Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual

Eddie Aparicio[1]
Ricardo Cantoral[2]

RESUMEN

En este artículo se analizan las *formas discursivas* de descripción, exposición, narración y argumentación, además de la gesticulación, que emplean estudiantes universitarios al momento de discurrir sobre la noción matemática de *continuidad puntual* de una función real de variable real. De manera específica, consideramos la dimensión gestual de las acciones de visualización a partir de un diseño experimental basado en la *aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa*, que estima a los conocimientos matemáticos entre los estudiantes como el producto cultural de una serie de prácticas sociales ligadas a nociones matemáticas.

- **PALABRAS CLAVE**: Discurso, continuidad puntual, socioepistemología, gesticulación.

ABSTRACT

In this paper the discursive forms of description, exposition, narration and argument are analyzed, besides the gesticulation, that employ university students when they reflect on the mathematical notion of punctual continuity of a real function of real variable. We consider the gestural dimension of the visualization actions from an experimental design based on the *socioepistemological approach to the research in Mathematics Education*, that estimates to the mathematical knowledge among the students as the cultural product of a series of social practices connected with mathematical notions.

- **KEYWORDS:** Speech, punctual continuity, socioepistemology, gesticulation.

RESUMO

Aqui são analisadas as *formas discursivas* de descrição, exposição, narração e argumentação, além da gesticulação, que os estudantes universitários empregam no momento de discorrer sobre a noção matemática de *continuidade pontual* de uma função

Fecha de recepción: Agosto de 2005/ Fecha de aceptación: Diciembre de 2005

1 Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Yucatán. Yucatán, México.
2 DME – Cinvestav - IPN. México. En estancia sabática en el Cimate – UAG. México (julio 2005-julio 2006).

real de variável real. De maneira específica, consideramos a dimensão gestual das ações de visualização a partir de um traçado experimental baseado na *aproximação socioepistemológica da investigação em Educação Matemática*, que estima aos conhecimentos matemáticos entre os estudantes como o produto cultural de uma série de práticas sociais ligadas às noções matemáticas.

- **PALAVRAS CHAVE**: Discurso, continuidade pontual, socioepistemologia, gesticulação.

RÉSUMÉ

Dans cet article sont analysées les *formes discursives* de description, exposition, narration et argumentation, en plus de la gesticulation, qui sont employés par des étudiants universitaires au moment de délibérer sur la notion mathématique de *continuité ponctuelle* d'une fonction réelle de variable réelle. D'une façon spécifique, nous considérons la dimension gestuelle des actions de visualisation à partir d'une conception expérimentale basée sur *l'approximation socioéspistémologique à la recherche en Didactique des Mathématiques,* qui estime que les connaissances mathématiques entre les étudiants sont le produit culturel d'une série de pratiques sociales en rapport avec des notions mathématiques.

- **MOTS CLÉS**: Discours, continuité ponctuelle, socioépistémologie, gesticulation.

1. Introducción

Los recursos teóricos que ofrecen la Epistemología, la Psicología, la Didáctica y la Sociología cada vez han ido adquiriendo mayor importancia en la construcción de explicaciones, tanto en el proceso del aprendizaje matemático como en sus mecanismos de enseñanza. Muestra de ello es que numerosos estudios han descrito los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a partir de la adopción de algunas de estas posturas teóricas o de las relaciones que entre ellas se establecen.

Nuestra investigación se inscribe en la orientación de la Socioepistemología como aproximación teórica, la cual busca explicar fenómenos didácticos producidos en el campo de las matemáticas a través del examen del papel que juega la construcción social del conocimiento bajo un enfoque sistémico. Este precisa de la incorporación de aspectos como la comunicación, la búsqueda de consensos, la construcción de lenguajes o el diseño de herramientas para el estudio de dichos fenómenos.

En este sentido, a la luz de tal orientación teórica, ofrecemos una explicación de cómo las formas discursivas, y en especial el aspecto gesticulativo[3] de las acciones puestas en funcionamiento por algunos

[3] Entendemos al aspecto gesticulativo como una forma de comunicación cultural que sirve de enlace entre el significado de un concepto «matemático» y la comunicación de las sensaciones, nociones e imágenes internas que de éste se formen las personas. Es decir, lo gestual denota y precede al lenguaje escrito y a las representaciones.

estudiantes universitarios al momento de discutir sobre la noción de continuidad puntual de una función real de variable real, permite acceder a la construcción del concepto matemático «continuidad puntual».

En Aparicio y Cantoral (2003) se reconoce que el concepto de continuidad puntual y la estructura seguida en su enseñanza parece que no forma una base adecuada a partir de la cual sea posible construir significados asociados a la continuidad global, ya que la "extraña" noción de función continua *en un punto*, contraviene el carácter apriorístico de la continuidad global. Esto es, contraviene la forma en cómo los humanos perciben el cambio físico en el estudio de fenómenos reales, el cual apuntamos, lo hacen en términos globales, no los focalizan de manera local. De suerte que, al movimiento libre de la mano que se desplaza de un lado a otro sin cesar, se le concibe como trayectorias continuas descriptivas de su movimiento. La mano entonces, recorre *todos* los puntos intermedios entre un extremo y el otro por su trayectoria… ¿cómo no habría de hacerlo? Asimismo, en la caída de los cuerpos, se piensa que pasan por todos los puntos intermedios de su trayectoria.

El discurso matemático escolar y la práctica educativa de aula han sido consideradas como una zona exenta de cultura; de ahí que los conceptos matemáticos se muestran desvinculados de toda práctica social ligada a un proceso de construcción de conocimiento. La enseñanza de las matemáticas y las investigaciones asociadas a esta, no confieren -aun- la suficiente importancia a las relaciones emocionales y culturales en el tratamiento de los conceptos. Sin embargo, desde nuestro punto de vista, la construcción de un conocimiento matemático necesariamente se encuentra unido a aspectos que rebasan la mera organización teórica del contenido: aspectos epistemológicos, prácticas socioculturales, procesos avanzados del pensamiento, así como lo relacionado con el funcionamiento de una institución escolar.

La Socioepistemología plantea el examen del conocimiento matemático, social, histórico y culturalmente situado, problematizándolo a luz de las circunstancias de su construcción y difusión (Cantoral, 2001).

Bajo este razonamiento de la construcción social del conocimiento, la noción de continuidad puntual o funciones continuas en puntos ha estado en estrecha relación con la manera de concebir los conceptos de función y de continuidad, ya que se ha detectado que se han interpretado de dos maneras: la primera, asociada a la noción intuitiva de correspondencia de valores; la segunda, como una expresión algebraica o fórmula (Ferraro, 2000). Sin embargo, dicha noción se vuelve protagónica hasta que se le logra concebir como una expresión algebraica o fórmula que hace corresponder lo algebraico con lo geométrico. En tal contexto de articulación se abre una problemática: el estudio de la noción de función continua en un punto.

Dado que el concepto de función se ha asociado a una expresión algebraica que, además, es "única", convencionalmente representada en forma geométrica por una curva formada por puntos de trazo continuo, se ve favorecida la percepción global y se centra la atención en la forma gráfica de las funciones. Los trabajo de Farfán y Hitt (1990) y Hitt (1994) reportan que, cuando se les pide a los profesores y alumnos que tracen las gráficas de las funciones, tienden a representar a aquellas funciones con la propiedad de ser continuas; Sierra, et al (2000) encuentra al aplicar un cuestionario a 145 alumnos, que el 45.6 % de ellos manifiesta problemas en su entendimiento del concepto de función continua, y señala que algunos de ellos son el resultado de la propia didáctica.

Para el diseño experimental usado en nuestra investigación, supusimos a la noción de continuidad puntual como una consecuencia conceptual de la discontinuidad puntual, no de la noción global de continuidad. Esto es, consideramos que la noción de continuidad puntual se estabiliza entre los estudiantes sólo hasta que aparece como un medio para evitar las discontinuidades de orden puntual.

