Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática[1]

Juan D. Godino[2]
Vicenç Font[3]
Ángel Contreras[4]
Miguel R. Wilhelmi[5]

RESUMEN

En este trabajo analizamos y comparamos las nociones que proponen la teoría de situaciones didácticas, la teoría antropológica de lo didáctico y la teoría de los campos conceptuales para estudiar los procesos de cognición matemática, así como los aportes de la dialéctica instrumento-objeto y de los registros de representación semiótica. El fin consiste en identificar las semejanzas, diferencias y complementariedades de estos modelos teóricos con la pretensión de avanzar hacia un marco unificado para el estudio de los fenómenos cognitivos e instruccionales en didáctica de las matemáticas. Asimismo, mostraremos en qué sentido la ontología matemática que se propone dentro del enfoque ontosemiótico, junto con la noción de función semiótica, pueden contribuir al progreso y articulación coherente de dichas teorías.

- **PALABRAS CLAVE**: Marcos teóricos, matemática educativa, conocimiento, concepciones, esquemas, significados.

ABSTRACT

In this work we analyze and compare the notions that propose the Theory of Didactic Situations, the Anthropological Theory of Didactic and the Theory of the Conceptual Fields to study the processes of mathematical cognition, as well as the contribution of the Dialectic instrument-object and of the Semiotic Representation Registers. The purpose is to identify the similarities, differences and complements of these theoretical models with the pretension of advancing toward a unified framework for the study of the cognitive and instructional phenomena in mathematics teaching. Also, we will show in what sense

Fecha de recepción: Noviembre de 2005 / Fecha de aceptación: Febrero de 2006.

1 Versión ampliada y revisada de la ponencia presentada en el I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico "Sociedad, escuela y matemáticas: Las aportaciones de la TAD". Baeza, octubre 2005.

2 Universidad de Granada. España.

3 Universidad de Barcelona. España.

4 Universidad de Jaén. España.

5 Universidad Pública de Navarra. España.

the mathematical ontology that is proposed in the Ontosemiotic Approach, along with the notion of semiotic function, can contribute to the progress and coherent articulation of these theories.

- **KEY WORDS**: Theoretical frameworks, mathematics education, knowledge, conceptions, schemes, meaning.

RESUMO

Neste trabalho analisamos e comparamos as noções que propõe a Teoria de Situações Didáticas, a Teoria Antropológica do Didático e a Teoria de Campos Conceituais para estudar os processos de cognição matemática, assim como as contribuições da Dialética instrumento-objeto e dos Registros de Representação Semiótica. O objetivo principal consiste em identificar as semelhanças, diferenças e complementariedades desses modelos teóricos com a pretensão de avançar até um marco unificado para o estudo dos fenômenos cognitivos e instrucionais em didática da matemática. Também mostraremos em que sentido a ontologia matemática, proposta no Enfoque Ontosemiótico, junto com a noção de função semiótica, podem contribuir para o progresso e articulação coerente de tais teorias.

- **PALAVRAS CHAVE**: Marcos teóricos, Educação Matemática, conhecimento, concepções, esquemas, significado.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous analysons et comparons les notions que proposent la Théorie de Situations Didactiques, la Théorie Anthropologique du Didactique et la Théorie des Champs Conceptuels pour étudier les procédés de cognition mathématique, ainsi que les apports de la Dialectique outil-objet et des Registres de Représentation Sémiotique. L'objectif est d'identifier les ressemblances, les différences et les complémentarités de ces modèles théoriques, afin de pouvoir prétendre avancer vers un cadre unifié pour l'étude des phénomènes cognitifs et instructionels dans la didactique des mathématiques. De même, nous montrerons dans quel sens l'ontologie mathématique qui est proposée dans l' Approche Ontosémiotique, et la notion de fonction sémiotique peuvent contribuer au progrès et à l'articulation cohérente de ces théories.

- **MOST CLÉS:** Cadres théoriques, Didactique des Mathématiques, connaissance, conceptions, schémas, signification.

1. NECESIDAD DE INTEGRACIÓN DE MARCOS TEÓRICOS EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

El carácter relativamente reciente en el área de conocimiento de la didáctica de las matemáticas explica que no exista aún un paradigma de investigación consolidado y dominante. Diversos trabajos (Ernest, 1994; Sierpinska y Lerman, 1996; Gascón, 1998; Font, 2002) cuyo objetivo ha sido realizar propuestas de organización sobre los diferentes programas de investigación en Matemática Educativa han puesto de manifiesto la diversidad de aproximaciones teóricas que se están desarrollando en la actualidad. En ciertos momentos tal diversidad puede ser inevitable, incluso enriquecedora, pero el progreso en la disciplina y la potenciación de sus aplicaciones prácticas exige aunar esfuerzos para identificar el núcleo firme de nociones y métodos que, a la larga, deberían cristalizar en un verdadero programa de investigación.

