Elementos Históricos y Psicogenéticos en la Construcción del Continuo Matemático

PRIMERA PARTE

Introducción

Es frecuente encontrar en las investigaciones sobre educación matemática la idea de que la continuidad es una noción intuitiva. En un artículo aparecido en *Educational Studies*, por ejemplo, su autor afirma que *las propiedades de las rectas que son específicas de los números reales* (*continuidad, es decir, conexidad e innumerabilidad*) *son tan intuitivas como Dedekind lo expresaba.*[1]

Esta tesis se plantea en el ámbito educativo en general, y permea la enseñanza del concepto continuo. Las estrategias didácticas para introducir este concepto en los niveles medios de escolaridad, están basadas en la suposición de que la continuidad es un concepto evidente en la recta, al cual es posible acceder por medio de la percepción directa y operaciones concretas sobre los objetos geométricos.

En primera instancia, este esquema didáctico basado en intuiciones geométricas puede parecer adecuado, dado que en la enseñanza de nivel medio no se plantea como objetivo el introducir formalmente el concepto de continuidad. No obstante, en estos niveles, la continuidad no sólo aparece en contextos geométricos, sino que frecuentemente se relaciona con problemas relativos al domi-

[1] *Educational Studies*, Robinet, 1986, p. 361.

Mirela Rigo Limini

CINVESTAV-Sección de
Metodología y Teoría de la Ciencia

nio numérico. El continuo está en la base de la construcción de la recta de la geometría analítica y de los números reales; a la continuidad se recurre también cuando se grafican expresiones analíticas de funciones y se considera que su dominio (aritmético) puede representarse geométricamente en la recta, así como para justificar la construcción de gráficas sin rupturas, interpolando puntos aislados.

A pesar de que el concepto de continuidad es básico en la educación matemática de niveles medios, no se han elaborado las preguntas pertinentes que permitan centrar la atención en el problema, y guíen las investigaciones que lleven a solucionarlo. En este artículo, nos hemos propuesto dos obietivos:

a) Mostrar —a través del trabajo sobre números irracionales de Dedekind—, que la construcción de la recta analítica y el número real, se apoya en operaciones —como la de variación continua— y en conceptos —como el de continuidad e infinito— que trascienden el nivel de la operatividad concreta, por lo que dicha construcción precisa de una noción de continuo distinta a la idea "geométrico intuitiva".

b) Aportar elementos —mediante el análisis de un cuestionario aplicado a un grupo de profesores—, que muestran que los alumnos de los niveles medios de escolaridad llegan a clase de matemáticas con un significado específico de la palabra continuidad, y que, por lo general, la educación no logra transformar.

Nuestro trabajo está basado en la idea de que la historia es un instrumento útil en la comprensión de problemas relativos a la educación. El conocer los instrumentos cognoscitivos que subyacen a la construcción del número irracional en Dedekind, y confrontar dichos instrumentos con los que, en estado menos desarrollado, aparecen en *Los Elementos*, nos permite conocer los problemas inherentes a su evolución. Esto representa un punto de partida para establecer conjeturas plausibles acerca de las dificultades que los estudiantes tienen en la adquisición y maduración de dichos instrumentos de conocimiento.

El estudio histórico presentado en la primera parte de este escrito, será entonces la base para el análisis psicogenético, sobre el cual versará la parte segunda.

1.1. La continuidad en Dedekind

La noción de continuidad tiene connotaciones geométricas y físicas. Esto podría sugerir que en el transcurso de la historia, el concepto de continuo inicialmente se formalizó en la geometría o en la física.

Tanto en la mecánica de Newton, como en las matematizaciones de diversos fenómenos físicos que se hicieron posteriormente, se plantearon conjeturas sobre la continuidad del tiempo y del espacio[2]; sobre la continuidad del movi-

[2] El trabajo de Newton, por ejemplo, está basado en la suposición de que el tiempo —su variable independiente fundamental— es continuo. "*Considero el tiempo* —afirma—, *como fluyendo o incrementando con un flujo continuo, y otras magnitudes como incrementando cotinuamente en el tiempo. . .*" [*The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. 3, p. 17, tomado de Cohen]. Afirma, por otra parte, "*que la magnitud matemática, la extensión en particular, puede concebirse como generada por el movimiento local continuo*" [*The method of fluxions and infinite series*, tomado de Cohen p. 80], y considera al espacio —que en su trabajo tiene un carácter más geométrico que físico—, *como descrito por un objeto móvil en su curso* [*Tratado del método de fluxiones y de las series infinitas*, tomado de Cohen, p. 78].

miento y de los fenómenos de variación que se daban en dicho tiempo y espacio[3], y sobre la posible estructura continua o discreta de la materia[4].

En la geometría, la continuidad del espacio era un hecho que se daba por sentado. De esta hipótesis, generalmente implícita pero prevalente en todos los trabajos geométricos realizados hasta el siglo XIX, se desprendía la continuidad del espacio geométrico y de los objetos que en él estaban contenidos.

A pesar de que en estas disciplinas se hacía referencia constante a la continuidad, el concepto de continuo no encontró su primera definición formal y 'analítica' en ellas. Hilbert —para poner un ejemplo que ilustra adecuadamente este estado de cosas— en las primeras ediciones de *Fundamentos de la Geometría* introduce como axioma de continuidad uno equivalente al principio arquimediano[5]. Sólo en versiones posteriores introduce un axioma de continuidad equivalente al que enuncia Dedekind.

El problema de dar a la idea de continuidad una expresión precisa se plantea en el marco de lo que en el siglo XIX se denomina "Análisis Matemático", y se asocia a la necesidad de fundamentarlo de manera rigurosa.

