacionan su respuesta con alguna de otro problema.

A partir del análisis, de la clasificación y tabulación de las respuestas de los alumnos, y tomando en cuenta los procesos cognitivos formulados por el investigador psicólogo Nuñez (1994) y explicitados anteriormente, construimos un instrumento de análisis que nos permitió establecer tres líneas de coherencia llamadas: finitista (o de evasión de infinitud), actual y potencial. Con este instrumento pudimos evidenciar la estabilidad o inestabilidad de las respuestas de los alumnos en los distintos problemas.

Son muy pocos los alumnos, con los que hemos trabajado, que muestran una percepción actual, potencial o finitista en todos los problemas, manteniendo una línea coherente o estable en sus respuestas según su concepción y percepción del infinito, y esto a pesar de que todas las preguntas presentan una situación cognitiva similar (proceso de convergencia y divergencia).

Por ejemplo del grupo de alumnos universitarios, sólo un estudiante acepta que el proceso infinito es acabado en todas las preguntas, y dos alumnos mantienen en todas sus respuestas una concepción potencial del infinito. El resto de estudiantes se mantienen con respuestas actuales, potenciales, o finitistas dependiendo de la pregunta.

Un hecho interesante a resaltar es que del grupo de estudiantes que mantienen principalmente esquemas finitos, no aparece la posibilidad de la completes del proceso en ninguna de las preguntas. En caso contrario en el grupo donde sí aparece y se acepta que se alcanza al punto límite, no hay casi presencia de respuestas finitistas (o de evasión de finitud), sólo un estudiante presenta una respuesta de este tipo. Esto hace pensar que estos estudiantes se encuentran en un momento distinto en el proceso de transición del PME al PMA.

Todos estos datos, en grandes rasgos, hacen evidente la naturaleza conflictiva de las intuiciones del infinito, la influencia de los lenguajes y contextos en las percepciones de los estudiantes, y la persistencia de la imagen informal aunque ciertas ideas formales hayan sido presentadas a los estudiantes. Es probable que en el esquema conceptual de los estudiantes se mantengan en tensión el infinito "perceptual" y las imágenes formales asociadas a los conceptos formales del cálculo diferencial e integral. Y será la reconstrucción de estos conceptos formales y la construcción del concepto formal del infinito actual la que podría disminuir esta tensión.

Conexiones y tarea de conexión

Una habilidad importante para mantener respuestas consistentes ante varias representaciones de un mismo problema, o con situación cognitiva similar como la que estamos discutiendo, es tener conciencia, saber establecer conexiones y reconocer las relaciones, similitudes y/o diferencias dadas por los diferentes lenguajes y representaciones. Por ejemplo, en los problemas 1, 3 y 4, los alumnos con que hemos trabajado expresan relaciones de similitud entre las preguntas, y focalizan su atención, en distintos aspectos:

a) En el planteamiento del problema: la similitud está en lo que plantean los problemas o en lo que se pide hacer. A(33)[5]: *Supongo que el planteamiento de los tres casos es probar el concepto de tendencia.* A(59): *Los tres problemas son distintas maneras de plantear la misma situación.*

b) El proceso de convergencia y divergencia implícito en cada pregunta (aceptando o no la situación límite). A(16): L*as funciones van haciendo que sea un valor más y más pequeño, además de que su planteamiento es un valor de que a medida que crece, genera un resultado que tiende a otro valor más pequeño.*

c) El concepto implícito, la noción de infinito, o el reconocimiento que se trata del mismo concepto o tema en todas las preguntas. A(38): *Los tres problemas se relacionan con el infinito.*

[5] A(33) indica Alumno cuyo cuestionario tiene número 33. Los estudiantes citados en este párrafo son del grupo de alumnos Universitarios.

d) Los conceptos asociados de límites, sucesiones y/o series. A(9): *Tienen como fundamento las definiciones de límites, sucesiones y series.*

e) Resultados: puede ser el tipo de resultado o el procedimiento o modo de resolución del problema. A(22): *La resolución de los tres en forma exacta es imposible*

f) Encuentran similitud en algunas preguntas y/o semejanzas y diferencias entre los problemas. A(12): *Solo hay similitud entre el problema 1 y 2 a manera de fracciones.*

g) Afirman que están relacionadas con la divisibilidad en mitades.