En una revisión histórica, de índole epistemológica, hallamos que la percepción de la continuidad global y los usos de la discontinuidad puntual preceden a la definición formal de la continuidad puntual. Ya que el concepto de continuidad tal y como es conocido en la actualidad, se desarrolla sistemáticamente hacia finales del siglo dieciocho y comienzos del siglo diecinueve en Europa central. Al considerar los trabajos de destacados pensadores como Arbogast (1759 – 1803), Euler (1707 – 1783), Bolzano (1781 – 1848), Cauchy (1789 – 1857) y Weirstrass (1815 – 1897), observamos una línea de razonamiento que sustenta nuestra hipótesis, aunque a Weirstrass se le atribuye haber dotado a dicho concepto de una definición formal, conocida hoy día en términos de la definición - (epsilon - delta).

Arbogast (1759 – 1803) distinguía dos formas en las que se podría perder la continuidad de una función:

1. Él consideraba una función de tal forma que en el intervalo [A, B] estuviera dada por una porción de una parábola, en el [B, C] por la de una elipse y en el [C, D] por la de una circunferencia (Figura 1).

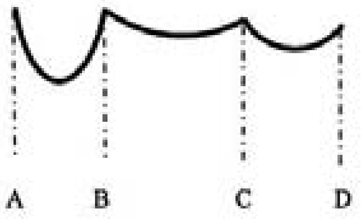


Figura 1. La gráfica cambia de forma

Argumentaba que tal función no obedecía a una ley de continuidad, es decir, a una permanencia de la forma. Por tanto, esta curva la concebía como discontinua.

2. La discontigüidad de una curva era preconcebida como la segunda forma en que se podría perder la continuidad.

Las funciones que expresaran este tipo de curvas serían luego entendidas como discontinuas (Figura 2).

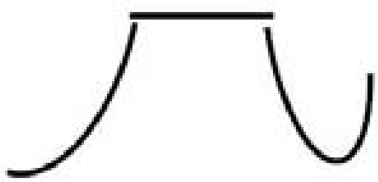


Figura 2. Partes no unidas en una curva

Del mismo modo, Euler manifestó ciertas concepciones *sui géneris* respecto al concepto de función y de continuidad:

> *a function of a variable quantity is an analytical expression composed in whatever way of that variable and numbers or constant quantities* [citado en Ferraro, 2000].

Observemos que Euler estaba apreciando a la función de la variable x, como una expresión singular o fórmula que contenía a x como variable. Luego entonces, no consideraba como funciones a expresiones de la forma:

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x, x<0 \\ x^2, x\geq 0 \end{Bmatrix}$$

Visiblemente, hacia finales del siglo XVIII la concepción sobre continuidad se notó más relacionada con la percepción espacial de la noción de la gráfica de la función, esto es, la continuidad era concebida como una permanencia de forma. Un objeto era continuo si no manifestaba interrupción alguna; en tal sentido, una curva sería caracterizada por medio de las conexiones o continuidades de su trayectoria.

Consideremos, por ejemplo, a la función $f(x)=k/x$ con k constante, y notemos dos aspectos importantes. Por un lado, desde la óptica de Arbogast sería una función discontinua porque determina una curva que tiene partes disjuntas (en el sentido moderno no lo es, y la razón se halla en el dominio de definición de la función). Por otro lado, bajo la visión euleriana y de la noción de función – una sola expresión algebraica –, tal expresión debería corresponder a una curva continua o mixta debido a que en ese tiempo, quedaba de manifiesto que una función podría ser representada geométricamente por una curva, más no toda curva podría ser expresada por alguna función en forma analítica. Así, la continuidad puntual surge como el resultado de las patologías de la continuidad global; es en este sentido que, tomando como base algunas de estas reflexiones, se discute con profundidad en Aparicio (2003) algunos aspectos vinculados a los procesos de pensamiento derivados de la aplicación de una actividad exploratoria con estudiantes de ingeniería.

En la enseñanza actual, el hecho de asociar a la continuidad puntual la idea de contigüidad de curvas prevalece entre los estudiantes como una técnica discriminatoria. El estudio de Tall y Vinner (1981) muestra como el 100% de los estudiantes interrogados señala que la función $f(x)=x^2$ corresponde a una función continua, mientras que el 78% indica que $f(x)=1/x$ con $x\neq 0$, es una función discontinua. Esto lo derivan al observar la representación gráfica de las funciones, con lo cual excluyen tanto el dominio de definición como a la definición misma. De la misma forma, trabajos como los de Azcarate y Delgado (1996) y Bezuidenhout (2001) describen una fragilidad en el entendimiento de la continuidad puntual.

Al indagar en la forma cómo es introducido y enseñado el concepto de continuidad puntual en el sistema escolar, detectamos que en la enseñanza del cálculo, cuando se presenta la continuidad puntual, no se hace con base en la explicación de la noción de discontinuidad puntual ni en la percepción global de la continuidad –la cual, sostenemos, se encuentra de manera natural en los razonamientos espontáneos–. Este tipo de tratamiento escolar genera dificultades al aprendizaje. Nuestra tesis entonces, consiste en aceptar que la noción de discontinuidad puntual y la percepción global de la continuidad global, deban anteceder al tratamiento de la continuidad puntual. Para ello, es preciso que se desarrolle el pensamiento y lenguaje variacional entre los estudiantes con respecto a la noción de función continua en un punto, tanto desde el punto de vista de su pensamiento como en las diversas formas de representación (Cantoral et al., 2000).

2. Fundamento teórico

En nuestro afán por reconocer y analizar las diversas formas discursivas y el papel de lo gestual cuando los estudiantes discurren sobre la noción de continuidad puntual, partiendo de la noción de discontinuidad puntual y la percepción de la continuidad global, hicimos un recuento de las diversas corrientes teóricas sobre el discurso escolar. Así, notamos que la psicología discursiva considera al habla como una acción situada en un contexto discursivo que construye significados, la realidad e incluso, a la misma cognición (Candela, 2001). Cazden (1986) ve al lenguaje como el medio que relaciona lo cognitivo con lo social, de tal forma que se comprende al desarrollo cognitivo y lingüístico como social y culturalmente condicionados (Green, 1998; Hicks, 1995), mientras que en el campo de la semiótica resaltan los trabajos de Krees y Ogborn (1998) donde se estudia al lenguaje como uno de los modos que, en interacción con otras formas modales, permite conocer la representación de conocimientos y estados mentales y la comunicación en contextos educativos. Krees y Ogborn plantean que el papel que juega el discurso verbal – sea escrito o gráfico, o actitudinal– es cultural.

Desde nuestra postura teórica reconocemos que lo gestual es parte de lo discursivo y por ende, lo consideramos en el estudio de la construcción del conocimiento matemático (Cantoral, Farfán, 2002). También entendemos a la escritura y al discurso como prácticas eminentemente sociales que permiten acceder y desarrollar conocimiento. Sin embargo, en las clases de matemáticas todavía no son suficientemente consideradas las prácticas sociales ligadas a la generación de aprendizajes y a la construcción de los conceptos mismos: *se tiene así que la práctica del discurso "académico" desconoce las bondades del discurso cotidiano*. En el área de las matemáticas se suele mantener la creencia de que en los educandos se debe cultivar el desarrollo de habilidades algorítmicas para la resolución de cierto tipo de problemas matemáticos, dejando al margen el desarrollo de la creatividad.

Algunos resultados que obtuvo nuestro grupo de investigación señalan la posibilidad de cambiar la posición actual de la noción de continuidad puntual en los programas de estudio. Para ello requeriríamos, por un lado, de renunciar al paradigma tradicionalmente seguido; por otro, de abandonar la postura que asume a la estructura conceptual en la enseñanza como inamovible, pues los conceptos elementales del cálculo y del análisis matemático –la continuidad puntual, por ejemplo– son vistos en su mayoría como consecuencia de una aplicación impecable de las operaciones con límites.