En la obra *Continuidad y Números Irracionales*, publicada en 1872, Dedekind expresa que el trabajo como profesor le permitió tomar conciencia *de que el Cálculo carecía de un fundamento científico*. Siguiendo un programa de construcción del análisis matemático[6], Dedekind demuestra que es posible dar a esta disciplina una base sólida introduciendo *una definición real de la esencia de la continuidad*. Ésta permite probar teoremas de convergencia que se solían demostrar empleando ideas ajenas al Cálculo, así como dar una definición *puramente aritmética* de los números reales, evitando el concepto de magnitud, que como él dice, *en ningún lado se ha definido*.

Dedekind introduce la definición aritmética de la continuidad en el marco de la construcción del sistema de los números reales. La inicia considerando

[3] Descartes, por ejemplo, alude al "movimiento continuo" como uno de los criterios para aceptar curvas en la geometría. Al respecto afirma: "*Las curvas que deben admitirse en esta ciencia son aquellas que pueden ser descritas por un movimiento continuo o por varios movimientos sucesivos, . . .*" [*Geometría*, p. 305]. El movimiento continuo generado por aparatos mecánicos y realizado en un tiempo y en un espacio que se suponen continuos, le permiten a Descartes enfrentar el problema de que las curvas continuas y "completas" (es decir, con todos sus puntos), estén a la vez compuestas por puntos. Esta salida dinámico-geométrica al problema de la continuidad se preservará no sólo en los trabajos de Newton —quien también considera a las curvas trazadas por un punto en movimiento—, sino hasta finales del siglo XIX.

[4] Aunque dentro del trabajo sistemático de los *Principia*, Newton se niega a hacer hipótesis que llama 'de carácter metafísico', es decir, que se refieran a la esencia de las cosas o pretendan dar explicación de causas últimas, hace algunas hipótesis corpusculares, como es el caso cuando discute la ley de los gases de Boyle (según la cual, en un gas encerrado en un recipiente, la presión es inversamente proporcional al volumen). En los *Principia* [libro segundo, proposición 23, escolio, p. 302] afirma que es un problema físico el que los flüidos elásticos (gases compresibles) consten realmente de partículas que se repelan de ese modo entre sí; pero —según Cohen—, *para Newton no había la menor duda de que tales "fluidos elásticos" constaban realmente de partículas, ya que creía firmemente en la filosofía corpuscular* [Cohen, p. 49]. En la *Optica*, por otra parte, también hace hipótesis sobre el carácter corpuscular de la luz; no obstante, en respuesta a las críticas de Hooke, aclara que sólo se trata de consecuencias plausibles de su doctrina, segun la cual a la luz sólo se le considera en términos generales y abstractos [*Isaac Newton's Paper and Letters on Natural Philosophy*, tomado de Granés, p. 27-28].

Por otra parte, las hipótesis sobre la estructura de la materia cada vez se plantearon más explícitamente en la matematización de ciertos fenómenos físicos, sobre todo en aquellos relacionados con los medios continuos. Tanto en los trabajos sobre fluidos realizados por Euler y los Bernoulli, como los que Navier hizo sobre la elasticidad, los de Laplace y los de Cauchy, se hacen diversas hipótesis sobre la composición de la materia [v. Amy Dhan Dalmedico, 1989].

[5] "*Este axioma —dice— hace posible introducir en la geometría el principio de continuidad [1899, p. 15]. En ediciones posteriores,*" *en las que incorpora a su axiomatización un principio de continuidad (equivalente al dado por Dedekind), asegura que es la piedra angular del sistema completo de axiomas* [1971, p. 21].

[6] Agrosso modo puede decirse que su programa está en línea con el de Lagrange, Bolzano y Cauchy, quienes se plantean como objetivo explícito el demostrar los teoremas del análisis de acuerdo con el "método analítico", para lo cual consideran necesario definir sus conceptos (magnitud variable, derivada, etc.,) omitiendo nociones ajenas a él, como el movimiento.

que el sistema de números racionales (definido con base en los naturales) presenta cierre bajo las cuatro operaciones elementales, es un campo infinito, bien ordenado y cumple con las siguientes leyes:

(i) la relación de orden es transitiva;

(ii) el orden es denso;

(iii) todo número racional produce un "corte" o una separación en el sistema de los números racionales (***R***), es decir, que si a es un número racional cualquiera, entonces todos los números del sistema R caen en dos clases: A_1 y A_2, cada una de las cuales contiene infinidad de elementos; la primera clase, A_1 comprende todos los números a_1 que son menores que a; la segunda clase A_2 comprende todos los números a_2 que son mayores que a; el número a puede ser asignado a placer a la primera o segunda clase, siendo respectivamente el número máximo de la primera clase, o el mínimo de la segunda[7].

Pasa después al terreno geométrico. Considera que en la recta hay infinidad de puntos y que en ella valen también las leyes (i), (ii) y (iii) del sistema R. Pero además, por ser continua, establece que cumple con el siguiente principio de continuidad [(inverso de la proposición (iii)]:

(iv) Si todos los puntos de la línea recta caen en dos clases tales que cada punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe uno y solo un punto el cual produce esta división de todos los puntos en dos clases, y esta partición de la recta en dos partes[8].

Este principio lo introduce como axioma, no sólo por considerarlo evidentemente cierto, sino también indemostrable.