Es importante subrayar que no es reconocida en general por los estudiantes la situación cognitiva similar de los problemas, sólo el 6% del grupo de estudiantes universitarios encuestados, explicita el proceso de convergencia y divergencia. Por otra parte, al considerar las relaciones de semejanza o diferencia que expresan los alumnos y compararlas con las que daría un matemático o un psicólogo, parece que estas últimas no son tan evidentes, necesitan de una habilidad adicional y procesos de pensamientos específicos.

Algunos autores han hablado de la importancia de la "conexión", por ejemplo Dreyfus (1990) considera cuatro etapas en los procesos de aprendizaje, una de ellas es el hacer conexiones entre las representaciones paralelas. En los Principios y Estándares para la Educación Matemática del NCTM (2000), se plantea el estándar sobre "conexiones": "los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

1) reconocer y usar conexiones entre ideas matemáticas

2) comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras para producir un todo coherente".

Ya hemos hablado de ciertos orígenes de inconsistencias, hemos dicho que en el área de la Instrucción ciertas estrategias de enseñanza pueden causar inconsistencias. Pero también, hay modelos de enseñanza que pueden ayudar al estudiante a resolver las inconsistencias, uno de ellos es la conocida enseñanza por analogía.

Explica Tirosh (1990) que para usar la enseñanza por analogía, se necesita una condición previa y es que estemos frente a un estudiante que responda de manera diferente a dos tareas análogas. El reto del profesor es encontrar una primera tarea y a partir de ella construir una serie de pasos hacia la tarea objetivo (es decir a la que queremos llegar) para convencer al estudiante de la validez de la analogía. "Una secuencia instruccional que use la analogía puede ser planeada de tal manera que los estudiantes sean llevados a comprender que una tarea "objetivo" demanda una respuesta similar a la de la tarea primera, sin que ellos lleguen a tomar consciencia de las inconsistencias presentes en sus respuestas iniciales y sin haber expresado explícitamente, o examinado inicialmente, sus respuestas incorrectas de la tarea objetivo (...). La enseñanza por analogía ofrece un método que no demanda por parte de los estudiantes el apreciar los elementos en conflicto en una situación como tal, no requiere de la comprensión que "algo es incorrecto", o a participar activamente en criticar las propias ideas".

Nos podemos entonces preguntar, en situaciones planteadas como la nuestra, qué significaría potenciar la habilidad cognitiva de la conexión, en nuestro caso para la búsqueda de coherencia y una percepción libre de influencias de las representaciones; y cómo se traduciría una enseñanza por analogía en situaciones en que la analogía es cognitiva, como es el caso de los problemas planteados. Nuestros estudios nos han ayudado a definir y describir lo que entendemos, por tarea de conexión, y a evidenciar las potencialidades que ésta puede tener si el ejercicio docente es continuado.

Supongamos que tenemos un problema matemático expresado de dos maneras diferentes (puede ser cualquier par de problemas de nuestro cuestionario). Tenemos el problema A y el B. Cada problema tiene un lenguaje matemático distinto para ser expresado, lo que genera un contexto propio al mismo. (Fig. 1). En cada uno se movilizan registros de representación semiótica que podrían resultar iguales o diferentes.

Durante la actividad matemática que permite la solución del problema, se realiza la tarea de conversión y de coordinación, si es necesaria[6], y de forma congruente o no, en cada uno de ellos.

Se accede al objeto matemático a través de su representación. En nuestro caso la percepción podría ser la del infinito actual, aunque como hemos visto, algunos de los registros de representaciones semióticas han inducido a los estudiantes a representarse como objeto a un infinito potencial o a una situación de finitud. Por este hecho, en el gráfico (fig. 1), la figura que indica la representación del objeto matemático vinculado al problema A aparece de manera disjunta al del problema B, aunque la noción matemática pueda ser la misma según el caso.

La situación teórica no cambiaría si ambos problemas utilizasen el mismo lenguaje matemático.