En ámbito cognitivo, los trabajos sobre las nociones y concepciones de los estudiante indican la dificultad de lograr, en el tiempo enmarcado por el sistema escolar, que los alumnos resignifiquen y conciban a la continuidad puntual como un objeto matemático debido a que, como menciona

Cantoral (2000) los procesos del pensamiento y lenguaje variacional son los que demandan un periodo más prolongado al que normalmente se da en un curso estándar.

Respecto a la componente didáctica, hemos referido que la noción de continuidad puntual descansa en la definición formal, que no parece constituir una base adecuada de resignificación. De ahí que, para acceder al concepto de continuidad puntual, es preciso el estudio de patologías que ponen en duda los fenómenos de continuidad global y del enfrentamiento con las discontinuidades de orden puntual. La continuidad, en cuanto proceso social, tiene la cualidad de ser entendida como la permanencia de estado o un seguimiento no interrumpido de un determinado proceso, no solo como el estudio local de ellos.

3. El escenario didáctico

La revisión histórica de carácter epistemológico que hicimos al concepto de continuidad puntual, ofreció aspectos esenciales para nuestro diseño experimental, ya que partimos de la suposición de que una explicación sobre la forma de pensar de los estudiantes, así como de sus errores más comunes, se puede hallar entendiendo cómo se argumentaba en otras épocas de la matemática. De tal modo, la idea básica manejada de nuestro diseño fue la elaboración y aplicación de una secuencia de actividades didácticas que supusiera a la percepción de la continuidad global y a los usos de la discontinuidad puntual como precedentes a la definición formal de la continuidad puntual.

Para la realización e implementación de nuestro diseño experimental, se pensó en interactuar con estudiantes universitarios que hubieran tenido algún contacto previo con el concepto de continuidad, elegimos a ocho alumnos –cuatro mujeres y cuatro hombres– de Ingeniería en Mecatrónica, Telemática y Biónica, con base en los resultados de una actividad exploratoria aplicada a 30 estudiantes de dichas especialidades. El requisito básico para la selección consistió en tener un cierto conocimiento de las funciones elementales del cálculo y un adecuado manejo sobre su representación gráfica; la edad de los alumnos oscilaba entre los 19 y 21 años.

En el desarrollo de la experimentación utilizamos papel, pizarrón y computadora con una serie de actividades que recurriendo al software Sketchpad 4.0 de geometría dinámica, proyectamos en la pantalla de la computadora de acuerdo con tres fases previamente diseñadas: *preparación para la lectura de las actividades, desarrollo de la secuencia e institucionalización de los saberes*.

La primera fase buscaba desarrollar las competencias necesarias entre los estudiantes para la adecuada lectura de las actividades planteadas. Por ello, se presentó a los alumnos una secuencia de proyecciones que mostraban una gráfica conocida (la de la función cúbica) y la consideración de tres puntos arbitrarios sobre ella, al igual que las respectivas sombras o proyecciones sobre los ejes coordenados. Finalmente, se revelaron los puntos considerados sobre los ejes puestos de manera paralela –un eje encima del otro–, en lo que ahondaremos más adelante.

La segunda fase tuvo como propósito crear un escenario específico donde los alumnos discutieran la noción de continuidad puntual a partir de la percepción global de la continuidad y la idea de discontinuidad puntual, mediante la explicitación de expresiones funcionales asociadas a las representaciones dinámicas vistas en la pantalla de la computadora; aquí, se formaron equipos de cuatro integrantes. En la última fase se planteaba una discusión entre los miembros de los dos equipos y la coordinación del instructor sobre las conclusiones finales.

La consideración de dichas etapas nos permitió elegir un conjunto de variables cualitativas y cuantitativas pertinentes para la investigación. Enmarcamos dentro de las cualitativas, los comportamientos de los estudiantes, los tipos de discurso empleados –incluyendo lo gestual– y los razonamientos. Mientras que dentro de las cuantitativas, a los aspectos cruciales que dejaran ver a aparecer las formas discursivas apropiadas. Por ejemplo, el universo de funciones elementales que trabajamos, concretamente, las lineales, cuadráticas y cúbicas, además de algunas dadas en "trozos", que devino tanto de nuestra aproximación teórica como de las restricciones que provocó el software empleado. Este último tipo de variables se constituyeron como independientes de tipo experimental o manipulado, y obedecieron a la intencionalidad de la situación planteada.

El cuerpo de la secuencia didáctica estuvo formado por cuatro actividades en la pantalla de la computadora. Las dos primeras iban destinadas al estudio de la noción de continuidad global, mediado por las representaciones que involucran movimientos y la exploración de expresiones funcionales asociadas a tales movimientos; las dos restantes, al estudio de la noción de discontinuidad y continuidad puntual, mediado por la percepción visual de los "rompimientos" de las curvas.

De las primeras dos actividades, se esperaba que:

- Los estudiantes transitaran por los marcos algebraico, numérico y geométrico respecto al concepto de función y función continua en un punto.

- Los estudiantes emplearan formas discursivas al momento de tratar la velocidad asociada a los puntos representados en la pantalla de la computadora.

- La velocidad junto con la traza constituiría un hecho importante para el reconocimiento y predicción de algunas propiedades específicas de las funciones tratadas.

Las otras dos actividades, como ya mencionamos, se ocuparon del estudio de la noción de discontinuidad puntual, mediado por la percepción visual de los "saltos" en ciertas representaciones asociadas a funciones particulares. Aquí se esperaba que:

- Las expresiones funcionales asociadas a dichas representaciones dinámicas permitirían consolidar las formas discursivas de los estudiantes, ligadas a las nociones de continuidad global, discontinuidad y continuidad puntual.

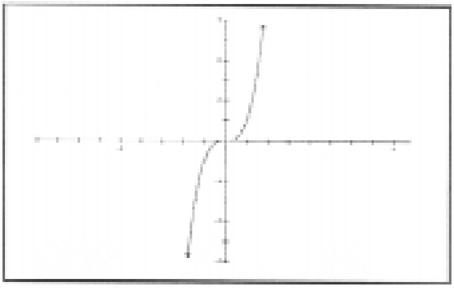
- Algunas nociones o concepciones no habrían de manifestarse en esta fase, pero se esperaba que en la siguiente vislumbraran a través de las formas discursivas que usaran los estudiantes.

De manera general, este fue el escenario propuesto a los alumnos, en donde las actividades planteadas, exigían la necesidad de cambiar y transitar coherentemente entre los marcos de representación algebraico, geométrico, numérico y verbal. En lo sucesivo, mostraremos el desarrollo de la secuencia didáctica, tratando de reproducir ciertos aspectos del planteamiento de las actividades y el aspecto dinámico inmerso en ellas.

4. Resultados

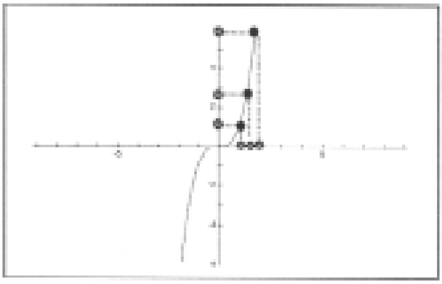
Antes de exponer el desarrollo y resultados de la experiencia, mencionaremos cómo se hicieron y desarrollaron las consideraciones de la primera fase, donde se advertía sobre la lectura de las actividades en la pantalla de la computadora. Esto lo haremos describiendo los cuatro pasos seguidos:

1. Iniciamos con la presentación en transparencias de la gráfica de la función cúbica $f(x) = x^3$ en la manera habitual, es decir, sobre los ejes coordenados.

