Significados de la probabilidad en la educación secundaria*

Carmen Batanero [1]

RESUMEN

En este trabajo partimos de un modelo teórico sobre el significado de los objetos matemáticos, en el que se consideran seis elementos diferenciados y se distingue entre el significado dado al objeto en una cierta institución de enseñanza y el personal, adquirido por un alumno dentro de la institución. Utilizamos estas ideas para analizar los distintos significados históricos de la probabilidad y cómo han sido tenidos en cuenta en la enseñanza secundaria. Dicho modelo también nos permite tener también una visión semiótica del razonamiento matemático e interpretar algunos errores frecuentes al resolver problemas de probabilidad en términos de conflictos semióticos. Finalizamos con algunas recomendaciones para mejorar la enseñanza de la probabilidad.

• **PALABRAS CLAVE**: Significado y comprensión, probabilidad, desarrollo histórico, conflictos semióticos

ABSTRACT

We summarise a model to analyse the meaning of any mathematical concept where we distinguish five interrelated components and also distinguish the meaning that for a given concept has been proposed or fixed in a specific teaching institution, and the meaning given to the concept by a particular student in the institution. These ideas are used to analyse the different historical meanings of probability and how they were taken into account in the teaching of probability at secondary school level. The model also provides a semiotic view of mathematical reasoning and serves to interpret some errors in solving probability problems in terms of semitic conflicts. We conclude with some suggestions to improve the teaching of probability.

• **KEYWORDS**: Meaning and comprehension, probability, historic development, semiotic conflicts

Fecha de recepción: Noviembre de 2004 /Fecha de aceptación: Marzo de 2005

*Este trabajo forma parte de los proyectos HA2002-0069, SEJ2004-00789, Madrid, MCYT y FQM-126, Junta de Andalucía.

[1]Universidad de Granada, España.

RESUMO

Neste trabalho partimos de um modelo teórico sobre o significado dos objetos matemáticos em que se consideram seis elementos diferenciados e se distingue entre o significado dado ao objeto em uma certa instituição de ensino e ao que o aluno realmente adquiriu dentro dessa instituição. Utilizamos estas idéias para analisar os distintos significados históricos da probabilidade e como isso tem acontecido no ensino fundamental e médio. O modelo nos permite também uma visão semiótica do raciocínio matemático e interpretar alguns erros freqüentes ao resolver problemas de probabilidade em termos de conflitos semióticos. Finalizamos com algumas recomendações para melhorar o ensino de probabilidade.

- **PALAVRAS CHAVE**: Significado e compreensão, probabilidade, desenvolvimento histórico, conflitos semióticos

RÉSUMÉ

Dans ce travail on part d' un modèle théorique sur le signifié des objets mathématiques dont on considère six éléments différenciés et on distingue entre le signifié donné à l' objet dans une certaine institution d' enseignement et le signifié acquis par l´élève dans l' institution. On utilise ces idées pour analyser les différents signifiés historiques donnés au concept de la probabilité et comment ils ont été considérés par l' enseignement au collège. Ce model nous permet aussi avoir une vision sémiotique[2] du raisonnement mathématique et interpréter quelques erreurs fréquents au moment de résoudre problèmes de probabilité en terme de conflits sémiotiques. Finalement, on conclue avec certaines recommandations pour améliorer l' enseignement de la probabilité.

- **MOTS CLÉS**: Signifié et compréhension, probabilité, développement historique.

1. Introducción

Aunque la enseñanza de la probabilidad ha estado presente en los currículos escolares en los últimos veinte años, notamos una tendencia reciente a renovar su enseñanza, volviéndola más experimental, de forma que pueda proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde su infancia (MEC, 1992; NCTM, 2000). Estos cambios nos llevan a reflexionar sobre la naturaleza de la probabilidad y los componentes de su comprensión. Como argumentamos en Batanero, Henry y Parzysz (2005), la historia de la probabilidad está repleta de episodios y problemas que fueron en su tiempo desafiantes, y muestran que la

[2] En espagnol le terme « sémiotique » est plus courrant, associé au courrant américain de la sémiologie. (N. du T.).

intuición estocástica con frecuencia nos engaña; algunos ejemplos sedescriben en Székely (1986). Una mirada a la historia permite tomar conciencia de que los conceptos matemáticos no son inmutables; por el contrario, al igual que en matemáticas u otras ramas de las ciencias, son fruto del ingenio y la construcción humana para tratar de dar respuesta a situaciones problemáticas y están sujetos a evolución. Las soluciones admitidas como correctas en un momento histórico son posteriormente rebatidas o mejoradas; así contribuyen al avance de la matemática.

Un proceso similar se desarrolla en el aprendizaje de los alumnos, quienes deben construir su conocimiento mediante un proceso gradual, a partir de sus errores y esfuerzo. Si el profesor de matemáticas que debe enseñar probabilidad no es consciente de esta problemática, difícilmente podrá comprender algunas dificultades de sus estudiantes, quienes se encuentran a lo largo de su aprendizaje con las mismas paradojas y situaciones contraintuitivas que surgieron durante el desarrollo histórico del cálculo de probabilidades.