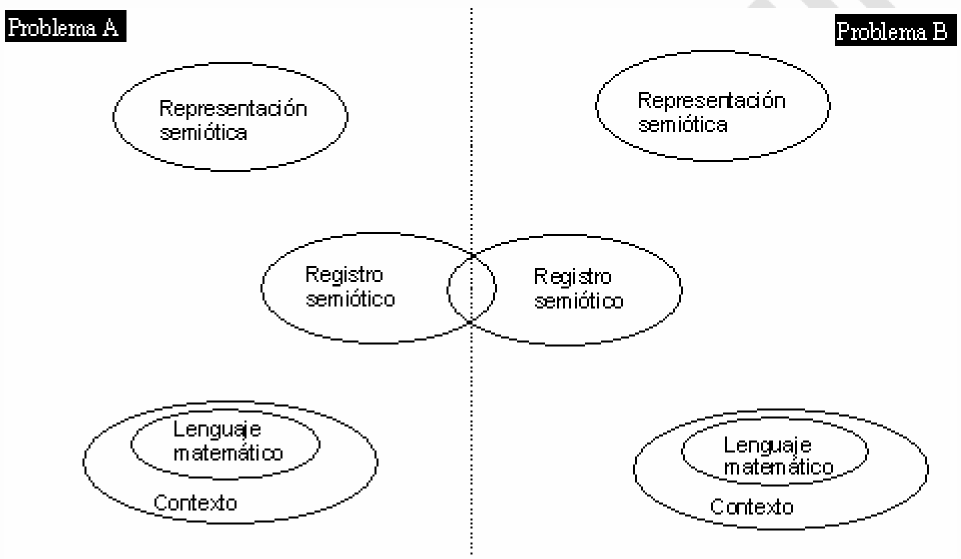


Figura 1

Aunque los elementos estructurales (lenguaje, sistemas semióticos, símbolos) son diferentes en los dos problemas (no necesariamente tienen porque serlo), el concepto matemático involucrado es el mismo, o los problemas presentan una situación similar en cuanto a procesos cognitivos asociado a la noción matemática involucrada (como es el caso de nuestros problemas y en el sentido que hemos explicitado). Creemos que es importante, como parte de la actividad matemática, saber identificar esta situación y saber utilizarla, ya que podría permitir respuestas asociadas coherentes y disminuir la compartimentación del conocimiento. Nuestras investigaciones han mostrado que no es necesariamente suficiente reconocer que en los problemas está presente el mismo proceso cognitivo de convergencia y divergencia, para obtener respuestas asociadas, es necesario además, saber utilizar y aprovechar la comprensión y el proceso de resolución utilizado en los diferentes problemas.

A partir de este marco usamos la palabra “conexión”. Como se dijo antes, Dreyfus considera como una etapa en el proceso de aprendizaje las conexiones entre las representaciones paralelas.

De manera análoga queremos entender las conexiones, pero agregando una tarea que se realiza

[6] Si el problema es intuitivo probablemente no necesite de cambio de registro de representación, puede darse una respuesta directa.

en la actividad matemática durante el proceso de aprendizaje de un concepto matemático, la "tarea de conexión". En este caso la conexión se establece entre las representaciones (en el caso que estamos tratando, entre las representaciones correspondientes a cada problema). (Fig. 2).

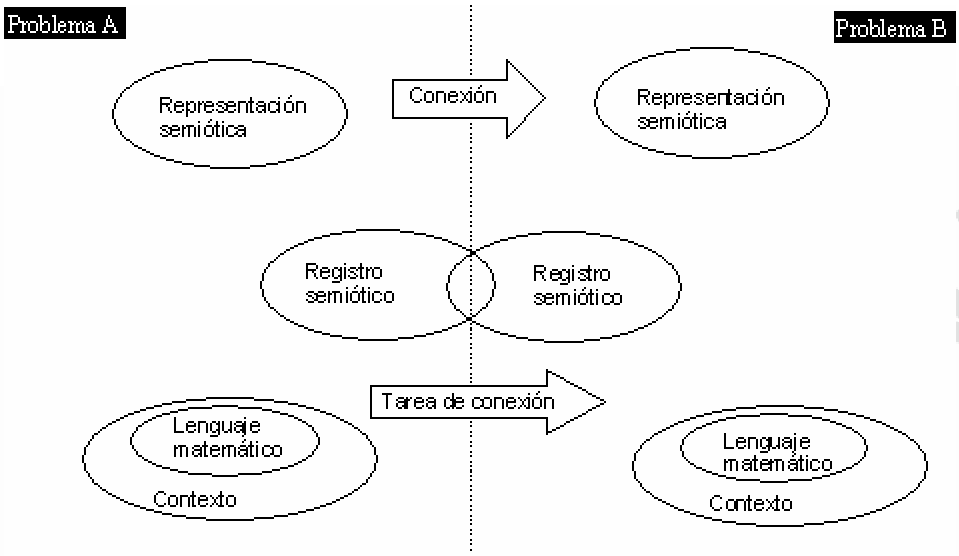


Figura 2

La "tarea de conexión" consistiría en identificar y establecer relaciones entre los problemas, en cuanto a lenguaje matemático y registro de representación semiótica se refiere, y reconocer los contextos (conceptual y global) de los problemas, de manera que permita una influencia mutua dando lugar a respuestas asociadas coherentes a los problemas.