Uno de los principales problemas *meta-didácticos* que debemos abordar es la clarificación de las nociones teóricas que se vienen utilizando en el área de conocimiento, en particular las nociones usadas para analizar los fenómenos cognitivos. No hay un consenso sobre este tema entre los diferentes enfoques teóricos, ni tan siquiera dentro de la aproximación que suele describirse como *epistemológica* o *didáctica fundamental* (Gascón, 1998). Basta observar la variedad de nociones que se emplean sin que se haya iniciado su confrontación, clarificación y depuración: conocimientos, saberes, concepciones, conceptos, esquemas, invariantes operatorios, significados, praxeologías, etc. En este trabajo pretendemos iniciar el análisis de las nociones propuestas para el estudio de la dimensión cognitiva en didáctica de las matemáticas, tratando de identificar las concordancias, complementariedades, posibles redundancias y discordancias.

El uso del término "cognitivo" no deja de ser conflictivo en sí mismo. Con frecuencia se usa para designar los conocimientos subjetivos y los procesos mentales que ponen en juego los sujetos individuales enfrentados ante un problema. Desde un enfoque exclusivamente psicológico de la cognición matemática, tales procesos mentales, que suceden en el cerebro de las personas, son los únicos descriptores del comportamiento matemático de los sujetos. Esta modelización no toma en cuenta que los sujetos dialogan entre sí, consensúan y regulan los modos de expresión y actuación ante una cierta clase de problemas, ni que de esos sistemas de prácticas compartidas emergen objetos institucionales, los cuales a su vez condicionan los modos de pensar y actuar de los miembros de tales instituciones. Por tanto, junto a los conocimientos subjetivos, emergentes de los modos de pensar y actuar de los sujetos considerados de manera individual, es necesario considerar los conocimientos institucionales, a los que se atribuye un cierto grado de objetividad.

En consecuencia, se debería distinguir en la cognición matemática –y en la cognición en general– la dualidad *individual* e *institucional*, facetas entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas. En este contexto, la *cognición individual* es el resultado de la reflexión y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras que la *cognición institucional* se deriva del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos. Una manera de designar esas cogniciones con un solo término podría ser reservar el término 'cognitivo' para la cognición individual (como se hace con frecuencia por el predominio de la psicología cognitiva) y 'epistémico' (relativo al conocimiento objetivo) para la cognición institucional.

> *La aproximación cognitiva se interesa por el funcionamiento del conocimiento bajo el ángulo de los mecanismos y procesos que lo permiten en tanto que actividad de un ser individual. Este es evidentemente un punto de vista diferente de la aproximación epistemológica, que afronta los conocimientos relativamente a un dominio particular de objetos, a su desarrollo histórico y a los procedimientos de validación (Duval, 1996, p. 353).*

Como describe Varela (1988), el análisis científico del conocimiento en todas sus dimensiones es llevado a cabo por diversas ciencias y tecnologías de la cognición, entre las que menciona a la epistemología, la psicología cognitiva, la lingüística, la inteligencia artificial y las neurociencias. En didáctica de las matemáticas tenemos que adoptar modelos cognitivos que no estén exclusivamente centrados en la psicología cognitiva -lo cual se hace con frecuencia-, ya que el estudio de las matemáticas en las instituciones escolares se propone, como uno de sus fines esenciales, que el sujeto se apropie de los conocimientos matemáticos a los que se les atribuye un estatus cultural y, por tanto, intersubjetivo.

En las siguientes secciones, trataremos de clarificar el uso de nociones cognitivas y epistémicas en las siguientes teorías: Situaciones Didácticas, TSD (Brousseau, 1986; 1998); Campos Conceptuales, TCC (Vergnaud, 1990; 1994) y Antropológica de lo Didáctico, TAD (Chevallard, 1992; 1999). También haremos referencia a la Dialéctica Instrumento-Objeto, DIO (Douady, 1986; 1991); a los Registros de Representación Semiótica RRS (Duval, 1995; 1996) y a la noción de concepción presentada en Artigue (1990).

La sección 2 sintetiza las principales nociones introducidas en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, EOS (Godino, 2002), que usaremos como referencia para interpretar y comparar los restantes modelos teóricos. El EOS se propone, en cierto modo, articular las aproximaciones epistemológica y cognitiva, al establecer como hipótesis básica que los *hechos* y *fenómenos* didácticos (Wilhelmi, Godino y Font, en prensa) tienen una doble dimensión personal-institucional, cuya descripción y explicación precisa de análisis microdidácticos tanto de los *comportamientos de los sujetos* agentes como de la *ecología de los significados* en los procesos de estudio matemáticos.