Una vez que caracterizó aritméticamente a la recta geométrica, muestra que el sistema R no cumple con el axioma de continuidad, y que en la recta hay más puntos que los números que hay en ***R***. Con el fin de construir una estructura numérica con las mismas propiedades que la recta, Dedekind amplía el sistema de los números racionales, para lo cual, por definición, a toda cortadura (A_1, A_2) del sistema ***R*** le asigna un número real (si la cortadura es producida por un número racional, el número que se le asocia es racional. Pero si la cortadura no es producida por un número racional, entonces a dicha cortadura le corresponde, por definición, un número irracional).

Habiendo definido a los números reales, considera el *sistema **R** de todos los números reales*; demuestra que dicho sistema cumple con las propiedades (i), (ii) y (iii), pero que además vale, al igual que en la recta, la propiedad de la continuidad, la que referida al terreno numérico se enuncia del siguiente modo:

(iv) Si el sistema ***R*** de todos los números reales se parte en dos clases U_1, U_2, tales que cada número a_1 de la clase U_1 es menor que cada número a_2 de la clase U_2, entonces existe uno y solo un número a por el cual es producida esta separación.

[7] Dedekind, 1872, p. 6.

[8] *Ibid*, p. 11.

Prueba hacia el final de su escrito, que con el principio de continuidad introducido por él es posible demostrar —de manera rigurosa y sin apelar a ideas extrañas al análisis— teoremas que hacen referencia a la continuidad, como por ejemplo el que afirma que: "si una magnitud x crece continuamente, pero no fuera de todos los límites, se aproxima a un valor límite".

1.2. Aspectos epistemológicos en la construcción del continuo matemático

El análisis de la construcción de los números reales de Dedekind, permite poner al descubierto mecanismos operatorios, lógicos y conceptuales que subyacen a la construcción del continuo matemático. En lo que sigue, describiremos algunos de estos mecanismos.

A. La continuidad matemática como problema aritmético

Dedekind, en su trabajo, define la continuidad de la recta antes de dar una caracterización de la continuidad de los conjuntos numéricos. Esto podría sugerir que su definición matemática de continuidad fue resultado de una intuición especial, y que su conceptualización dependió de lo que él "observó" en la recta.

Nosotros consideramos que el proceso que lo guió hacia la definición formal de continuo matemático más bien se dio a la inversa: Dedekind reconoció que la continuidad definida por él se podía distinguir en la recta, una vez que caracterizó a los conjuntos continuos —fundamentalmente a los numéricos— como el de los números reales, cuyas propiedades (como conjunto infinito, continuo, campo algebraico, etc., con sus correspondencias con los dominios geométricos y físicos) él conocía.

No cabe duda que la recta es, como dice Dedekind, *modelo irrevocable de lo continuo*. En la línea resultan plausibles, e incluso evidentes, muchos de los conceptos o de las operaciones lógicas relacionadas con la continuidad. Mientras la línea siempre ha sido tratada como un dominio continuo, para construir un dominio numérico continuo es necesario ampliar el conjunto de los naturales y los racionales (con los que se pueden representar operaciones concretas, como son el contar y el medir) y definir los números irracionales, objetos que son resultado de una operación formal. La variación continua en la recta resulta, por tanto, más clara que cuando se aplica al campo aritmético, en el que es preciso trasponer los números decimales finitos, con base en los cuales sólo es posible construir sucesiones discretas de números[9]. En la línea, además, los principios de continuidad son plausibles, a diferencia de lo que sucede en el terreno aritmético. Allí, los correspondientes principios de continuidad no son nada evidentes, e incluso resultan difíciles de aceptar de entrada[10].

[9] En la historia de la matemática teórica, la variación continua en dominios numéricos se planteó hasta que se "superó el obstáculo" que representaba el considerar a los dominios numéricos como discretos. Entre otras cosas, el obstáculo fue superándose a partir del trabajo que Stevin hace en torno al desarrollo de una operatividad para la notación decimal (herramienta que permite aproximar cualquier valor), y con las distintas tablas numéricas que se habían elaborado, sobre todo las de los logaritmos de Napier (1614). Sobre estos antecedentes se plantea la posibilidad de interpolar dos valores sucesivos de una tabla para hacerla "lo más continua o aproximada" posible.

[10] Cuando todavía al inicio del siglo XIX se hacía alusión a los principios de convergencia o continuidad en el terreno numérico, como por ejemplo, el que toda sucesión creciente y acotada de números converge a un número, su evidencia se apoyaba en el terreno geométrico. Mientras la convergencia de ciertas sucesiones de puntos en la recta era tratada como evidente, las sucesiones infinitas, y sobre todo las series infinitas de números eran manejadas no sólo con cautela, sino con desconfianza. Los criterios de convergencia de las series y de las sucesiones numéricas se encuentran hasta los trabajos decimonónicos de Gauss y de Cauchy, apareciendo siglos después de que éstas se introdujeron a la matemática y que se tenía ya una gran experiencia operándolas.

Pero si bien la recta representa el objeto matemático idóneo para modelar el concepto de continuidad, en el plano histórico, los problemas que llevaron a la formalización del concepto no se plantearon, como ya lo mencionamos, en el ámbito de la geometría. Es muy posible que esto haya obedecido a que la continuidad en esta disciplina siempre ha sido considerada como un término evidente, incuestionable y primario en el orden de la lógica. Como dice Piaget, *la conciencia de una relación es tanto más tardía cuanto más primitivo y mecánico es su uso en la acción. . .*[11].

Bolzano, además de ser uno de los primeros en tomar conciencia del problema de la continuidad matemática, comprendió que debía ser abordado de manera *puramente analítica*[12]. Rechazó los métodos empleados durante la construcción del Cálculo, consistentes en suponer que las curvas son continuas debido a que han sido trazadas mediante movimientos realizados en un tiempo continuo y en un espacio que también lo es.