En este trabajo analizamos resumidamente los significados históricos de la probabilidad, siguiendo a Batanero, Henry y Parzysz (2005). Diferenciamos componentes en su comprensión utilizando un modelo que nos permite también dar una interpretación semiótica al razonamiento matemático e interpretar algunos errores frecuentes al resolver problemas de probabilidad en términos de conflictos semióticos, y concluimos con algunas implicaciones para la enseñanza de la probabilidad.

2. Elementos del significado de un objeto matemático

El modelo teórico que nos sirve como base (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002) parte de la noción de *situación-problema* y concibe que el objeto matemático emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo o tipo de problemas matemáticos. El *significado del objeto* sería una entidad compuesta, formada por el conjunto de prácticas operatorias y discursivas relacionadas con dicho campo de problemas. Para el caso de la probabilidad, diferenciaríamos entre el conjunto de prácticas ligadas a la resolución del campo de problemas correspondiente (estudio, análisis y predicción de fenómenos aleatorios), que englobaría todo lo que hacemos y decimos para resolver este tipo de problemas, y el objeto matemático probabilidad, que ha emergido históricamente y sigue evolucionando como consecuencia de tales prácticas.

Asimismo, en el modelo citado, se diferencia entre *significado institucional y personal* del objeto dado, según que las prácticas relativas a un cierto campo de problemas son compartidas dentro de una institución (como en una clase de matemáticas), o son específicas de un sujeto que pertenece a la institución (un alumno). De ahí que se tome en cuenta el papel de la actividad matemática en la construcción progresiva de objetos (conceptos, proposiciones, teorías), tanto desde el punto de vista cultural –social– como personal. Godino (2002; 2003) analiza con detalle estas ideas e indica los antecedentes en que están basadas.

Si bien el modelo teórico es más amplio, a continuación nos centraremos en lo que se denominan componentes o *elementos de significado*, cuya principal utilidad reside en el análisis de respuestas a una tarea matemática, o bien de un proceso de enseñanza o aprendizaje. Estos son:

1.*El campo de problemas de los que emerge el objeto*. Los objetos matemáticos han surgido para resolver problemas particulares; esta solución es específica en un primer momento y más tarde se generaliza a otros problemas similares. Ahora bien, la solución involucra un nuevo objeto matemático que en un principio es usado implícitamente, pero posteriormente se convierte en tema de estudio en sí mismo y más tarde se introduce en la enseñanza

Dichos problemas forman parte del significado del objeto, ya que lo justifican y dotan de sentido. Para el caso de la probabilidad, uno de los problemas primitivos fue propuesto a Galileo por el Duque de Toscana, alrededor del año 1620: explicar por qué, aunque las sumas 9 y 12 se pueden componer en el mismo número de veces (3 y 6; 4 y 5; 6 y 6) al lanzar dos dados que las sumas 10 y 11 (5 y 5; 4 y 6; 5 y 6), la experiencia de los jugadores les hacen apostar a las sumas 10 y 11, que ocurren con mayor frecuencia. A pesar de que hoy esta cuestión nos parece sencilla, Székely (1986) indica que en su tiempo fue paradójica y algunos matemáticos famosos no fueron capaces de resolverla. Este y otros problemas relacionados con los juegos de azar dieron origen al cálculo de probabilidades.

2.*Elementos lingüísticos*. Al tratar de resolver los problemas, necesitamos objetos ostensivos como símbolos, palabras o gráficos para representar los datos y soluciones, al igual que las operaciones y conceptos usados. Todas estas expresiones sirven, por un lado, como sistemas de representación, es decir, para sustituir o ponerse en lugar del objeto representado; por otro, cabe indicar que el lenguaje matemático cumple también un papel instrumental en la actividad matemática. Por ejemplo, si analizamos las cartas de Pascal a Fermat (Pascal, 1963/1654) podemos observar que Pascal emplea las palabras “valor”, “chance” y “combinación” para hacer referencia a objetos abstractos (esperanza matemática, posibilidades, número combinatorio); al mismo tiempo, tales expresiones, así como los numerales, letras, fracciones e incluso una representación del triángulo aritmético le sirven a Pascal como instrumentos al resolver algunas cuestiones propuestas por el caballero de Meré.

Actualmente, el número de recursos lingüísticos asociados al campo de la probabilidad es muy variado, e incluye las gráficas y tablas de valores de las funciones de densidad de diferentes distribuciones de probabilidad, las expresiones algebraicas de dichas distribuciones o sus transformadas, así como las simulaciones y los gráficos dinámicos producidos en un ordenador.