Legrand (1996) compara diferentes marcos teóricos en relación con la noción de *situación fundamental* (Brousseau, 1998). Defiende la pertinencia y utilidad de esta noción, a pesar de su carácter en cierta medida "utópico", tanto para orientar la enseñanza como la investigación, al igual que explicita las hipótesis de modelización sobre las cuales reposa la teoría de situaciones y el concepto de situación fundamental. A continuación, analiza cómo son abordadas por otras aproximaciones didácticas las preocupaciones principales que están en el corazón de la noción de situación fundamental y, en consecuencia, de la TSD. Los modelos teóricos comparados son la dialéctica instrumento-objeto y los juegos de marcos propuestos por Douady, la teoría del campo conceptual desarrollada por Vergnaud, el debate científico en cursos de matemáticas desarrollado por Legrand y la teoría antropológica propuesta por Chevallard.

De esta forma, la finalidad de nuestro trabajo coincide en gran medida con el de Legrand, al contrastar modelos teóricos en didáctica de las matemáticas, pero centramos la atención en nociones más primitivas que, en cierta medida, están en la base de la idea de situación fundamental: conocimiento, sentido, concepción, saber. Por este motivo, vamos a indagar el uso que se hace de estas nociones en los modelos teóricos en discusión, mostrando sus limitaciones y cómo la ontología matemática explícita que se propone en el EOS, así como el concepto de función semiótica, puede ayudar a comparar las teorías y progresar hacia su articulación coherente.

2. ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN MATEMÁTICA

En diferentes trabajos, Godino y colaboradores[6] (Godino y Batanero, 1994 y 1998; Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005; Godino, Batanero y Roa, 2005) han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran un enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, debido al papel central que asignan al lenguaje en los procesos de comunicación e interpretación y en la variedad de objetos intervinientes. Para referirnos a esa manera de enfocar la investigación en didáctica de las matemáticas, utilizaremos la expresión *enfoque ontosemiótico* (EOS) [7].

En el EOS se ha afrontado el problema de la significación y representación mediante la elaboración de una ontología matemática explícita sobre presupuestos iniciales de tipo antropológico[8], lo que da cuenta del origen humano de la actividad matemática y la relatividad socioepistémica de los significados, pero sin perder las ventajas de la *metáfora objetual*, esto es, asumiendo también planteamientos referenciales (Ulmann, 1962). Dicha metáfora permite considerar acontecimientos, actividades o ideas como si fueran entidades (objetos, cosas, etc.), de ahí que todo lo que se pueda "individualizar" en matemáticas puede ser considerado como objeto (un concepto, una propiedad, una representación, un procedimiento, etc.). Es decir, *objeto matemático* es cualquier entidad o cosa referida en el discurso matemático.

A continuación, vamos a sintetizar el sistema de nociones que se propone en este enfoque teórico de la cognición matemática[9].

6 Estos trabajos y otros relacionados pueden consultarse en la dirección de internet http://www.ugr.es/local/jgodino.

7 En algunas publicaciones el EOS se designa como Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), al considerar que la noción de "función semiótica" es central para dicho enfoque.

8 El EOS adopta supuestos antropológicos, ecológicos y sistémicos sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, integrándolos de manera coherente mediante una ontología explícitamente definida y una interpretación en términos semióticos de los procesos de cognición e instrucción matemáticos.

9 En Godino, Contreras y Font (2006) se han introducido nuevas nociones teóricas para el análisis de los procesos de instrucción matemática. En particular, la de *configuración didáctica* (unidad primaria de análisis del funcionamiento del sistema didáctico, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de una tarea matemática y usando unos recursos materiales específicos) y los *criterios de idoneidad* (que permiten valorar el grado de adecuación y pertinencia de un proceso de estudio matemático según las dimensiones epistémica, cognitiva, semiótica, mediacional y emocional) pueden aportar una visión complementaria de la TSD y la teoría de los momentos didácticos (Chevallard, 1999).

2. 1 Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos o tipos de problemas

En los trabajos sobre "significado institucional y personal de los objetos matemáticos" Godino y Batanero (1994 y 1998) han introducido las nociones de *práctica personal*, *sistema de prácticas personales* y *objeto personal* como útiles para el estudio de la cognición matemática individual. De manera dual, el sistema de prácticas vistas como significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de una institución, y los objetos institucionales emergentes de tales sistemas, se proponen como nociones útiles para describir la cognición en sentido institucional o epistémico. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva a la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por sus instrumentos disponibles, reglas y modos de funcionamiento[10].