No obstante, todavía matemáticos contemporáneos de él (como Cauchy), demuestran propiedades relacionadas con la continuidad del dominio (numérico) de las funciones, apoyándose en "características evidentes" de la continuidad de la línea.

Es en el transcurso de la segunda mitad del siglo XIX, que en el análisis matemático se retoma el camino marcado por Bolzano. En este periodo, las principales dificultades asociadas a la continuidad se inscriben en el terreno de los números, y están ligadas al Análisis y al Álgebra: las definiciones de conceptos y operaciones relacionadas con los procesos continuos y de convergencia, son necesarias para ampliar los distintos dominios numéricos y definir formalmente una operatividad en ellos, así como para demostrar rigurosamente teoremas del análisis (como el del valor intermedio para funciones continuas) y de la teoría de ecuaciones (como el fundamental del álgebra). Resultan también fundamentales para establecer diferencias y caracterizar los dominios continuos de funciones, y aquellos en los que existen conjuntos infinitos de números (o puntos) excepcionales, para los que no se cumplen tal o cual propiedad de una función (por ejemplo, en los que una función no es integrable, o en aquellos en los que su serie de Fourier no es continua, etc.).

Como hemos dicho, sólo después de haber tematizado esta problemática vinculada a los dominios numéricos, Dedekind define un principio de continuidad lineal.

Esto contrasta con lo que sucede en el proceso educativo, en el cual se espera que se comprenda inicialmente la continuidad en la recta para después transferir y aplicar el concepto al dominio numérico.

B. Distinción número-magnitud geométrica

Con la definición de continuidad, Dedekind establece un isomorfismo entre el continuo numérico y la recta. Al elegir sobre ella un punto origen o cero y una unidad definida de longitud para medir segmentos, Dedekind construye la *recta*

[11] Piaget, 1970, p. 129.

[12] En su trabajo sobre "El teorema del valor intermedio para funciones continuas", Bolzano es el primero en destacar la necesidad de probar dicha proposición "científicamente", o de manera puramente analítica y sin apoyarse en consideraciones geométricas. Argumenta que "*no es correcto que verdades analíticas o de la matemática pura (aritmética, álgebra, análisis) como el anterior teorema, o el que después se conoció como el Teorema Fundamental del Álgebra, se deriven de consideraciones que pertenecen a una parte aplicada o especial de la matemática, como lo es la geometría* [Bolzano, 1817, p. 160].

real, legitimando el intercambio de los puntos de la recta por los números reales. Pero esta correspondencia es resultado de la separación y diferenciación entre el dominio aritmético y el geométrico, a los que trata y caracteriza de manera independiente.

El camino que se recorrió para que se llegara a esta identificación formal número-magnitud, fue largo. La matemática teórica griega separó el dominio de la aritmética del dominio de la geometría debido a la existencia de magnitudes inconmensurables, cuya razón no era posible expresar mediante una razón numérica. En el terreno de la filosofía, Aristóteles asumió esta división estableciendo una diferencia entre las cantidades continuas, como las magnitudes geométricas, y las cantidades discretas, como los números de la aritmética. Esta separación prevaleció durante un largo periodo, a pesar de los esfuerzos de matemáticos como Stevin[13].

Todavía en el trabajo de Descartes —quien tradicionalmente se ha considerado como el matemático que construyó la geometría analítica, y particularmente que asoció números con magnitudes[14]—, se observa una cautela para pasar libremente del terreno aritmético al terreno geométrico[15].

Es durante la construcción del Cálculo que el dominio numérico se encuentra con el geométrico y que se supone que a cada número es posible asociarle una magnitud (y viceversa). En la idea de cantidad convergían los números, así como las magnitudes geométricas o físicas. Para Newton, por ejemplo, las cantidades *continuamente "cambiantes"* o *en movimiento*, son productos, cocientes, raíces, rectángulos, cuadrados, cubos, lados del cuadrado y del cubo, etc. Y para Lagrange, el Cálculo tenía como objeto a las cantidades algebraicas, ejemplificando su *Teoría de funciones analíticas* con las aplicaciones geométricas del Cálculo y con la Mecánica. Tanto las cantidades en movimiento de Newton, como las cantidades algebraicas de Lagrange hacían referencia a números y a magnitudes físicas o geométricas.

No obstante, esta identificación entre número y magnitud se daba sólo a nivel operatorio; es decir, en los desarrollos algebraicos, en la resolución de ecuaciones, etc., y carecía de una base firme.

Dedekind, antes de construir un sistema de números con las mismas propiedades que la recta, caracteriza separadamente, mediante propiedades enunciadas en un lenguaje aritmético, al dominio de los números racionales y a la recta. Apoyándose en esta diferenciación, construye un continuo numérico análogo en propiedades y operatoriedad al continuo geométrico lineal.

---

[13] Stevin propone en *La Aritmética* (escrita en 1585) extender el dominio numérico, que en la matemática teórica, y como herencia de la matemática griega, estaba reducido a los números naturales. Para esto define "número algebraico" (para él, cualquier expresión algebraica representa un número); "número geométrico" (*que explica el valor de la cantidad geométrica* [Jones, p. 248]) y "número inconmensurable (*como aquellos para los que no existe algún número que sea su medida común*" [ibid, p. 250], afirmando que no existen números absurdos, irregulares o inexplicables, como antes se suponía. Con estas definiciones, y con la idea de que la unidad es un número, Stevin trata de asociar a cada número una magnitud y viceversa. [cfr. Jones, 1978].