3.*Procedimientos y algoritmos*. Los primitivos problemas, una vez resueltos, dan lugar a métodos particulares que permiten resolver problemas dentro de un campo dado y pronto se convierten en objetos de enseñanza. De este modo, los primeros procedimientos en el terreno de la probabilidad se reducían al cálculo combinatorio o la enumeración de casos favorables y posibles para determinar su número y calcular la probabilidad mediante un cociente. Poco a poco han surgido nuevos procedimientos, como la recogida de datos estadísticos y la estimación de las probabilidades a partir de la frecuencia relativa, el uso de funciones matemáticas como modelo de distribuciones de probabilidad y su operación aplicando el análisis matemático, la simulación mediante tablas de números aleatorios y los programas estadísticos que ofrecen una variedad de cálculos probabilísticos y simulaciones, sin necesidad de que el usuario conozca los cálculos subyacentes.

4.*Las definiciones y propiedades de los objetos y sus relaciones con otros objetos matemáticos*[3]. En la actividad matemática se requiere evocar diferentes conceptos que previamente se conocen, cuyas propiedades sirven para resolver problemas. Una vez que la probabilidad es reconocida como objeto matemático por la comunidad científica, en 1700, aparecen diferentes definiciones que estudiaremos en las secciones siguientes. Al mismo tiempo, comienzan a publicarse tratados donde se analizan las propiedades de la probabilidad: el hecho de que siempre es positiva, las reglas de la suma y producto, los teoremas de la probabilidad total y de Bayes, así como sus relaciones con los conceptos de esperanza, distribución o convergencia.

5.*Los argumentos y demostraciones de estas propiedades*. Todas las acciones y objetos que forman parte de la actividad matemática se ligan entre sí mediante argumentos y razonamientos que se necesitan para justificar la validez de la solución a un problema o una propiedad y para comunicarla a otras personas. Aunque el tipo de demostración más característico en matemáticas es el formal deductivo, podemos hallar también una variedad de tipos de justificación; Galileo usó la enumeración para dar una solución completa al problema propuesto por el Duque de Toscana. Esta misma demostración sería comprensible para los alumnos de secundaria, pero también podríamos organizar en clase un experimento a fin de estimar empíricamente las posibilidades de las diferentes sumas al lanzar dos dados. Un estudiante de matemáticas avanzadas podría utilizar sus conocimientos sobre la distribución de la suma de variables aleatorias para encontrar una demostración de tipo deductivo; cada uno de estos tipos de prueba tiene una naturaleza diferente y puede ser adecuada, dependiendo del tipo y edad de los alumnos.

Esta enumeración de los elementos de significado sugiere la naturaleza compleja de losconceptos matemáticos, incluso los que aparentemente parecen sencillos, como el de la probabilidad, y la necesidad de considerar tales componentes en la

[3]En el marco teórico considerado (Godino, 2002), las definiciones de un concepto y sus propiedades se consideran como elementos de significado diferentes.

enseñanza. Debemos ser también conscientes de que un mismo objeto matemático puede enseñarse con niveles diversos de complejidad y, por tanto, su significado puede ser diferente en distintas instituciones educativas.

Por ejemplo, diremos que un niño de la escuela primaria comprende la probabilidad si es capaz de calcular probabilidades de sucesos en experimentos muy sencillos, como lanzar un dado, y entiende que la probabilidad reside en un número entre cero y uno. A un estudiante de secundaria le pediríamos que fuera capaz de memorizar la regla de Laplace, que conociese algunas propiedades de la probabilidad –como la regla de la suma y el producto– y que tuviese competencia en problemas algo más complicados, como calcular la probabilidad en un suceso de un experimento compuesto. Una persona con cultura probabilística (Gal, 1995) sería capaz de comprender los enunciados de probabilidad en el contexto de apuestas, votaciones o inversión en la bolsa, y tomar una decisión fundamentada en ellos. En el trabajo científico o profesional o a nivel universitario se requiere trabajar con variables aleatorias en una o varias dimensiones y diferentes modelos de distribuciones de probabilidad (binomial, poisson o normal), al igual que saber aplicar teoremas complejos, como el central del límite, a problemas de estimación de parámetros de distribuciones o contraste de hipótesis.

También distinguimos entre el *significado institucional* y *personal* de un mismo objeto matemático, ya que cuando un estudiante ingresa en una escuela o centro educativo el significado que asigna a un objeto matemático podría no coincidir con el acordado dentro de la institución. De este modelo de significado se deduce una teoría de la comprensión (Godino, 1996), el cual plantea que la aprehensión de un concepto no sería unitaria, sino gradual, e implicará la adquisición de los distintos elementos que componen los significados institucionales. La principal finalidad de la enseñanza sería el acoplamiento progresivo de los significados personales e institucionales.

3. Significados de la probabilidad

Las ideas anteriores son especialmente adecuadas para analizar el concepto de probabilidad, donde la “diferencia de significado puede reflejar las distintas concepciones que subyacen en la solución de problemas cotidianos de probabilidad y, al mismo tiempo, ayuda a entender mejor los distintos errores que se cometen” (Pérez Echeverría, 1990, p. 18). A lo largo de su desarrollo histórico, diferentes significados han sido asociados a este concepto y todavía coexisten, debido quizá al desarrollo *reciente* de este campo con respecto a otras ramas de la matemáticas: “el campo de la probabilidad y estadística es simplemente un adolescente matemático, si se compara con la geometría o el álgebra o incluso con las raíces del cálculo” (Shaughnessy, 1992, p. 8).