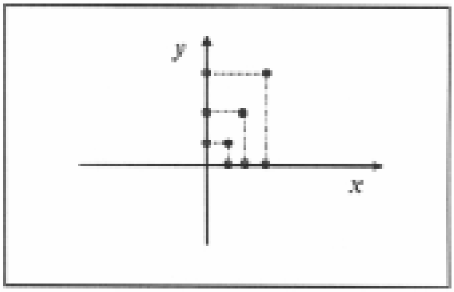


2. Se consideraron tres puntos sobre la gráfica (de manera secuencial, para una mejor apreciación visual).

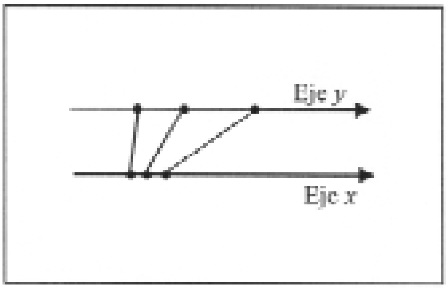
Inmediatamente, se dió paso a la representación de dichos puntos en sus respectivas componentes, es decir, expresados mediante sus abscisas y ordenadas en los ejes coordenados.



3. Se quitó la gráfica y se dejaron sólo los puntos, a fin de mostrar más a fondo la relación entre los puntos de la gráfica y sus respectivas “sombras” (valores en los ejes coordenados).



4. Finalmente, se mostró la ubicación de los puntos mediante sus sombras, de tal manera que la posición de los puntos quedara determinada por la ubicación de sus sombras (proyecciones) en los respectivos ejes, mismos que se colocaron paralelamente (eje *y* sobre el eje *x*) en forma similar a como fue presentado en la pantalla de la computadora.



Tras dicha actividad, los estudiantes estaban en posibilidades de interpretar la similitud de las representaciones que les serían mostradas en la pantalla de la computadora.

A continuación, daremos a conocer los códigos que utilizamos en las transcripciones y algunos segmentos de episodios de aprendizaje, con el fin de recrear e identificar las formas discursivas utilizadas por los alumnos en torno a las nociones de discontinuidad y de continuidad puntual. En algunas partes consideraremos a los dos equipos, en otras no. Al principio de cada episodio se pondrá el número de equipo referido.

- Las letras del tipo A_S al inicio de cada intervención refieren al alumno que participa en el diálogo. Por ejemplo, con A_S aludiremos a la alumna Susana.

- El uso del diagonal / en un enunciado o diálogo denota interrupciones muy cortas de los alumnos, aproximadamente de cinco segundos.

- El uso del doble diagonal // denota interrupciones superiores a cinco segundos

- La aparición de ..., (dijo)..., en algunos diálogos indica partes que fueron de nuestro interés, pues hubo comentarios que no se relacionaron con el tema.

- Los tres puntos entre paréntesis (...) que aparecen por lo regular en medio de un enunciado, denotan que en un diálogo no fue posible escuchar con claridad los comentarios.

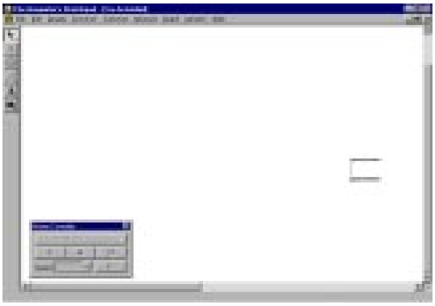
- El uso del corchete al inicio de cada diálogo denota el habla simultánea de los participantes.

$\left[\begin{array}{l} A_S \\ A_R \end{array}\right.$

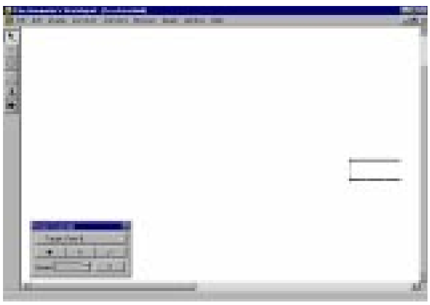
Cuando hacemos un comentario respecto a un diálogo, lo expresamos como **comentario del observador:** y abajo consignamos nuestra observación.

Actividad 1. ¿Existe alguna función real de variable real asociada a lo que se observa en la pantalla de la computadora?

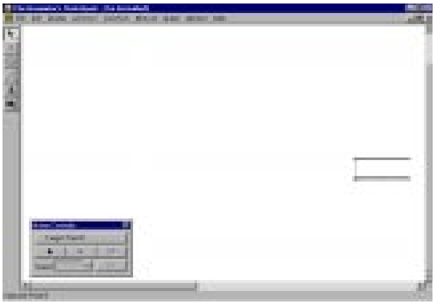
Recordemos que los alumnos veían en la pantalla una animación, movimiento de puntos y su traza (línea gris, eje *y* y línea negra, eje *x*) sobre el monitor.



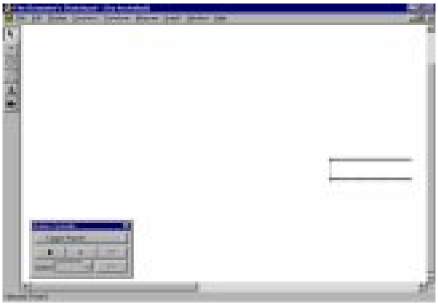
1er. instante



2º. instante



3er. instante



4º. instante

Qué se dice y cómo se gesticula

Equipo 1

A_R: El punto x es igual al punto y, entonces $f(x)=x$

Señala el movimiento de los puntos (negro y gris) repasando la línea que los une, indicando la relación entre x & y.

A_S: *si, si*

A_P: *si, aja*

A_S: $f(x)=f(y)$ o el punto x es igual al punto y, entonces la gráfica será $y=x$,

Comentario del observador:

¿En qué se basaron para concluir eso?

A_R: Se mueven a la misma velocidad. El mismo punto negro se proyecta en el mismo punto gris. La función es $f(x)=x$

A_R *ve detenidamente la representación en la pantalla y simula el movimiento con sus manos y los puños cerrados.*

A_B:Forman las misma líneas paralelas.

Indica con la mano como se van formando ambas líneas de manera simultánea, al mismo tiempo.

A_S: Podría ser también la función valor absoluto.

Expresa lo dicho al tiempo que observa la representación en la pantalla y hace ligeros movimientos con las manos y con ojos muy expresivos.

A_R: Pues también, pero ahí solo va del origen para allá por eso / Tendría que haber **un marco de referencia** para poder ubicarnos, pero así como está, podría ser las dos.

A_P: Como dice él, si tuviéramos una línea en medio que nos estuviera representando un poco más de movimiento de lo que es el punto negro, que vendría siendo x y vemos entonces que este, el gris, se va para el otro lado, entonces diríamos con exactitud que se trata de la función valor absoluto de x.

A_P *indica sobre la pantalla una línea sobrepuesta a la línea negra, señala un punto sobre esta línea y de inmediato un punto correspondiente gris; mueve su mano de manera suave hacia el lado izquierdo de la línea gris.*

A_R: Como general es $f(x) = x$

Equipo 2

A_O: Toca al mismo tiempo x & y… digamos que en el mismo valor $y = x$, porque, si no, se haría para allá o para acá, pero lo está tocando igual.

Esta alumna levanta la mano derecha en forma de cuchillo (mano abierta; dedos juntos) y la mueve de izquierda a derecha e inclina ligeramente la mano, indicando más rapidez.

A_L: En el uno quedan a la misma altura exactamente, si tomamos un punto y levantamos la perpendicular, entonces hallamos al punto y. La función que encontramos es $y = x$**,** es $f(x) = x$.

El alumno A_L *expresa con la mano derecha la toma de un punto y luego la levanta sobre ese punto especulativo de manera perpendicular; finalmente, estando arriba la mano, la desplaza de manera suave a lado izquierdo, sin tocar la pantalla.*

A_F: Digamos que, en la misma proporción, lo que avanza x avanza y, por eso mantienen ese carácter de perpendicular.