[14] Boyer afirma, por ejemplo, que "en la matemática cartesiana, el manejo de la homogeneización facilitó la asociación implícita del sistema de los números reales con los puntos de la recta" [Boyer, pag. 84]. Descartes, en efecto, incorporó a la geometría euclidiana lo que denominó el "método analítico" de resolución de problemas; dicho de manera breve, para él esto significaba introducir el álgebra, su operatividad y sus métodos a la geometría. No obstante, no se puede afirmar que construyó la geometría analítica tal como hoy la entendemos, es decir, en la que se parte de la recta real, existen ejes coordenados en el plano, se identifican curvas con ecuaciones, etc.

[15] La metodología empleada por Descartes en su *Geometría* (1637), consistente en ir de la geometría al álgebra, plantear allí ecuaciones y resolverlas geométricamente, no requiere a nivel operatorio de la medición de segmentos, o de la identificación entre número y magnitud. Descartes en muy pocos casos resolvió numéricamente las ecuaciones que se derivaban de los problemas geométricos, pero además, en los escasos comentarios que hace en torno a la relación número-magnitud, se muestra bastante cuidadoso. Por ejemplo, en *La Geometría* explica la necesidad de relacionar a las magnitudes tanto como se pueda *con los números* (el subrayado es nuestro).

Así, los trayectos históricos del número y la magnitud no siempre han sido coincidentes. Si convergieron en la matemática de la tradición métrica (de los babilonios a los primeros pitagóricos), la matemática teórica griega los separó, volviéndose a encontrar después en la matemática aplicada y durante la construcción del Cálculo. Dedekind, de nueva cuenta, diferencia el dominio aritmético del geométrico para consolidar un isomorfismo entre ellos.

Este proceso histórico de encuentros y desencuentros entre el número y la magnitud, nos lleva a pensar que, sobre la base de tratar indistintamente a dichos objetos matemáticos —lo que comúnmente sucede en el aula—, difícilmente se podrán comprender las diferencias existentes entre ellos, y porqué y cómo es que pueden identificarse.

C. Actualización de procesos y conjuntos infinitos

En el axioma de continuidad de Dedekind se actualizan los procesos infinitos de convergencia y se presupone la aceptación de conjuntos actualmente infinitos.

Como punto de partida de su construcción, Dedekind supone que el sistema de los números racionales es actualmente infinito. Cuando define los cortes, por ejemplo, considera a todos los números que cumplen con tal o cual propiedad, expresión que hace referencia a una totalidad de números. De igual manera, la recta es de antemano un objeto infinito en extensión, conjetura necesaria para definir en ella a las cortaduras.

Una situación diferente se presenta cuando los conjuntos numéricos, o la recta, sólo se aceptan como potencialmente infinitos, es decir, susceptibles de extenderse tanto como se quiera pero de acuerdo con un proceso que nunca alcanza su fin, como sucede en *Los Elementos*. En el segundo postulado, Euclides afirma la posibilidad de "*prolongar en línea recta y de manera continua, una recta limitada*", y en el libro IX, proposición 20, *prueba que "los números primos son más que cualquier multitud dada de números primos"*, lo que es distinto a demostrar su infinitud (actual).

En su trabajo, Dedekind no sólo considera el infinito actual en extensión o "hacia afuera"[16], sino también el infinito "al interior", el cual se expresa en los procesos de convergencia o las subdivisiones infinitas. Es, justamente, el infinito al interior, y su manejo "poco preciso", lo que da la posibilidad de extraer contradicciones o sinsentidos de los argumentos de Zenón.

Como respuesta a estos argumentos, Aristóteles considera al infinito en extensión, y al infinito al interior de los objetos, sólo de manera potencial. Para él, el infinito no tiene una existencia en sí mismo (como la tiene un hombre o un caballo), sino que "*está ligado a ciertas cantidades como el tiempo, las magnitudes, las series numéricas, etc., y su existencia . . . que sólo es potencial . . . depende de un proceso . . . en el cual una cosa es tomada después de otra, pero cada una que se toma siempre es finita y diferente*"[17].

Euclides retoma el infinito en potencia de Aristóteles, tanto para el infinito en extensión como para el caso de los procesos de subdivisión infinita de magnitudes. En la proposición X.1[18], introducida por Eudoxio en la geometría y co-

[16] Expresión empleada por H. Weyl [cfr. Weyl, H., 1985].

[17] Aristóteles, *Física*, III, 6, p. 206.

[18] En la Proposición X.1. de *Los Elementos*, Euclides establece que, dadas dos magnitudes desiguales, pero homogéneas, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad, y de lo que queda, otra magnitud mayor que su mitad, y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas.

nocida como principio de exhaustión, Euclides propone la posibilidad de subdividir una magnitud tanto como se quiera, restando siempre del proceso una magnitud de la misma especie (y, por tanto, con dimensión). Con el algoritmo de Eudoxio, un proceso potencialmente infinito de biparticiones de magnitudes, se matematiza en un proceso finito.

Dedekind enfrenta el problema del infinito al interior, concibiendo los procesos de convergencia como terminados. En su trabajo sobre los números reales no aparece explícitamente la hipótesis de la actualización de los procesos infinitos de convergencia. No obstante, está como supuesto implícito cuando demuestra que el sistema de números reales es continuo, tomando como base la existencia del *sup* o del *inf* de los conjuntos de números racionales definidos por la cortadura (lo que puede hacer porque previamente ha definido al número real)[19].