De estas nociones se derivan las de *significado de un objeto personal* y *significado de un objeto institucional*, que atañen a los sistemas de prácticas personales o institucionales, respectivamente. Tales conceptos se propusieron con la finalidad de precisar y operativizar los de *relación personal e institucional al objeto*, introducidos por Chevallard (1992).

2. 2 Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

En las prácticas matemáticas intervienen *objetos ostensivos* (símbolos, gráficos, etc.) y *no ostensivos* (que evocamos en la actividad matemática), los cuales son representados en forma textual, oral, gráfica e incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos que dan cuenta de su organización y estructura (tipos de problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, proposiciones, argumentaciones).

Los seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, ya que se le considerara insuficiente para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. Las situaciones-problema son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje (símbolos, notaciones, gráficos, entre otros) representa las restantes entidades y sirve como instrumento para la acción, mientras que los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. Se trata de entidades funcionales y relativas a los juegos de lenguaje en que participan (marcos institucionales y contextos de uso); tienen también un carácter recursivo, en el sentido de cada objeto, dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos (un argumento puede poner en juego conceptos, proposiciones o procedimientos).

---

10 Las instituciones se conciben como "comunidades de prácticas" e incluyen, por tanto, las culturas, grupos étnicos y contextos socioculturales. Se asume, por tanto, el postulado antropológico de la relatividad socioepistémica de los sistemas de prácticas, de los objetos emergentes y los significados.

2. 3 Relaciones entre objetos: función semiótica

Se adopta de Hjemslev (1943) la noción de función de signo[11] como la dependencia entre un texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Por tanto, trata las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un *antecedente* (expresión, significante, representante) y un *consecuente* (contenido o significado, representado), establecidas por un *sujeto* (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o *código de correspondencia*. Estos códigos pueden ser reglas –hábitos o convenios, con frecuencia implícitos– que informan a los sujetos implicados sobre los términos que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas.

Las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo *representacional* (un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito), *instrumental* u *operatoria* (un objeto usa a otro u otros como instrumento) y *estructural* (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos). De esta manera, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada tienen en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de las matemáticas y generalizan de manera radical la noción de representación. El papel de representación no queda asumido exclusivamente por el lenguaje: en consonancia con la semiótica de Peirce[12], se postula que los distintos tipos de objetos (situaciones-problema, lenguajes, procedimientos, conceptos, proposiciones y argumentos) pueden ser también signos de otras entidades.

2. 4. Configuraciones de objetos

La noción de *sistema de prácticas* es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Sin embargo, para un análisis más fino de la actividad matemática resulta necesario introducir los seis tipos de entidades primarias: situaciones, lenguaje, procedimientos, conceptos, proposiciones y argumentos. En cada caso, dichos objetos estarán relacionados entre sí formando “configuraciones”, que se definen como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones establecidas entre ellos. Tales configuraciones pueden ser *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales). Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos en su doble versión: personal e institucional.

2 5 Dualidades cognitivas

La noción de *juego de lenguaje* (Wittgenstein, 1953) ocupa un lugar importante, al considerarla, junto con la de *institución*, como los elementos contextuales que relativizan los

---

11 Descrita por Eco (1979) como *función semiótica.*

12 «Signo es cualquier cosa que determina a alguna otra (su interpretante) para que se refiera a un objeto al cual ella misma alude (su objeto) de la misma manera; el interpretante se convierte a su vez en un signo, y así ad infinitum » (CP 2.303).

significados de los objetos matemáticos y les atribuyen una naturaleza funcional. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales: personal-institucional[13], elemental-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo y extensivo-intensivo (Godino, 2002). Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica; asimismo, se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios y secundarios, dando lugar a distintas "versiones" de dichos objetos.

En Godino, Batanero y Roa (2005) se describen los seis tipos de entidades primarias y los cinco tipos de dualidades cognitivas mediante ejemplos relativos a una investigación en el campo del razonamiento combinatorio.

Las nociones descritas (sistemas de prácticas, entidades emergentes, configuraciones o redes ontosemióticas, atributos contextuales, junto con la de función semiótica como entidad relacional básica) constituyen una respuesta operativa al problema ontológico de la representación y significación del conocimiento matemático. Consideramos que el problema epistémico/cognitivo no puede desligarse del ontológico. Conocer, ¿qué cosa? Se trata de elaborar una ontología minimal, pero suficiente para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus "producciones". Como unidad básica para el análisis cognitivo se propone a los "sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problema". Conocer en matemáticas quiere decir conocer los "sistemas de prácticas" –operativas y discursivas–, pero ello supone conocer los diversos objetos emergentes de los subsistemas de prácticas y las relaciones entre ellos.