El alumno A_F *expresa proporción con los dedos pulgar e índice fijándolo un momento en el espacio. Luego los desplaza hacia la derecha de manera suave y empieza a expresar la condición de perpendicularidad con el movimiento de la mano (dedos juntos) de arriba hacia abajo. El alumno* A_L *expresa una especie de puntos con los dedos índice y pulgar de las manos, imitando un poco lo de la pantalla y comienza a hacer un desplazamiento suave de un lado a otro.*

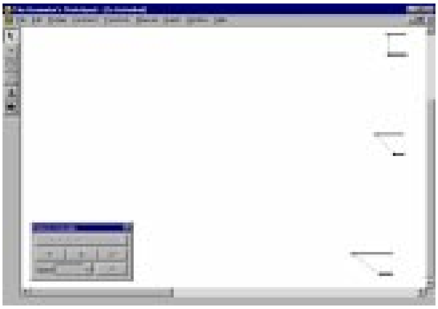
A_O: Si, porque sí un valor fuera diferente se vería la variación, si, si...

Expresa con la palma de su mano derecha inclinaciones de diferentes grados, de manera suave.

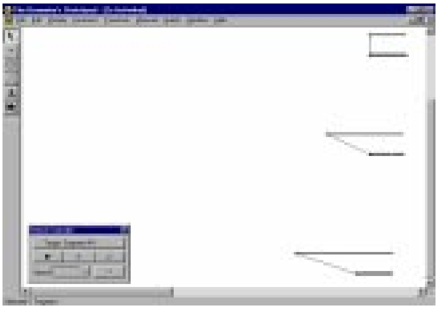
Pudimos observar durante el desarrollo y análisis de esta actividad que los estudiantes hicieron uso de algunos recursos gestuales (particularmente, ademanes), lo cual les permitió establecer relaciones de su conocimiento matemático con lo observado en la pantalla de la computadora. Dicho aspecto gesticulativo, como se pretende dejar ver en los extractos anteriores, hizo posible que los alumnos no sólo pudieran referirse a una función a través de su representación gestual, sino también, jugó un rol importante en la interacción entre ellos, ya que enlazó los tipos de representación – icónico, verbal y gestual – de una función real de variable real. En adelante iremos ahondando en cómo los gestos ayudan a acceder a la memoria y al lenguaje.

Asimismo, observamos que el uso de las distintas formas del discurso instaura, para el caso que nos ocupa, diversas maneras de emplear el lenguaje en la comunicación de mensajes <<matemáticos>>. Por tanto, las formas específicas del discurso –la descripción, la exposición, la narración y la argumentación– necesariamente, implican que las personas conozcan y compartan una misma cultura <<matemática>>.

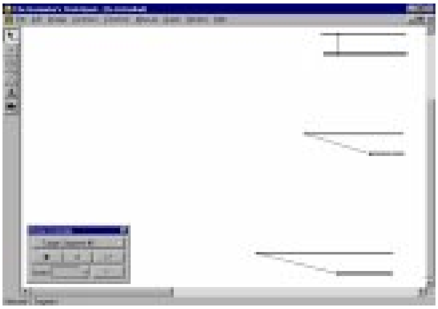
Actividad 2. En los tres hechos que ven en su pantalla, uno está asociado a la función $f(x) = x^2$ en un cierto intervalo. ¿Cuál es? y ¿por qué?



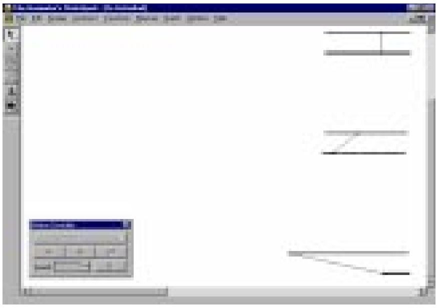
1er. instante



2º. instante



3 er. instante



4º. instante

Equipo 1

A$_S$: Debería ser la de en medio. Porque vemos en un lapso (*señala el tercer hecho*) cuando viene aquí, cómo se detiene y, x sigue aumentando y y se detiene; luego sigue un intervalo. Entonces la x^2 nunca se detiene y, en dos valores iguales nunca deben ser iguales.

A$_S$ Señala el extremo izquierdo de la línea negra (eje x)

Intervención del observador:

Sí consideran que la función está definida de -2 a 2, ¿qué pueden decir?

A$_P$: // Si llega aquí, por decir, es 2; si aplicamos la de x^2, entonces es 4

Señala el extremo derecho de la línea negra y luego indica con la mano que el extremo derecho gris se saldría de la pantalla.

A$_R$: // Entonces si es el segundo hecho porque en los dos extremos debe ser el mismo punto.

A$_B$: // Bueno, si aquí fuera un cero (*alude al segundo hecho*), se supone que arriba tendría que ser cero… tendría que haber una línea recta, ¿no? Y si te fijas por ahí hay un momento… bueno, se ve muy rápido, donde casi se hace recta.

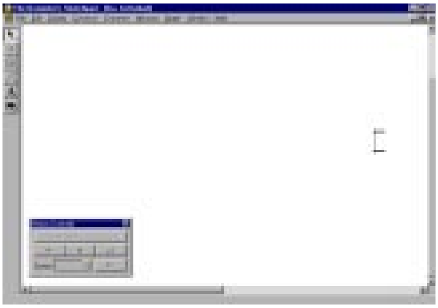
A$_R$: // El extremo derecho y el izquierdo deben ser el mismo punto para éste; a la mitad que debe ser cero, da cero, tomando en cuenta que éste es cero y éste, cuatro.

Aquí, los alumnos”A$_{P”}$ y A$_S$ indican el extremo derecho negro, correspondiente con el derecho gris (del segundo hecho), y el extremo izquierdo negro con el derecho gris.

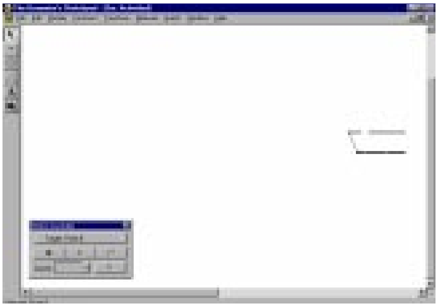
Con estas dos actividades, como ya dijimos, se tenía la intención de generar en los estudiantes por un lado, una discusión sobre la noción de función bajo un esquema diferente al escolar, por otro, privilegiar la percepción global de la continuidad, dado que este tipo de percepción suponemos, resulta ser la más natural para el ser humano.

En la segunda actividad, los alumnos se vieron en la necesidad de buscar y establecer marcos de referencia sobre las representaciones de la pantalla, a fin de que lo presentado pudiera ser traducido a un lenguaje matemático conocido y manejado por ellos. Por ejemplo, empezaron a analizar la velocidad con la que se desplazan ambos puntos, representando tal hecho con el movimiento de sus manos. Operativamente, al trabajar de manera directa con sus manos sobre la pantalla de la computadora, determinaron zonas claves en dichas representaciones, con lo cual ampliaron y transformaron la información extraída. Así, la representación de una función dejó de ser sólo una gráfica, una expresión algebraica o alguna tabla de valores, ya que pasó a un estado icónico y gesticulativo. Estos últimos fueron los facilitadores e intermediarios en el entendimiento del saber matemático.

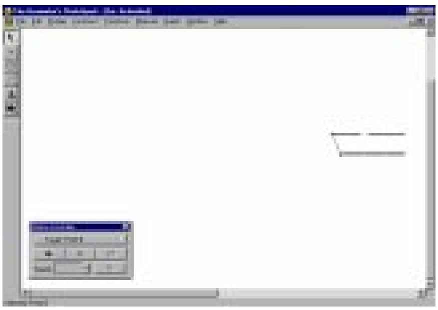
Actividad 3. ¿Existirá una función real de variable real que nos describa lo que se mira en la pantalla?