Hacking (1975) señala el significado dual del término probabilidad (desde su nacimiento) como grado de creencia y como evidencia aceptable para el científico, que dieron origen a las definiciones posteriores de probabilidad desde el punto de vista subjetivo y objetivo, respectivamente; aunque son complementarios, no han cesado de generar discusiones de tipo filosófico entre los defensores de una y otra postura. El desarrollo progresivo de la probabilidad estuvo unido a un gran número de paradojas que muestran la diferencia entre los aspectos intuitivos y formales del tema (Székely, 1986; Borovcnik & Peard, 1996).

3.1. Significado intuitivo

No se sabe con seguridad cuándo comenzaron los juegos de azar, ni las razones por las cuales el cálculo de probabilidades se desarrolla mucho más tarde que otras ramas de las matemáticas. El hecho es que la probabilidad estuvo ausente como idea matemática hasta los comienzos del siglo XVII, a pesar del interés por los juegos y su incentivo económico, de la existencia de ideas combinatorias y filosóficas sobre el azar o de la disponibilidad de registros estadísticos (Hacking, 1975).

Las primeras ideas intuitivas y los juegos de azar son comunes en todas las civilizaciones primitivas. Aparecen tanto en niños como en personas que no han estudiado probabilidades, pero usan frases y expresiones coloquiales para cuantificar los sucesos inciertos y expresar su grado de creencia en ellos. Estas primeras ideas, que surgen ligadas a las apuestas, la esperanza, la ganancia en un juego y el concepto de juego equitativo, no se precisaron hasta que se trató de asignar números a estos grados de creencia para poder comparar la verosimilitud de diferentes sucesos. Por ejemplo, Bellhouse (2000) describe un poema del siglo XIII en el que se calculan las posibilidades de las diferentes sumas posibles al lanzar dos dados, usando técnicas de enumeración, y matemáticos como Cardano (1961/ 1663) recomendaron a los jugadores tener en cuenta todas las posibilidades de los diferentes resultados al hacer sus apuestas para que lograran un juego equitativo.

Poco a poco estas teorías se desarrollan; sin embargo, el concepto de probabilidad recibe diversas interpretaciones y es objeto de debates filosóficos que se centran, sobre todo, en su naturaleza objetiva (como propiedad de un suceso) o subjetiva (como grado de creencia personal), apunta Hacking (1975).

3.2. Significado laplaciano de la probabilidad

La correspondencia entre Pascal y Fermat (Pascal, 1963/1654) resuelve algunos problemas ligados a juegos de azar, se le considera el punto de partida de la teoría de la probabilidad. Estos autores y sus contemporáneos expresan sus resultados en términos de *apuesta equitativa* o *división de la apuesta*. Por ejemplo, Huygens (1998/ 1657) halla el valor esperado de la ganancia en un juego entre dos jugadores que tienen diferentes ventajas, un resultado que es generalizado por Leibniz (1995/1676).

Aunque la idea de probabilidad está ya implícita en todos estos trabajos, tenemos que esperar hasta De Moivre para encontrar una definición: "Por tanto, si constituimos una fracción cuyo denominador es el número de chances (posibilidades) con la que el suceso podría ocurrir y el denominador el número de chances con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción será una definición propia de la probabilidad de ocurrencia" (1967/1718, p. 1).

En 1814, Laplace acuñó la definición que hoy enseñamos como *regla de*

Laplace para la probabilidad de un suceso que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades, "como una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador el número de todos los casos posibles" (Laplace, 1985/1914, p. 28), e indica también la necesidad de reducir los acontecimientos de un cierto tipo a un cierto número de casos igualmente posibles.
Según Godino, Batanero y Cañizares (1987), tal definición se encontró inadecuada incluso en la época de Laplace, ya que además de ser circular y restrictiva no ofreció respuesta a la pregunta de qué es realmente la probabilidad; sólo proporcionó un método práctico de cálculo de probabilidades de algunos sucesos sencillos. Por otro lado, no puede aplicarse a los experimentos con un número infinito de posibilidades o a aquellos casos en que el espacio de muestreo es finito, mas no puede aceptarse la condición de simetría, como al lanzar al suelo una caja de chinchetas. Como hace notar Bernoulli en *Ars Conjectandi* (1713), la *equiprobabilidad* apenas se encuentra fuera del campo de los juegos de azar.

3.3. Significado frecuencial

Bernoulli sugirió que podríamos asignar probabilidades a los sucesos aleatorios que aparecen en diversos campos, a partir de la frecuencia relativa observada en una serie grande de ensayos del experimento (1987/ 1713); su demostración de la Primera Ley de los Grandes Números fue aceptada en su época como un apoyo al carácter objetivo de la probabilidad. Dicho teorema indica que la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones se acerque tanto como queramos a la probabilidad teórica del suceso puede aproximarse suficientemente a uno, sin más que aumentar el número de pruebas.