La conceptualización del infinito actual se sustenta en instrumentos cognoscitivos diferentes de aquellos sobre los que descansa la aceptación del infinito potencial. Pensar —como Euclides— la serie de los números naturales como potencialmente infinita, por ejemplo, es concebirla como resultado de un proceso iterativo mediante el cual se genera un número específico en cada paso. Sin embargo, la conceptualización de la totalidad de los números naturales no puede derivarse de un proceso en el que vamos exhibiendo números específicos. En este caso, el proceso se considera concluido de antemano, hipótesis que desemboca en la realización de un nuevo objeto: el conjunto actualmente infinito de los números naturales, el cual sólo puede pensarse como integrado por elementos "genéricos".

En general, la aceptación de procesos potencialmente infinitos se apoya en la posibilidad de reiterar un proceso que se aplica cada vez a objetos particulares, lo que encuentra sustento en la hipótesis de la prolongación indefinida del tiempo; mientras que la conceptualización del infinito actual está basada en operaciones atemporales, es decir, en las que queda excluida toda alusión a procesos que se despliegan de acuerdo un orden cronológico. La actualización del infinito lleva aparejada la postulación de nuevos entes matemáticos[20]; esto no se presenta en los los procesos potencialmente infinitos, los que en cierta forma pueden considerarse como operaciones "cerradas" en un dominio dado.

En el marco de la instrucción, los procesos susceptibles de prolongarse indefinidamente se introducen desde los niveles básicos de enseñanza de la matemática hasta los cursos que preceden al de Cálculo Diferencial e Integral; no obstante, dichos procesos siempre se acotan al terreno de lo finito[21]. El infinito no es

[19] Aparentemente, la actualidad de los procesos infinitos quedan excluidos del análisis matemático estándar, cuando se define el límite en términos de desigualdades algebraicas. Pero el infinito actual está presente en sus axiomas de continuidad. Lo que se garantiza en ellos es la existencia de un límite, suponiendo así, por definición, la actualidad de los procesos de convergencia. Sólo sobre esta base es posible dar una definición de límite o de convergencia en términos de procesos potencialmente infinitos. Como expresa Koyré: "*Los conceptos de infinito potencial, de crecimiento infinito y de variación sin fin, a los cuales se quiso reportar el infinito actual o por los cuales se le quiso sustituir, en realidad descansan sobre éste, y lógicamente lo presuponen. El infinito virtual no es posible, lógicamente hablando, sino sobre la base del infinito actual*" [Koyré, 1961, p. 25].

[20] En el caso del infinito por extensión, la suposición de la actualidad lleva a los conjuntos infinitos, entes esencialmente distintos a los elementos que los conforman. La actualización de los procesos infinitos que se dan al "interior del continuo" (como los de subdivisión, los de convergencia de sucesiones infinitas de números o puntos, etc.) da como resultado la "construcción" de un ente distinto a aquellos sobre los que se aplica el proceso. Esto es justamente lo que sucede en los distintos axiomas de continuidad.

[21] Como por ejemplo, cuando se supone que es posible prolongar la recta tanto como se quiera, pero sin llegar a concebirla como actualmente infinita, o cuando se introducen las representaciones decimales periódicas para los números racionales. En la enseñanza de niveles medios de escolaridad, las expresiones decimales son generalmente vistas como procesos que permiten aproximarse a un valor numérico tanto como se quiera; difícilmente son consideradas como una forma alternativa de representación numérica, idea que subsume la actualidad del proceso de convergencia de la serie definida por la expresión decimal.

un *objeto de estudio*[22], ni tiene una operatividad asociada (como la que se desarrolla en el Cálculo); en estos niveles escolares simplemente se retoman las intuiciones primarias que los alumnos tienen de "lo infinito" (o lo que no concluye), sin coadyuvar "*a la evolución de sus esquemas de respuesta hacia la construcción de definiciones cantorianas formales*"[23].

D. El sistema de los números reales como objeto teórico

El número real que Dedekind introduce en su trabajo, posee un carácter lógico distinto al objeto que se maneja en los tratados sobre aritmética, como el que aparece en *Los Elementos*.

El objeto de la aritmética euclidiana son los números "aislados", y aunque Euclides define operaciones y relaciones entre ellos, éstas no constituyen un punto de reflexión; para cada demostración, supone a los números como si estuvieran dados de antemano, y no considera su totalidad, ni establece operaciones o propiedades sobre ella.

En la teoría del continuo de Dedekind, se opera sobre operaciones o sobre sistemas completos de números. El objeto de la teoría ya no son entes aislados, los números, sino "conjuntos" que se estructuran a partir de operaciones realizadas sobre totalidades numéricas. Por ejemplo, para su construcción Dedekind define sobre el sistema de los números racionales una nueva operación, el corte; con base en estos cortes se definen objetos nuevos en la teoría: los números irracionales; nuevas operaciones definidas sobre este sistema conforman el continuo. Dedekind mismo explica este proceso: *el sistema de todos los cortes en el dominio de por sí no-continuo de los números racionales, forma una multiplicidad continua*[24].

Los números reales definidos por Dedekind son así, objetos teóricos, resultado de una construcción en la que participan operaciones formales —en el sentido piagetiano: se parte de hipótesis (la suposición del infinito actual); se establecen operaciones atemporales, y se llevan a cabo operaciones de segundo orden, es decir, operaciones sobre operaciones[25].

La conceptualización de Dedekind sobre el número real concuerda con el trabajo que se había venido realizando en la matemática desde la segunda mitad del siglo XIX, cuya característica quizá más importante consiste en que las estructuras se han convertido en objeto de estudio de esa disciplina.