Podemos ilustrar lo anterior con el siguiente ejemplo. Pensemos en los problemas 1 y 3. La tarea de conexión consiste en reconocer que en ambas preguntas está presente la divisibilidad infinita en mitades, que cognitivamente hablando requiere un proceso de divergencia y convergencia, pero tales que, en el primero se utiliza el lenguaje geométrico y en el tercero, el analítico. Entre los registros de representación semiótica, figura geométrica: segmento (pregunta 1) y escritura numérica: suma infinita (pregunta 3), la tarea de conexión consiste en reconocer los siguientes aspectos:

- Si se considera el segmento de dimensión 1, es decir el segmento real [0,1], cada punto del proceso de bisección se puede identificar con cada uno de los sumandos de la suma infinita de la pregunta 3.

- Que la suma infinita, numéricamente representa la suma infinita de los segmentos que son resultado de las bisecciones y que por tanto una solución explícita de la serie es la respuesta correcta a la primera pregunta.

- Una respuesta de la pregunta 1 debe ser asociada y coherente con la respuesta a la pregunta 3.

En el estudio de Garbin (2000) tuvimos la experiencia de entrevistar a 6 alumnos de secundaria. De las 5 preguntas, se escogieron 3 para que sean resueltas en una primera parte de la entrevista: 1, 3 y 4, ya que nos parecían preguntas representativas. Optamos por un tipo de entrevista semiestructurada y dirigida. El hecho de que sea semiestructurada permite que, a medida que ésta progrese, el entrevistador con otras preguntas sugeridas en el diálogo pueda matizar, redirigir la información requerida o, en caso de necesidad replantear otras preguntas. Es una entrevista dirigida en el sentido de que optamos por preguntas que permiten acompañar al estudiante a establecer cierto tipo de conexiones entre las cuestiones. Es importante hacer notar que aunque las preguntas están dirigidas para que el alumno haga un proceso que le permita hacer la tarea de conexión, por parte el entrevistador no llega a ser una intervención didáctica. Esto permitiría reflexionar o estudiar, tal vez en otro estudio, cuál sería una intervención didáctica adecuada. En este sentido podemos permitirnos hacer algunas consideraciones docentes sobre esta tarea y de las cuales hablaremos más adelante.

De los 6 alumnos seleccionados y entrevistados, 5 terminaron mostrando respuestas coherentes, y para ello ha sido "fundamental":

a) reconocer en todas las preguntas el proceso de división infinita, con los dos tipos de iteraciones, la divergente y convergente;

b) establecer la relación y conexión entre las preguntas a través de la sucesión numérica.

Sin embargo, el hecho de que hayan mostrado respuestas coherentes no quiere decir que todos hayan evidenciado la misma concepción o percepción del infinito. En la siguiente tabla podemos observar de una manera global la información obtenida, con relación a la concepción o percepción del infinito y situación de incoherencia o coherencia.

ALUMNO Nº	**CONCEPCIÓN/ PERCEPCIÓN**	**COHERENCIA/ INCOHERENCIA**
2	Conflicto-paradoja, no concluye si la situación es potencia o actual	Coherente
25	Actual en la 1ª y 3ª pregunta y finitista en la 2ª y 4ª	Incoherente
42	Potencial	Coherente
47	Actual	Coherente
58	Potencial	Coherente
76	Potencial	Coherente

Un aspecto relevante que muestra esta situación es que aunque si bien el primer paso debe ser la búsqueda de coherencia, para caminar hacia un pensamiento consistente con las ideas matemáticas, en el caso específico del infinito presenta una complejidad mayor.

Si el interés es construir y encaminar al estudiante hacia una concepción actual del infinito, se hace necesario introducir los elementos formales de este concepto; ya hemos visto que aunque la representación aluda a un infinito actual y se intente un acercamiento intuitivo, no es suficiente para que éste sea totalmente "aceptado".