En esta visión se define la probabilidad como el número hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse (Von Mises, 1952/1928), asumiendo la existencia teórica de dicho límite, cuya frecuencia relativa observada es un valor aproximado. Autores como Gnedenko y Kolmogorov se entusiasmaron con esta definición y hallaron en ella el verdadero sentido de la probabilidad; tal concepto hubiera sido inútil para ellos si no pudiese relacionarse a través del teorema con las frecuencias relativas de los sucesos, obtenidas a partir de experiencias hechas en las mismas condiciones.

Un problema práctico es que en el enfoque frecuencial nunca obtenemos el valor exacto de la probabilidad, sino sólo una estimación. Por otro lado, a veces es imposible realizar los experimentos exactamente en las mismas condiciones y también es difícil saber con certeza cuál es el número de experimentos que debemos realizar para aceptar la estimación de la probabilidad como buena; más aún, ciertos sucesos (por ejemplo, en el campo de la economía o de la historia), aunque aleatorios, son irrepetibles y, de acuerdo con esta concepción, no podríamos aplicar la teoría de la probabilidad para su estudio.

3.4. Significado subjetivo

Aunque el significado frecuencial amplía el campo de aplicaciones de la probabilidad y da una regla de cálculo sobre ella, no estuvo libre de controversias. Un nuevo punto de vista aparece a través de la regla de Bayes, que permite transformar las probabilidades a priori (antes de realizar un experimento) de varias causas, una vez observadas sus consecuencias, en probabilidades a posteriori, que incorporan la información de los datos analizados.

Las probabilidades de tales causas podrían entonces revisarse –pasar de las probabilidades a priori a las a posteriori– y perderían de este modo el carácter objetivo que les asigna la concepción frecuencial. Keynes, Ramsey y De Finetti describen las probabilidades como grados de creencia personal basados en el conocimiento y experiencia de la persona, quien los asigna sobre el suceso dado. Para ellos, la probabilidad de un suceso siempre está condicionada por un cierto sistema de conocimientos y puede ser, por tanto, diferente para distintas personas.

Una dificultad inicial del enfoque subjetivo fue hallar una regla para asignar valores numéricos a las probabilidades, de forma que expresaran los grados de creencia personal. Ramsey (1926) y de Finetti (1937) dedujeron una teoría de decisión consistente, que permite separar las creencias de las preferencias a partir de un sistema de apuestas e inferir los valores de las probabilidades subjetivas. En el enfoque subjetivo ya no es necesaria la repetición del experimento en las mismas condiciones para dar sentido a la probabilidad, lo cual amplía el campo de aplicación, como en el estudio de las decisiones en economía o en el diagnóstico médico. Hoy día, la escuela bayesiana aplica las probabilidades a todo tipo de sucesos inciertos, aunque sigue la controversia sobre el estatuto científico de las probabilidades subjetivas.

3.5. Significado matemático

A lo largo del siglo XX, diferentes autores contribuyeron al desarrollo de una teoría matemática formalizada sobre la probabilidad. Borel contempló la probabilidad como un tipo especial de medida, mientras que Kolmogorov usó esta idea, aplicando la teoría de conjuntos y de la medida, para deducir una axiomática que han aceptado todas las escuelas, independientemente del significado filosófico otorgado a la naturaleza de la probabilidad.

Desde entonces, la probabilidad es simplemente un modelo matemático que podemos usar para describir e interpretar la realidad de los fenómenos aleatorios, y ha mostrado su utilidad en casi en todos los campos de la actividad humana, como la ciencia, la técnica, la política y la gestión.

3.6. Síntesis de diversos significados

En el resumen anterior presentamos diferentes significados históricos de la probabilidad que aún persisten y se usan en la práctica y enseñanza de la estadística. La diferencia no sólo se presenta en la definición, sino en cada uno de los elementos de significado considerados en nuestro marco teórico, como ilustra la Tabla 1.

SIGNIFICADO DE LA PROBABILIDAD	CAMPOS DE PROBLEMAS	ALGORITMOS Y PROCEDIMIENTOS	ELEMENTOS LINGÜISTICOS	DEFINICIONES Y PROPIEDADES	ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS
Intuitivo	• Sorteos • Adivinación	• Manipulación de generadores de azar: dados, cartas...	• Lenguaje ordinario	• Opinión impredecible, creencia	• Suerte • Destino
Clásica	• Cálculo de esperanzas o riesgos en juegos de azar	• Combinatoria • Proporciones • Análisis a priori de la estructura del experimento	• Triángulo aritmético • Listados de sucesos • Fórmulas combinatorias	• Cociente de casos favorables y posibles • Equiprobabilidad de sucesos simples	• Esperanza • Equitatividad • Independencia
Frecuencial	• Estimación de parámetros en poblaciones	• Registros de datos estadísticos a posteriori • Ajuste de curvas matemáticas • Análisis matemático • Simulación	• Tablas y gráficos estadísticos • Curvas de densidad • Tablas de números aleatorios • Tablas de distribuciones	• Límite de las frecuencias relativas • Carácter o bjetivo basado en la evidencia empírica	• Frecuencia relativa • Universo • Variable aleatoria • Distribución de probabilidad
Subjetiva	• Mejora del conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles	• Teorema de Bayes • Asignación subjetiva de probabilidades	• Expresión de la probabilidad condicional	• Carácter subjetivo • Revisable con la experiencia	• Probabilidad condicional • Distribuciones a priori y a posteriori
Axiomática	• Cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorio abstractos	• Teoría de conjuntos • Álgebra de conjuntos • Teoría de la medida	• Símbolos conjuntistas	• Función medible	• Espacio muestral • Espacio de probabilidad • Conjuntos de Borel

Tabla 1. Elementos que caracterizan los diferentes significados de la probabilidad.