El paso de la etapa en que la matemática estudia objetos "aislados", a aquella en la que centra su atención en las estructuras, fue prolongado y estuvo determinado por diversos factores: ampliación de su dominio y sus objetos de estudio, cambios conceptuales, incorporación de instrumentos operatorios, etc. Esto puede

[22] Cfr. Moreno, Waldegg, 1991.

[23] *Ibid*. p. 212.

[24] Correspondencia Dedekind-Lipschitz, p. 151.

[25] "*La etapa de las estructuras operatorias formales conduce* —de acuerdo con Piaget— *a que las operaciones se liberen de la duración, es decir, del contexto psicológico de las acciones del sujeto. . . para alcanzar finalmente este carácter extratemporal, que es característico de las conexiones logicomatemáticas depuradas.* Para él, *las operaciones 'formales' señalan una etapa en la que el conocimiento sobrepasa lo real insertándolo en lo posible para ligar directamente lo posible a lo necesario sin la mediación indispensable de lo concreto; lo posible congnoscitivo, como la serie infinita de los enteros, la potencia del continuo, etc., esencialmente es extratemporal, por oposición a lo virtual físico cuyas realizaciones se despliegan en el tiempo. . . . El primer carácter de las operaciones formales, es el de poder realizarse sobre hipótesis y no sólo sobre objetos. . . El poder formar operaciones sobre operaciones* —que se da en esta etapa— *es lo que permite al conocimiento sobrepasar lo real. . .*" [Piaget, 1970, p. 83 y ss].

dar alguna pauta de la complejidad que conlleva el estudio de los conjuntos estructurados, complejidad que quizá debiera considerarse en la educación, sobre todo en la que se retoma el enfoque conjuntista.

E. La recta analítica de Dedekind

De la definición de continuidad de Dedekind se deriva una conceptualización particular de la recta, de acuerdo con la cual se considera que:

i) La recta está formada por puntos

ii) Los procesos actualmente infinitos y convergentes (por ejemplo, los de subdivisión) que se realizan sobre ella, llevan a puntos. (Aunque en la definición de continuidad de Dedekind no aparecen explícitamente procesos de subdivisión o de convergencia, sí se derivan de ella.)

En ii) se describe un proceso de análisis de la recta que lleva hasta sus partes indivisibles, mientras i) hace referencia al proceso inverso, según el cual es posible recomponer la recta a partir de sus puntos. La recta que cumple con estas condiciones la denominaremos "analítica".

La recta analítica representa un modelo teórico en el cual coexisten lo discreto y lo continuo, conceptos que ya no se presentan como antagónicos, como sucede en la obra de Aristóteles.

A lo largo de su obra, este filósofo argumenta fuertemente a favor de una idea de recta formada por segmentos. En su trabajo *Sobre Generación y Corrupción* afirma que *resulta paradójico que una magnitud pudiera consistir en elementos que no sean magnitudes*[26] y en la *Física* plantea una serie de paradojas que se derivan de conceptualizar un objeto con dimensión —como es la recta— como atómico, es decir, formado por partes indivisibles y sin dimensión: los puntos.

Su idea de recta implicaba, y a la vez se derivaba directamente de su concepción de lo continuo. En la *Física* establece que *todo continuo* (como las magnitudes geométricas) *es divisible en divisibles que son infinitamente divisibles*[27]. Esto es, una cantidad es continua si cada paso de su proceso de subdivisión arroja como resultado otra cantidad susceptible de volverse a dividir. Así entonces, la subdivisión reiterada aplicada a la recta, lleva a segmentos (y no a puntos, ya que el proceso es sólo potencialmente infinito). Esto permite, mediante el principio arquimediano (definido sólo para magnitudes con dimensión), recomponer la recta con base en partes isomorfas a ella.

La idea aristotélica de recta coincide con la que se maneja en *Los Elementos* de Euclides. A pesar de que la definición de línea recta que aparece en esta obra es bastante oscura[28], es plausible pensar a la recta euclidiana como semejante a la aristotélica a partir de la forma en la que Euclides opera este objeto geométrico: al igual que la del filósofo, es una "recta sintética", es decir, no atómica, subdivisible potencialmente al infinito, y delimitada en sus extremos por puntos (Def. I.2).

[26] Aristóteles, *Sobre Generación y Currupción*, I, 2, p. 316.

[27] Aristóteles, *Física*, V, 6, p. 231.

[28] Euclides define a la recta en la cuarta definición del primer libro de *Los Elementos*: "*Una línea recta es una línea que yace por igual sobre sus puntos*", definición que Euclides nunca aplica en el desarrollo de su obra, y que resulta difícil de desentrañar, no sólo en lo que se refiere a su significado, sino también a su origen.

Las diferencias entre la recta "analítica" de Dedekind y la recta de la geometría sintética son notables: en principio, porque mientras la recta analítica está formada sólo por puntos, la euclidiana, aunque tiene puntos, está estructurada a partir de segmentos. Mientras en la primera se supone la actualización de procesos de convergencia infinitos, en la recta sintética los procesos infinitos de convergencia son sólo potenciales. En el trabajo de Dedekind la recta se considera de entrada como una estructura actualmente infinita de puntos; en Euclides, la recta sólo es susceptible de prolongarse potencialmente al infinito.

Las operaciones lógicas y matemáticas sobre las que está sustentada la recta de Euclides (la relación de orden, procesos potencialmente infinitos, densidad), se apoyan en aquellas que se realizan sobre objetos concretos. La recta analítica, por otra parte, es un ente teórico cuya construcción y operatividad está basada en instrumentos de asimilación mucho más complejos. Entre otros, se requiere de un manejo operativo y conceptual del infinito actual, y de una lógica de segundo orden, de acuerdo con la cual sea posible establecer predicados sobre conjuntos.