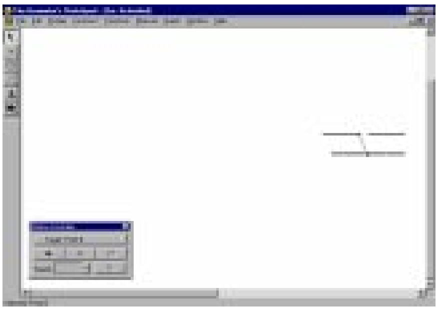
1er. instante



2º. instante



3 er. instante



4º. instante

Equipo1

A_S: ¡Una función que describa el movimiento de la línea *gris y la línea negra!*

La alumna A_S *se muestra pensativa, llevándose la mano derecha a la cara.*

A_R: Entonces $f(x)=x$ hasta $x=0$, suponiendo que el centro es el cero (se refiere al centro como a la mitad de la línea negra)

A_S: Es como continuidad

A_P: umm, discontinuidad

Sus rostros muestran un cierto grado de seguridad en lo que dicen, pero algo parece preocuparles.

A_S: Pero es que allí hay una discontinuidad, ¿no? Se supone que aquí y no tiene un valor para x.

Señala el espacio donde deja pintarse la línea gris; su rostro indica a los demás que ya tiene una repuesta a su pregunta. No obstante, también denota que percibe algo que no es capaz de explicar todavía.

A_R: ¡No! Tiene dos valores para x, como la función de valor absoluto, es decir, se corta este mismo.

El alumno A_R *mira detenidamente la representación en la pantalla, tratando de mostrar una correspondencia en el hueco aunque no se vea.*

A_S: En el origen se corta.

Su rostro muestra que no solo está viendo la pantalla, sino además está haciendo comparaciones: eso se nota en la forma como observa. A_P *señala la mitad de la línea negra y la hace corresponder con el hueco de manera perpendicular. Se retira un momento y vuelve a repetir el señalamiento anterior, sólo que ahora se nota que empieza a profundizar sobre sus nociones o pensamientos, mientras sus demás compañeros siguen debatiendo.*

A_R: Hay que encontrar la primera línea gris y luego la segunda. La primera es $f(x)=x$ hasta el punto $x=0$. Ahora, de cero a la izquierda pasa algo que convierte a la función.

Señala la mitad de la línea negra y dirige su dedo de forma perpendicular a la parte donde no hay línea gris. Al mismo tiempo, traza sobre la pantalla un eje coordenado que tiene el punto de corte (origen) en la línea negra debajo del hueco de la gris.

A_S: Es discontinua en cero

A_R: Ajá, por eso, ¿cuál es? Va avanzando a la misma velocidad, entonces no hay variación de alguno que se vaya más rápido.

A_B: Pero ahí se está saltando el origen, ¿no?

A_R: // Entonces se va a sumar o a restar una constante. ... (dijo) ..., Para, $x<0$, $f(x)=x-1$ y hay cumple, ¿no?

En este momento dicho alumno para cerciorarse de lo que dice, empieza a trabajar en las hojas de trabajo, estableciendo la siguiente función explicita.

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x-1, & x<0 \\ x, & x>0 \end{Bmatrix}$$

No está determinado el menor igual para que sea función. Si pertenece a las dos ya no sería función // no está definida en cero [aquí se refiere a que el valor cero, solo lo toma una de las partes de la función, pero como no sabe a cuál, dice que no está definido o se queda indefinido, pero la función sí toma el valor cero, es decir, si está definida para tal valor].

Equipo 2

A_O: Mira cómo aquí se va derecho y aquí se va... (indica la inclinación de la línea que une los puntos de la línea negra con la gris).

Teniendo el dedo índice en la pantalla de la computadora, señala el recorrido del punto de la línea gris, hasta antes del "rompimiento" e inmediatamente, cuando pasa por el lugar donde deja de pintarse la línea(el rompimiento), inclina la mano de manera suave continuando con la imitación del recorrido.

A_L: Tendría que ser una función definida en dos partes.

Este alumno observa el comportamiento de la línea gris e induce su conjetura, su rostro denota una gran seguridad de lo que dice.

A_O: Sí, ¿no?, no puede ser una sola, ¡yo digo!

A_O: // Aquí $y = x$ (*señala la primera parte de derecha a izquierda de la línea gris*).

A_F: **¡**Pero fíjate!

A_L: Varía en la misma proporción (para $x>0$).

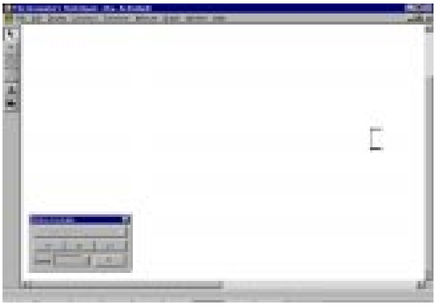
A_L: // Si se mantiene constante, le sumas (por partes)

Sería $f(x)=\begin{cases} x-a, & x<0 \\ x, & x>0 \end{cases}$ y no sabemos si está abierto o cerrado.

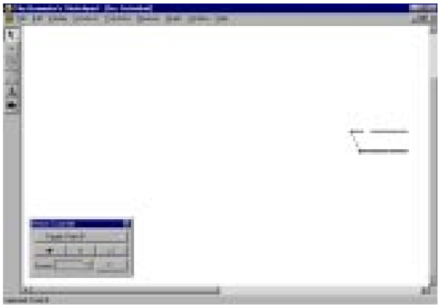
En esta actividad, los estudiantes combinan expresiones verbales del ámbito cotidiano con locuciones propias del lenguaje matemático, a fin de referirse a la noción de la no-continuidad de una función en algún valor específico de su dominio. Frases como "se corta", "salta" y "brinca", ligadas a las gesticulaciones de inclinaciones de la mano, los desplazamientos suaves y no suaves de la mano de un lado a otro, así como las indicaciones de perpendicularidad con ademanes, tendieron a ser un medio de enlace entre un saber matemático y una forma de comunicación particular. Las expresiones hechas por los estudiantes dieron muestra de las relaciones que se establecen entre el contenido matemático (continuidad puntual) y el aspecto discursivo. También notamos que las formas discursivas, la exposición y el tipo de narración evocada permitió a los estudiantes explicar y caracterizar un tipo de comportamiento asociado al concepto matemático de función y función continua.

Nótese que, hasta esta fase del desarrollo de la actividad, no se ha hecho necesario recurrir al escenario escolar acostumbrado para discutir sobre las formas de cómo se construye un conocimiento matemático, ni cuáles son las nociones y concepciones que los estudiantes tienen sobre un determinado concepto (la continuidad de una función). Dicho de otro modo, suponemos que el planteamiento de escenarios donde se pongan en juego aspectos gestuales, visuales y discursivos en torno a una noción, propicia el surgimiento de elementos de análisis decisivos que permiten ampliar y reconocer ciertos procesos ligados al entendimiento de una noción. Por ejemplo, inferimos en que el proceso de visualización puede ser caracterizado mediante la forma gestual ante una situación problema en particular.

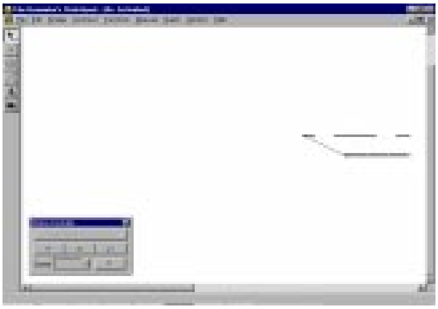
Actividad 4. El siguiente hecho tiene asociado una función real de variable real. Determinen una posible representación gráfica para ella y su expresión algebraica.