No incluimos explícitamente los argumentos debido a que, aparte de la aproximación intuitiva, todos los significados comparten los razonamientos de tipo deductivo, el análisis y síntesis, el uso de ejemplos y contraejemplos; ahora bien, los argumentos de tipo empíricos están más ligados a la probabilidad frecuencial; los inductivos, a la probabilidad subjetiva. Hacemos notar que el significado matemático-axiomático, cuya índole es estructural, responde a una problemática de organización y estructuración de los restantes significados parciales de la probabilidad.

Los elementos de este tipo necesitan ser tenidos en cuenta para la enseñanza del tema (o de cualquier otro contenido matemático), puesto que la investigación muestra que los alumnos tienen dificultades en cada uno de los componentes. Por otro lado, los diferentes significados de la probabilidad también deberían incluirse progresivamente, comenzando desde las ideas intuitivas de los alumnos sobre el azar y la probabilidad, ya que la comprensión es un proceso continuo y creciente por el cual el alumno construye y relaciona progresivamente los diferentes elementos del significado que atañen al concepto. Es necesario un "tránsito flexible" entre los distintos significados parciales, lo cual se logra tras un proceso de estudio prolongado; dicho proceso tiene que ser planificado y distribuido entre los distintos niveles educativos.

4. Funciones semióticas y razonamiento matemático

4.1. La matemática como actividad relacional

El análisis anterior sobre los elementos de significado enfoca su atención en los componentes de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; sin embargo, es insuficiente para describir toda la complejidad de la actividad matemática a un nivel de análisis microscópico. Desde el punto de vista didáctico, interesa centrarse en la noción de función semiótica que Godino (2002) toma de Eco (1979), y a la cual considera como una relación entre una expresión que juega el papel de original en la correspondencia (significante) y un contenido (significado).

Cuando una persona produce o interpreta una función semiótica se crea un *significado elemental*, en el que la persona relaciona la expresión con el contenido. Algunos ejemplos son los siguientes:

- La expresión "regla del producto" o la representación simbólica "$P(M \cap I) = (M)xP(I)$" hacen referencia a un procedimiento que usamos para calcular una probabilidad compuesta

- El enunciado de un problema puede representar la situación real, a la que también podemos caracterizar mediante una simulación; por ejemplo, podríamos usar el lanzamiento de monedas para representar el género de los recién nacidos

- Cuando decimos "la solución de Pascal y Fermat al problema de división de la apuesta" nos referimos a una demostración

- En frases como "supongamos que tenemos una distribución normal $N(\mu,\sigma)$", las expresiones "distribución" "distribución normal", μ,σ aluden a entidades conceptuales

Las funciones semióticas están involucradas en la creación y transmisión de conceptos matemáticos, la demostración de propiedades y la resolución de problemas. Además de crear significados elementales, también pueden establecer compuestos o sistémicos, como cuando decimos “los teoremas de límite”, una expresión que evoca todo un conjunto de teoremas matemáticos con sus correspondientes demostraciones.

En cada función semiótica, la correspondencia entre expresión y contenido se fija mediante reglas que no siempre son explícitas, o no son entendidas por los dos actores del discurso, lo cual provoca que, en algunas ocasiones, el profesor y el estudiante atribuyan diferente significado a la misma expresión; aquí hablamos de *conflicto semiótico* (Godino, 2002). Dichos conflictos aparecen en la interacción comunicativa y con frecuencia explican las dificultades y limitaciones del aprendizaje de las matemáticas.

4.2. El razonamiento matemático como secuencia de funciones semióticas

Al resolver un problema matemático, o durante cualquier otra actividad matemática, se establece una serie de funciones semióticas similares a las descritas, e incluso podemos considerar el razonamiento matemático como una cadena de funciones semióticas (o piezas de conocimiento encadenadas). Reparemos en la solución siguiente (Figura 1), dada por un alumno al Problema 1.

Problema 1. Un grupo de alumnos de un colegio se examina en las materias de Matemáticas e Inglés. La proporción de alumnos que aprueba Matemáticas es del 80%, y la de Inglés del 70%. Suponiendo que las notas en cada una de las asignaturas es independiente, ¿cuál es la probabilidad de que un alumno escogido al azar haya aprobado ambas asignaturas?