En la enseñanza, sobre todo a nivel del bachillerato, la recta que se suele manejar es una mezcla de las dos anteriores: es analítica, en tanto está formada de puntos, los que se han puesto en correspondencia con los números reales. Pero también es una recta sintética, en tanto que las propiedades que se manejan, son las establecidas por Euclides (se considera como un objeto que puede extenderse potencialmente al infinito, con las propiedades de orden y densidad, y susceptible de dividirse potencialmente).

F. La continuidad como predicado de estructuras

El concepto de continuidad aparece, en la teoría de Dedekind, como predicado de sistemas estructurados, como la recta o los números reales, y hace referencia a la organización interna de sus elementos. A este concepto lo denominaremos "predicado estructural".

En la geometría euclidiana no se da una definición de la continuidad. Aparece, en el segundo postulado, como término indefinido, calificando la forma de prolongar la recta. El término continuidad se restringe al terreno de las magnitudes, y se aplica a cada una de ellas; no se hace referencia a la continuidad del dominio de las magnitudes, dado que en *Los Elementos* no se considera el dominio de las magnitudes como tal, y mucho menos se le caracteriza.

Es posible que la noción de continuidad que aparece en *Los Elementos* esté sustentada en la teoría aristotélica de las cantidades continuas, y que la acepción del término tenga connotaciones teóricas. No obstante, al aparecer como atributo calificando procesos, su significado se asocia con aquel que se le da en el lenguaje coloquial, en el cual lo continuo hace referencia a procesos que duran, permanecen sin interrupciones, se extienden, continúan. . . , y los objetos que se consideran continuos, lo son en la medida en que se dan en ellos procesos que se suponen continuos.

En la teoría de Dedekind, el continuo es un concepto abstracto y general. No se apoya en la percepción ni hace referencia a hechos empíricos. Al respecto, Dedekind afirma: *Puedo representarme como absolutamente no continuos el espacio y toda línea que le pertenece. . . y puedo pensar que cualquier otro hombre pueda hacerlo. La continuidad puede especificar el concepto de espacio, pero es independiente del mismo*[29].

[29] Dedekind, 1872, p. 7.

Pero además, debido a que esta definición de continuidad es formal, tiene un cierto grado de arbitrariedad. De esto Dedekind era particularmente consciente: la continuidad puede definirse de varias formas —dice él— todo depende, de lo que se pretenda hacer con ellas. Aquí —según dice Piaget— *la formalización se ha atribuido el derecho de elegir sus formas, según sus necesidades, sin limitarse a los elementos proporcionados por el pensamiento natural*[30]. No obstante el carácter arbitrario de la definición, tiene también un carácter de necesidad, ya que *cada nueva relación o estructura matemática se caracteriza por su necesidad desde el momento en que ha sido construida*[31]

Como hemos dicho, en el lenguaje natural la continuidad es un adverbio que califica ciertas acciones (las que se dan "continuamente"); la reflexión o la abstracción sobre dichas acciones da como resultado la construcción de la idea de continuidad como adjetivo, o como propiedad de los objetos; nuevas abstracciones generan la categoría abstracta (filosófica o matemática) de "lo continuo"[32]. Esta categoría es entonces el límite de una sucesiva construcción de significados, cada uno de los cuales *implica una actividad o una operatividad de un sujeto interactuante con realidades exteriores (físicas) o con objetos matemáticos*[33]

En suma, mientras la continuidad matemática es resultado de sucesivas abstracciones, es un predicado de sistemas estructurados e independiente de la intuición, y su necesidad deviene únicamente de los requerimientos lógicos planteados desde la matemática misma, la noción que aparece en *Los Elementos*, por su uso adverbial, está relacionada con operaciones concretas y con experiencias de carácter perceptual.

En esta parte del escrito hemos considerado la construcción de Dedekind como un "laboratorio epistemológico" —utilizando una expresión de Dijksterhius— para establecer conjeturas e hipótesis en torno a la construcción del continuo matemático. En la segunda parte del escrito tomaremos estas conjeturas como punto de referencia para analizar las concepciones sobre la continuidad de un grupo de profesores.

---

[30] Piaget, 1970, p.11.

[31] *Ibid*, p.119.

[32] Es de hecho, resultado del proceso que Piaget denomina "abstracción reflexiva". Para él: "*todo conocimiento comienza en los niveles elementales por una experiencia, pero se puede distinguir desde el comienzo entre las experiencias físicas con abstracciones sacadas del objeto* (que él llama abstracción empírica) *y las experiencias lógico-matemáticas con abstracciones reflexivas sacadas de las coordinaciones entre las acciones del sujeto*" [Piaget, 1970, p. 113]. Dicho sintéticamente, "*la 'abstracción reflexiva' es la abstracción a partir de las acciones y operaciones* [Estudios de epistemología genética, XIV, p. 203; tomado del *Diccionario de Epistemología Genética*, p. 18].

[33] Piaget y García, 1987, p. 149. Para ellos, "*las significaciones resultan de una asimilación de los objetos a partir de los esquemas. La significación de un objeto —afirman— es lo que podemos hacer con él; también lo que podemos decir de ellos (en cuyo caso es una descripción), o aún lo que podemos pensar de ellos (es decir, clasificarlos, relacionarlos de alguna manera, etc.)*". [*Ibid*, p. 148].