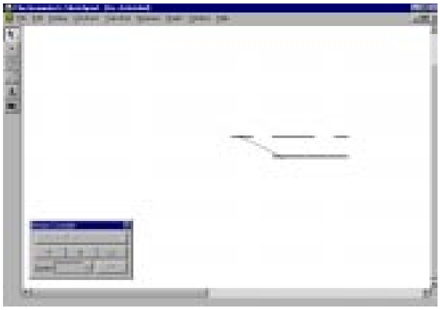
1er. instante



2º. instante



3 er. instante



4º. instante

<u>Equipo 1</u>

A_R: No se puede definir exactamente, a menos que se tome como el origen.

La alumna A_P indica los lugares donde se miran espacios en la representación. Señala el primero de derecha a izquierda y luego el segundo para relacionar lo que observa a algo con lo que desea compararlo.

A_S: Aquí es igual que la otra.

Se refiere a la primera parte de la línea gris de derecha a izquierda.

A_R: Viajan a la misma velocidad.

Está observando la pantalla. Sigue el movimiento y lo expresa a través de su mano derecha, haciendo inclinaciones donde la línea gris se deja de pintar.

A_S: Sí

A_R: Entonces, nada más es incremento de

x y $f(x)=x/$, ¿verdad?

A_S: Umm / de que hay incremento en $f(x)$ sólo hay que aumentarle… ¿pero porqué sería discontinua? Hay que ver porqué es discontinua en un punto.

A_R: Por eso, para valores hasta un tercio de la recta de x, hasta un tercio es x

[Entran en un debate para precisar y hacer explicita la función. Para convencerse de que realmente hay una función real de variable real, usan la variación de parámetros en funciones $f(x+c)$; $f(x\text{-}c)$; $f(x)+c$; $f(x)\text{-}c$ para ajustar las gráficas]

Señala una parte de la línea negra que corresponde hasta antes del primer rompimiento o la trayectoria de la línea gris, de derecha a izquierda.

[En estos momentos comienzan a trabajar en las hojas de trabajo, olvidándose por momentos de la pantalla. La alumna A_S nota como el segmento de en medio de la línea gris es más grande en longitud que las otras de los extremos, lo cual le hace deducir que la parte de esa gráfica no pasa por el origen].

A_R: **¡**Conclusión! Sí existe una función y está dada por partes.

Equipo 2

A_O: Ups, **se dio un brincote** (alude a la primera parte de la línea gris de derecha a izquierda). ¡Ahí son tres partes!

A_F: Sí, está definida en tres (se refiere a que la función está dada en tres partes y, por tanto, se encuentra definida en tres intervalos distintos para x)

Mira detenidamente la pantalla y asocia algo semejante con lo ocurrido en la actividad anterior.

A_L: Hay que ver dónde quedan iguales. Por ejemplo, allí no es cero.

Indica a la mitad de la línea gris con relación a la mitad de la línea negra, al tiempo que se está imaginando la parte de una gráfica lineal que tenga ese comportamiento en un intervalo semejante al que se observa en la pantalla.

A_O: ¿Pero dónde se cortan?

Parece que también asocia una representación gráfica como en la actividad anterior, salvo que ahora no ve por donde pasa el segmento de la gráfica, pues ya no es a la mitad

A_L: Bueno, eso se puede quedar indefinido.

No siente la necesidad de encontrar un lugar o coordenadas explicitas para el lugar o punto donde se corta la función.

/ No es abierto en ninguna parte, está definida para todo x; en el rango no está definido. En x está definido sólo por rangos, no tenemos porque eliminar ningún igual. La x, si te fijas, nunca se borra, lo cual indica que sí está definida, solo que toma un valor, ya sea arriba o abajo.

Indica las partes negras donde hay huecos correspondientes a las partes gris donde se pierde la trayectoria.

A_L: Es que fíjate en el dominio: no se borra la imagen (Habla sobre la trayectoria de la línea negra, tratando de explicar que el punto del dominio o está en una parte de la gráfica o en la otra; por eso, no hay partes abiertas). **Sí se borrara la imagen** (trayectoria), **sí tuviera un hueco como en el gris**, entonces quiere decir que **para ese punto la función no está definida, no toma ese valor**.

Esto lo hace señalando el primer extremo izquierdo gris con su correspondiente parte negra, de manera perpendicular.

A_L: **Debería borrarse x**.

Indica que, en el punto correspondiente en la línea negra a las partes de los huecos en la línea gris, debería borrarse también perpendicularmente un punto de la línea negra para que indicara que ahí no está definida la función, es decir, "que el límite de la función en esos puntos no es igual a la función evaluada en esos puntos".

Las dos últimas actividades de la secuencia didáctica permitieron a los alumnos, por un lado, romper con la percepción global de la continuidad de funciones, como se puede notar en los parágrafos anteriores, lo cual se consigue mostrando simples rompimientos en las representaciones tratadas –ligadas a expresiones funcionales–; por otro, se hizo necesario construir no sólo un lenguaje que permitiera dar explicación a las interrogantes planteadas por el medio, sino también crear objetos intermediarios que facilitaran y favorecieran el entendimiento de las nociones.

Así, los alumnos tendieron a buscar información local, atribuyendo propiedades a ciertas zonas donde, a su entender, se podía efectuar algo semejante en lo que ellos están experimentados. El establecimiento de marcos de referencia, como el valor cero en las funciones, y aspectos como la traza permanente en la línea negra (eje x) y la interrumpida traza en la línea gris (eje y) en una zona específica, les dieron elementos de análisis para el estudio del comportamiento de las funciones tratadas.

5. Conclusiones

Este trabajo de investigación centró la atención en las formas discursivas y en el carácter gesticulativo de las intervenciones de estudiantes universitarios ante procesos de interacción y construcción de un conocimiento matemático particular, el de la continuidad puntual de una función, dentro de un escenario de resignificación. Si bien es cierto que algunas disciplinas han intentando explicar el comportamiento y generación de conocimiento del ser humano a través del análisis de aspectos como el estado afectivo, las expresiones discursivas y las corporales, también es cierto que este tipo de aspectos, en particular la incorporación de lo gestual, ha sido escasa en el estudio de las problemáticas ligadas al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Nuestra experiencia didáctica, guiada bajo el marco socioepistemológico, nos permite afirmar que sus resultados proporcionan información significativa sobre el aporte del aspecto *gesticulativo* en la resignificación del concepto de función continua en un punto. Identificamos algunos elementos –como se ha mencionado en el apartado anterior– que fueron esenciales en las formulaciones de las repuestas de los estudiantes, tanto a nivel individual como grupal; por ejemplo, notamos que la posibilidad de visualizar un concepto matemático en una computadora y el acto de visualización no se ven reducidos al uso de una herramienta tecnológica. En nuestra opinión, a juzgar por los resultados obtenidos, la incidencia de la dimensión gestual es un medio que ofrece la posibilidad de articular las acciones de visualización de conceptos matemáticos, de manera que una representación en la pantalla de la computadora sólo permite fincar un escenario donde el estudiante habrá de ampliar y generar nuevas significaciones, más aun si dichas representaciones son articuladas con lo gestual.

Nuestro diseño de secuencia ofrece una alternativa de análisis en el estudio de la noción de continuidad puntual. Sugiere que la comprensión de tal noción no se desprende de su comprensión grupal, sino, de la idea de discontinuidad que pone en conflicto la continuidad puntual y la consideración de las interacciones que reconoce además de elementos discursivos verbales los gestuales.