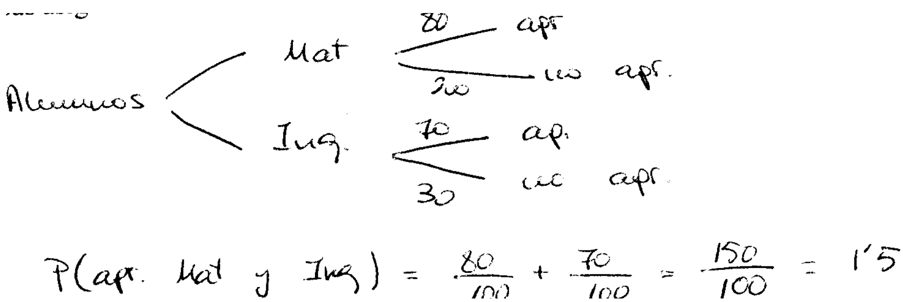


Figura 1. Solución al Problema 1.

En la Tabla 2 hemos descompuesto esta solución en unidades de análisis, a fin de mostrar la actividad semiótica llevada a cabo por el estudiante e identificar sus conflictos semióticos. Vemos aquí la complejidad en la solución de problemas de probabilidad (en general, de los matemáticos), hasta en los más simples. El alumno pudo identificar los datos del problema, construyó un diagrama en árbol que los representaba y los posibles sucesos de un experimento compuesto, así como aplicó el axioma de la unión, calculando correctamente la suma de fracciones y su valor numérico.

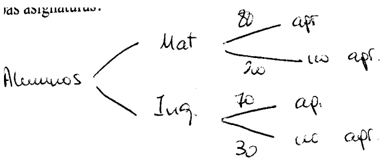
Unidad de análisis	Funciones semióticas establecidas por el estudiante
	-Las expresiones “Mat”, “Ing.” “ap” “no” representan las palabras completas “matemáticas”, “inglés”, etc., y éstas a su vez están en lugar de elementos fenomenológicos (alumnos, asignaturas, resultados del examen) -El primer nivel del diagrama en árbol representa una partición (concepto) de los alumnos en dos grupos: los que aprueban matemáticas y los que aprueban inglés. Hay un conflicto semiótico al interpretar “independientes” como “excluyentes” -En cada rama del segundo nivel, se representa una partición de los alumnos (concepto) en dos clases disjuntas (aprobados /no), que es correcta. Además, se representan las probabilidades asociadas con los dos sucesos posibles (conceptos) -El alumno identifica correctamente los datos del problema sobre porcentaje (concepto) de aprobados en cada asignatura. De igual manera, aplica correctamente la probabilidad del suceso contrario (proposición) para obtener la proporción de suspensos -El diagrama en árbol en su conjunto representa un conjunto de posibilidades (el espacio muestral de un posible experimento compuesto) que el alumno ha formado (procedimiento). Dicho experimento no es, sin embargo, el supuesto por el profesor.
P(apr Mat y Ing) = $\frac{80}{100}+\frac{70}{100}$	-La expresión “apr Mat y Ing” indica la unión de dos sucesos que son, a su vez, una operación y un concepto -La parte izquierda de la expresión se refiere a la probabilidad de la unión de los sucesos (propiedad), y la derecha a la suma de dos fracciones (procedimiento). También están representados los numeradores y denominadores de las fracciones (conceptos) y el símbolo de la suma (operación) -Toda la expresión menciona al axioma de la unión (proposición), que el alumno aplica correctamente, sumando las probabilidades de cada suceso individual (operación), puesto que supone que los sucesos son incompatibles
$\frac{80}{100}+\frac{70}{100}=\frac{150}{100}=1,5$	-El alumno representa el procedimiento de suma de fracciones, su resultado y finalmente el valor numérico del mismo, que es un número decimal resultante de dividir el numerador entre el denominador (conceptos y operaciones) -El alumno obtiene un valor mayor que 1 para la probabilidad, pero no se percata de que el resultado es inconsistente

Tabla 2. Análisis semiótico de la solución del estudiante.

Sin embargo, esta solución es incorrecta, ya que el alumno ha interpretado la palabra "independiente" que aparece en el enunciado como "mutuamente excluyente". Hay un conflicto semiótico inicial que condiciona toda la resolución del problema, lo cual arroja una solución inadecuada. Asimismo, hallamos otro conflicto en el hecho de que el alumno no percibe que el valor obtenido para la probabilidad (mayor que 1) no es consistente con el primer axioma de la probabilidad. Mientras que para el profesor tal axioma es evidente, el alumno no parece tenerlo en cuenta o, al menos, no lo aplica en la solución de este problema.

5. Implicaciones para la enseñanza de la probabilidad

La discusión anterior muestra el significado polifacético de la probabilidad; de ahí que su enseñanza no puede limitarse a una de estas diferentes perspectivas, en razón de que están ligadas dialécticamente. La probabilidad puede contemplarse como razón de posibilidades a favor y en contra, como evidencia proporcionada por los datos, como grado de creencia personal y como modelo matemático que ayuda a comprender la realidad.