A través de la entrevista hemos identificado que la tarea de conexión puede favorecer otras situaciones además de la coherencia, las cuales enumeramos a continuación:

a) La aparición de un conflicto y la conciencia de la paradoja en la mente del estudiante cuando hay por lo menos una respuesta correcta en algunos de los problemas. Algunos de ellos no se habían percatado de la paradoja a qué llevaba el razonamiento de los problemas. Sin embargo, después de relacionarlos y poder hacer las conexiones matemáticas entre ellos, al comparar la respuesta correcta con las no correctas (matemáticamente hablando), se les hacía presente la paradoja.

b) La "autobúsqueda" de coherencia, de manera consciente o no, en las respuestas y afirmaciones relacionadas con las preguntas (a través de la tarea se llega a una mayor conciencia de la semejanza de la situación planteada en cada problema). De esta manera la tarea de conexión puede ayudar a regular y completar los procesos que son necesarios para la comprensión de cada problema. De forma espontánea los mismos estudiantes se exigían una respuesta coherente después de identificar la relación existente en los problemas y después de haber hecho la tarea de conexión matemática entre ellos.

c) La identificación del obstáculo cognitivo, creencia errónea u error conceptual que no permite dar una respuesta consistente al estudiante. Esto permite la intervención didáctica o docente adecuada según el tipo y grado de profundidad de la inconsistencia. Esta tarea permitió, en la mayoría de los casos, "solventar" las limitaciones de los registros de representación e influencia del contexto, eliminando aquellas respuestas fundamentadas en la representación y dejando en evidencia los aspectos antes mencionados. Hubo un solo caso en que el entrevistador no consiguió inducir, en su totalidad, la tarea de conexión; las posibilidades y conciencia de la limitación de algunos de los registros de representación no han sido explotados en su totalidad y el alumno se ha dejado llevar por la representación del problema.

d) Diferenciar la representación del objeto del objeto matemático, en especial encontrar los focos de atención que los distintos contextos requieren mitigando la influencia de los lenguajes y representaciones.

Duval habla de la importancia de la conversión y de la coordinación de los registros de representación semiótica en la actividad matemática. Nosotros también subrayamos la importancia de la tarea de conexión en la actividad matemática. Así como se hace necesario intervenir didácticamente en las tareas de cambio y coordinación de los registros de representación, pensamos que es importante tener en cuenta, didácticamente, la tarea de conexión.

Un profesor, al resolver en una práctica varios problemas que son representados de diferente manera pero que presentan la misma noción matemática (o una situación cognitiva similar en cuanto al proceso implícito matemático), tendrá que intencionadamente favorecer la tarea de conexión, para ayudar a que los alumnos establezcan las conexiones necesarias, de manera que no resulten problemas aislados. Se sugiere comenzar con el reconocimiento de las similitudes y diferencias de representación y registros de representación: tipo de lenguaje y contexto, tipo de registro de representación usado en cada uno de ellos (limitaciones y oportunidades de éstos), y establecer las conexiones entre los sistemas semióticos presentes y los registros. Pensamos que es una manera para incidir en el desarrollo de un pensamiento coherente que posteriormente podría impulsar un pensamiento consistente con las ideas matemáticas y menos compartimentado. De igual manera, en las guías de estudio o en las secciones dedicadas a problemas al final de un apartado de un libro en que se haya dedicado a un concepto matemático específico, sería necesario hacer explícitas y presentes algunas indicaciones o preguntas que ayuden a establecer las conexiones entre los problemas o ejercicios presentados.