Considérese como ejemplo, las expresiones lingüísticas de los estudiantes en las actividades 3 y 4; *Es como continuidad; umm… discontinuidad; Es que fíjate en el dominio no se borra la imag*en; *Sí se borrara la imagen (trayectoria), sí tuviera un hueco como en el gris, entonces quiere decir que para ese punto la función no está definida, no toma ese valor.*

Logramos mostrar que el enfrentamiento de los estudiantes con la noción de continuidad global y continuidad puntual les permitió, por un lado, generar argumentos de corte discursivo matemáticos; por otro, sentar la idea de continuidad puntual. Entre los primeros, se encuentra el uso de la analogía, el recurso de la metáfora y lo gestual como antecedentes a los recursos matemáticos. Citemos los casos, aquellos donde los estudiantes utilizaron expresiones lingüísticas como “salta”, “brinca”, “se corta” “no se borra” haciéndolas acompañar del aspecto gestual, para finalmente asociarlas con un conocimiento escolar. Por tanto, ubicar a un estudiante en un escenario donde tenga la libertad de emplear expresiones discursivas y gestuales, de tal suerte que no se vea restringido a su dominio de saber escolar “condicionado”, va a permitir que resignifique y construya nociones matemáticas, al tiempo que surgen elementos de análisis para entender las formas cómo se produce aprendizaje.

Desde nuestra perspectiva, los resultados que obtuvimos en nuestra experiencia didáctica nos permiten señalar tres puntos importantes:

1) Los obstáculos epistemológicos y cognitivos que pudieran estar ligados al concepto de continuidad puntual –como la noción de función– pueden ser superados si se proponen escenarios que ofrezcan libertad de expresión al estudiante, en un sentido amplio como el que aquí se propone. Consideremos las evidencias reportadas en la literatura y que hemos citado, donde se establece que uno de los problemas que enfrentan los estudiantes en su entendimiento de la noción de continuidad puntual está relacionado con la noción de función. Por nuestra parte, logramos identificar que los estudiantes no sólo pueden superar dichos problemas –en caso de padecerlos– sino son capaces de reconocer a una función en diversas representaciones y, a partir de ello, desarrollar competencias necesarias para analizar la propiedad de continuidad global y continuidad puntual.

2) La información que ofrece un análisis de corte epistemológico y social sobre la construcción y desarrollo de una noción matemática provee de elementos teóricos para el diseño de secuencias didácticas, las cuales vayan orientadas a la investigación de los problemas que se asocian con la generación y construcción de conocimiento matemático.

3) El análisis de la dimensión gestual en articulación con lo discursivo asienta, por un lado, las acciones ligadas al proceso de visualización de los conceptos matemáticos; por otro, favorece el aprendizaje a partir de las interacciones establecidas entre los miembros de un grupo y un saber a ser compartido.

4) Finalmente, aun cuando la información recolectada de manera escrita o verbal ofrece elementos de análisis para los aspectos que

intervienen en la construcción de un conocimiento matemático, además pretendimos evidenciar que el aspecto gestual, como parte de lo discursivo, también brinda elementos para el estudio de los procesos relacionados con la generación del aprendizaje.

Asimismo, sostenemos que los conceptos matemáticos no deben ser presentados y estudiados como meras elaboraciones cognitivas espontáneas, sino deben analizarse como resultado de conceptos y experiencias ya elaboradas, las cuales pertenecen, en la mayoría de los casos, a un nivel preconceptual. Este tipo de investigaciones exige de un análisis fino y sistémico de la interacción de las componentes inmersas en el saber (social, epistemológica, cognitiva y didáctica), que permita sentar principios teóricos para el diseño de secuencias de corte didáctico.

6. Bibliografía

Alexandrov, A.; Kolmogorov, A; Laurentiev, M. (1973). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid, España: Alianza Universidad.

Aparicio, E.; Cantoral, R.; Rodríguez, F. (2003). Visualización y tecnología: un enfoque a las aproximaciones sucesivas. En Delgado, J. R. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 16, número 1, pp. 457). La Habana, Cuba.

Aparicio, E. (2003). *Sobre la noción de discontinuidad puntual: Un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes de ingeniería en contextos de geometría dinámica*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Aparicio, E.; Cantoral, R. (2003). Sobre la noción de continuidad puntual: Un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometría dinámica. *Epsilon 56*, 169-198.

Artigue, M (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. En R. Biehler, et al. (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, pp 27-39.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez P. (Ed.),*Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Editorial Iberoamérica.

Azcárate, C.; Delgado, C. (1996). Study of the evolution of graduate student's concept images while learning the notions of limit and continuity. *Actas del PME 20* (2), 289-296.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Sciencie and Technology 32* (4), 487-500.

Boyer, C. (1959). *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York, USA: Dover Publications.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7* (2), 33-115.

Candela, A. (2001). Corrientes teóricas sobre discurso en el aula. *Revista Mexicana de Investigación Educativa 6* (12), 317-333. Obtenido en septiembre 15, 2002, de http://www.comie.org.mx/revista/Pdfs/Carpeta12/12invest1.pdf .

Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F.; Alanís, J.; Rodríguez, R.; Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R.; Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del Cálculo Infinitesimal* (pp.69-91). México: Iberoamérica.

Cantoral, R. (2001). *Matemática educativa: un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Iberoamérica.

Cantoral, R. (2001). La socioepistemología: Una mirada contemporánea del quehacer en Matemática Educativa. *Antologías*, número 1. México: Publicaciones de la red Cimates-Clame.

Cantoral, R; Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice-Hall.

Cantoral, R.; Farfán, R. (2004). Sur la sensibilité a le contradiction en mathématiques: l'origine de l'analyse complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques 34* (2-3), 137-168.

Cantoral, R.; Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo.* México: Thomson.

Cazden. C. (1986). Classroom discourse. En M. E. Wittrock (Ed.) *Handbook of Research on teaching* (pp. 432-463). New York, USA: Macmillan Publishing Company.

Cordero, F. (2001). La incidencia de la socioepistemología en la red de investigadores en Matemática Educativa. Una experiencia. *Antologías*, número 1. México: Publicaciones de la red Cimates-Clame.

Dolores, C. (2001). Los significados del lenguaje variacional en el aprendizaje de la matemática. *Antologías*, número 1. México: Publicaciones de la red Cimates-Clame.

Edwards, Ch. (1979). *The historical development of the calculus*. New York, USA: Springer-Verlag.

Farfán R.; Hitt, F. (1990) Intuitive processes, mental image and analytical and graphic representations of a stationary state: a case study. *Proceedings of the 14th Meeting of the Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 45-52). Oaxtepec, México.

Ferraro, G. (2000). Functions, functional relations and the laws of continuity in Euler. *Historia Matemática 27*, 107-132.

Grattan-Guinness, I. (1980). *From the calculus to set theory 1630-1910. An introductory history*. London, England: Duckworth.

Green, J.; Gee, J. (1998). Discourse analysis, learning and social practices: A methodological study. *Review of Research in Education 23*, 119-169.

Hicks, D. (1995). Discourse, learning and teaching. *Review of Research in Education 21*, 49-95.

Hitt, F. (1994). Teachers' difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics 16* (4), 10-20.

Kress, G.; Ogborn, J. (1998). Modes de representation and local epistemologies: the representation of Science in Education. *SISC Working*, Paper 2.

Nemirovsky, R.; Noble, T. (1997). On mathematical visualization and the place were we live. *Educational Studies in Mathematics 33* (2), 99-131.

Ogborn, J. (1996). Methaphorical understandings and scientific ideas. *International Journal of Science Education 18* (6), 631-652.

Sierpinska, A.; Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop, et al. (Eds), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827- 876). Dordrecht, Netherlands: Kluwer [traducción de Juan Díaz Godino].

Sierra, M.; González, M.; López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3* (1), 71-85.

Spivak, M. (1998). *Calculus: Cálculo Infinitesimal*. Barcelona, España: Reverté.

Tall, D.; Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*, 151-169.

Tall, D. (1995). Visual organisers for formal mathematics. En P. Sutherland & J. Mason (Eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (Volumen 138). USA: Springer-Verlag.

Zimmerman, W.; Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

- **Eddie Aparicio**
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
México

E-mail: alanda@tunku.uady.mx

- **Ricardo Cantoral**
DME- Cinvestav-IPN
México, D.F.

E-mail: rcantoral@cinvestav.mx