Ahora bien, las controversias que han acompañado la historia de la probabilidad también han influido en la enseñanza. Hasta 1970, la visión clásica, basada en el cálculo combinatorio, dominó el currículo de probabilidad; sin embargo, como el razonamiento combinatorio es complejo, muchos estudiantes encontraron difícil tal enfoque, en el que además estaban ocultas las aplicaciones de la probabilidad a diferentes ciencias. Muchos profesores vieron la probabilidad como una parte secundaria de las matemáticas que sólo se interesaba por los juegos de azar; en otros casos, era sólo una aplicación de la teoría de conjuntos (Henry, 1997).

Con el desarrollo progresivo de los ordenadores ha aumentado el interés por la introducción experimental de la probabilidad, como límite de la frecuencia estabilizada. Las simulaciones y los experimentos ayudan a los estudiantes a resolver las paradojas que se presentan hasta en problemas de probabilidad aparentemente sencillos. Pero un enfoque experimental puro de la enseñanza de la probabilidad no es suficiente; incluso cuando la simulación nos ayuda a encontrar la solución a problemas de probabilidad que surgen de la vida real, no puede probar que sea la más adecuada porque la simulación depende de las hipótesis establecidas de antemano y del modelo teórico que implementamos en el ordenador. Un conocimiento genuino de probabilidad sólo se alcanza con el estudio de alguna probabilidad formal, aunque debe ser gradual y estar apoyado en la experiencia estocástica de los estudiantes.

Por tanto, se necesita más investigación que clarifique cuáles son los componentes fundamentales del significado de la probabilidad (y, en general, de cualquier concepto matemático), así como los niveles de abstracción adecuados en que cada componente debe ser enseñado, para ayudar a los estudiantes a superar las posibles dificultades. Finalmente, sugerimos tener en cuenta la actividad semiótica de los estudiantes al resolver problemas matemáticos, de modo que les ayudemos a superar sus errores y dificultades, muchos de los cuales pueden explicarse en términos semióticos.

Bibliografía

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 16-42). New York, USA: Springer.

Bellhouse, D. R. (2000). De Vetula: a medieval manuscript containing probability calculations. *International Statistical Review 68* (2), 123-136.

Bernoulli, Jacques (1987). *Ars conjectandi-4ème partie* (N. Meunier, Trans.) Rouen: IREM [Trabajo original publicado en 1713].

Borovcnik, M. & Peard, R. (1996). Probability. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook in mathematics education* (Part 1, pp. 239-288). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Cardano, G. (1961). *The book on games of chances*. New York, USA: Holt, Rinehart y Winston [Trabajo original publicado en 1663].

Eco, U. (1979). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.

Finetti, de B. (1937). La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives. *Annales de l'Institute Henri Poincaré 7*, 1-68.

Gal, I. (1995). Democratic access to probability: Issues of probability literacy. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-64). New York, USA: Springer.

Godino, J. D. (1996). Mathematical objects: their meanings and understanding. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 2-417-424). Valencia, España: Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques 22* (2-3), 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1998) Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Godino, J. D., Batanero, C., y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad*. Madrid, España: Síntesis.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability.* Cambridge, USA: Cambridge University Press.

Henry, M. (1997). L'enseignement des statistiques et des probabilities. En P. Legrand (Coord.), *Profession enseignant: Les maths en collège et en lycée* (pp. 254-273). Paris, France: Hachette-Éducation.

Huygens, C. (1998). *L'art de conjecturer*. Paris, France: A. Blanchard [Trabajo original publicado en 1657].

Laplace, P. S. (1985).
Ensayo filosófico sobre las probabilidades. Madrid, España: Alianza Editorial [Trabajo original publicado en 1814].

Leibniz, G. W. (1995). L'estime des apparences. En M. Parmentier (Ed.),
21 manuscrits sur les probabilités, la théorie des jeux, l'espérance de vie. Paris, France: Vrin [Trabajo original publicado en 1676].

MEC (1992). *Decretos de Enseñanza Secundaria Obligatoria*. Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Mises, R. von (1952). *Probabilidad, estadística y verdad*. Madrid, España: Espasa-Calpe [Trabajo original publicado en 1928].

Moivre, A. de (1967). *The doctrine of chances*. New York, USA: Chelsea Publishing [Trabajo original publicado en 1718].

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Obtenido del sitio web de National Council Teachers of Matematics: http://standards.nctm.org.htm.

Pascal, B. (1963). Correspondance avec Fermat. En *Oeuvres Complètes* (pp. 43-49). París, France: Seuil. [Trabajo original publicado en 1654].

Pérez Echeverría, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico.* Madrid, España: Instituto de Ciencias de la Educación-Universidad Autónoma de Madrid.

Ramsey, F. P. (1926). Truth and probability. En Ramsey, *The foundations of mathematics and other logical essays* (Cap. VII, pp.156-198). New York, USA: Harcourt, Brace and Company.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York, USA: Macmillan.

Székely, G. J. (1986). *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics.* Dordrecht, Netherlands: Reidel.

Carmen Batanero
Universidad de Granada
Granada, España

E-mail: batanero@ugr.es