A modo de conclusión

El paso del PME al PMA implica una transición que requiere un reconstrucción cognitiva, y el esquema conceptual de los estudiantes no necesariamente se mantiene coherente en todo momento y los alumnos pueden evocar imágenes contradictorias en momentos diferentes, y cuando se introducen conceptos formales empiezan a entrar en contradicción la imagen informal con la formal. En el dominio del infinito se mantiene en tensión el infinito "perceptual" y el infinito "formalizado". En esta etapa de transición, aún no se ha formalizado el infinito, por tanto el alumno construye conceptos formales, como los del cálculo diferencial e integral, manteniendo la tensión entre el infinito "perceptual" y la "imagen formal" de dichos conceptos. También empieza a aparecer, por la influencia de las representaciones y conceptos, la aceptación o no de un infinito asociado a la idea de totalidad, de completes y de unidad, que llamamos actual. Esta etapa es también de transición de lo finito, infinito potencial a infinito actual (como totalidad) encaminándose hacia la formalización del infinito cantoriano. Los lenguajes matemáticos, el contexto y las representaciones tienen un gran impacto sobre las percepciones del infinito y sobre nuestros razonamientos. Ante distintas representaciones de un mismo problema los alumnos presentan ideas inconsistentes, y en el caso particular tratado en este escrito presentan incoherencias o respuestas inestables, ante un mismo problema (desde el punto de vista cognitivo) pero representado de forma distinta. Los estudiantes pueden percibir un infinito actual o potencial, y hasta dar respuestas finitistas dependiendo del problema, no hay conciencia de las propias incoherencias, ni de la similitud fundamental entre los problemas, los focos de atención de los alumnos son distintos y no son los que permiten realmente distinguir el objeto de su representación. La dificultad de establecer las conexiones convenientes no permite el dar respuestas coherentes y por ello pensamos es importante tener en cuenta didácticamente la tarea de conexión y hemos explicado en qué puede favorecer. Una manera para inducir esta tarea podría ser la de comenzar con el reconocimiento de las diferencias de representación: tipo de lenguaje y contexto, tipo de registro de representación semiótica usado en cada uno de ellos, y establecer las conexiones entre los sistemas semióticos presentes y los registros. Es una manera de incidir en el desarrollo de un pensamiento coherente que posteriormente podría impulsar un pensamiento consistente y menos compartimentado. Creemos que no debería ser una labor puntual, sino que debería ser una práctica constante propia de la actividad docente durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por último, terminamos recuperando una idea expresada al principio del texto e iluminada por lo discutido, la importancia de no favorecer a lo largo de la escolaridad posturas cerradas y erradicadas en situaciones que no permiten dar paso a lo infinito a partir de los finito; una insistencia extrema de lo concreto y finito en las primeras etapas, y en las siguientes, el trabajar con frecuencia una matemática o demostraciones que "ocultan" o no muestran con claridad los procesos infinitos involucrados y el papel que juega el infinito.

Referencias bibliográficas

Aline, R. y Schwarzenberger, R. (1990). Research in teaching and learning mathematics at an advanced level. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/Boston/London.

Bliss, J., Monk, M. y Ogborn, J. (1983). *Qualitative Data Analysis for Educational Research*. Croom Helm. London.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics 3* (2), 9-19.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics,* 2-3 (48), 309-329.

Fischbein, E., Tirosh, D. y Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics,* 10, 2-40.

D'amore, B. (1997). L'infinito in didattica de la matematica. *Matematica e la sua Didattica* 3, 289-305.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P. y

Kilpatrick, J. (Ed), *Mathematics and Cognition* (pp 113-134). Cambridge University Press.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des nathématiques?. *Recherches en Didactique desMathématiques 6* (3), 349-382.

Duval, R. (1999). L'Apprendimento in matematica richiede un funzionamiento cognitivo specifico?. *La matematica e la sua Didattica 1*, 17-42.

Garbin, S. (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona. España.

Garbin, S. (2003). Incoherencias y conexiones: el caso del infinito actual con estudiantes universitarios. Primera fase del estudio. *ALME*, Vol. 16.

Garbin, S (2005). Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo. *Enseñanza de las Ciencias*, 23.1, 61-80.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual: Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. *Suma*, 38, 53-67.

Moreno, L.E. y Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics 22* (3), 211-231.

Nuñez, E. (1994). Subdivision and small infinities Zeno, paradoxes and cognition. *Actas del PME 18* (3), 368-375.

NCTM (2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Edición española por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Rucker, R. (1995). *Infinity and the Mind*. Princeton University Press.

Sierspinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics 18*, 371-397.

Tall, D. (1980). The notions of infinite measuring numbers and its relevance to the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics 11*, 271-284.

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the learning of calculus and analysis. *Focus on Learning Problems in Mathematics 12*, 49-64.

Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. *Actas del PME 19*, Vol. 1, 61-75.

Tall, D. (2001). Natural and Formal Infinities. *Educational Studies in Mathematics 48* (2/3), 199-238.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12* (2), 151-169.

Tirosh, D. (1990). Inconsistencies in students'mathematical constructs. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 111-129.

Tirosh, D. (1991). The role of students'intuitions of infinity in teaching the cantorian theory. En Tall, D. (Ed), *Advanved Mathematical Thinking* (pp. 199-214). Kluwer

Academic Publisher. Dordrecht/Boston/London.

Tsamir, P. y Tirosh, D. (1994). Comparing infinite sets: intuitions and representations. *Actas del PME 18*, 4, 345-352.

Dra. Sabrina Garbin Dall'Alba
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
Universidad Simón Bolívar
Caracas, Venezuela

Email: sgarbin@usb.ve