"Saber", "conocer", "comprender" se interpretan en términos de *competencia* para resolver problemas cuando tenemos en cuenta el componente pragmático-antropológico de base en el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática. Pero la introducción de los objetos emergentes, las facetas duales cognitivas y la función semiótica permiten articular de manera coherente un componente referencial sobre el conocimiento matemático: saber, conocer, comprender un objeto *O* (sea ostensivo-no ostensivo, extensivo-intensivo...) por parte de un sujeto *X* (persona o institución) se interpreta en términos de las funciones semióticas que *X* puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las cuales se pone en juego *O* como expresión o contenido. Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un *conocimiento*[14].

13 La dualidad personal-institucional es un aspecto esencial en este modelo teórico como se describe en Godino y Batanero (1994). Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran como *objetos institucionales*, mientras que si son específicos de una persona se consideran como *objetos personales*. Un planteamiento similar se adopta en los *cuadros de racionalidad* de Lerouge (2000).

14 Los conocimientos producidos por los agentes interpretantes no representan necesariamente saberes culturalmente aceptados, ni tan siquiera tienen porqué ser fundamento para un consenso puntual. En ocasiones, los conocimientos determinan únicamente acciones o argumentaciones que permiten controlar, validar o regular un estado en un proceso de estudio.

En las restantes secciones de este trabajo trataremos de mostrar que este sistema de nociones puede ayudar a articular de manera coherente los programas de investigación epistemológico y cognitivo en didáctica de las matemáticas.

3. EL PROGRAMA EPISTEMOLÓGICO EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

La teoría de situaciones, la dialéctica instrumento-objeto y la teoría antropológica podemos situarlas claramente en el *programa epistemológico de investigación en didáctica de las matemáticas.* Este programa "toma como base del análisis didáctico de cualquier fenómeno un modelo de la estructura y dinámica de la actividad matemática escolar" (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004, p. 211). Las teorías de los campos conceptuales y los registros de representación semiótica las incluimos en el programa cognitivo –sección 4–, donde se da prioridad al estudio de las características individuales de los sujetos como factor explicativo de los procesos de aprendizaje[15].

3.1. Teoría de las situaciones didácticas

La TSD matiza de forma esencial los conceptos de asimilación y acomodación tal como los definió Piaget, quien estudia los procesos psicológicos de un individuo ideal (*sujeto epistémico*) que tienen lugar en las transiciones de un objeto (concepto o procedimiento) matemático a otro. La didáctica fundamental estudia las "evoluciones" de un individuo que gestiona un saber matemático concreto en un "medio" específico, de forma que dichas evoluciones son irreductibles al comportamiento psicológico del sujeto. De hecho, como señala Brousseau (1998, p. 59):

> *La concepción moderna de la enseñanza va a pedir al maestro que provoque en los alumnos las adaptaciones deseadas, mediante una elección juiciosa de los "problemas" que le propone [...]. Una tal situación la llamamos situación adidáctica. Cada conocimiento se puede caracterizar por una (o varias) situaciones adidácticas que preserva su sentido y que llamaremos situación fundamental*.

Más aún, la didáctica fundamental ha postulado la necesidad de *modelización del saber matemático a enseñar*. El instrumento de modelización clave utilizado en la teoría de situaciones es el juego; aunque la realidad (didáctica) y el juego formal como modelo generan unas relaciones, no pueden explicar todo el funcionamiento didáctico. Para la TSD (Brousseau, 1998, pp. 92-94), la necesidad de introducir un *medio adidáctico* en el juego didáctico del alumno responde a una necesidad interna del sistema y no es el fruto de una reconstrucción del sistema, ni de ninguna observación. Se postula que todo conocimiento está íntimamente relacionado a una o unas situaciones; de hecho, se describe un conocimiento en términos de una situación.

15 Esta clasificación obedece tanto a cuestiones *teóricas* (núcleos firmes considerados en los programas de investigación asociados a las teorías) como a *pragmáticas* (necesidad del discurso metadidáctico que afrontamos). Somos conscientes de que es necesario tomar en consideración que las cuestiones teóricas no son categóricas y que deben ser explicadas en términos del "peso relativo que juegan las dimensiones cognitiva y epistemológica en la descripción de los sistemas didácticos" y no en los de la dicotomía "existencia-ausencia" de dichas descripciones.

Según Brousseau, el saber *a enseñar* tiene una existencia cultural, preexistente y, en cierta forma, independiente de las personas e instituciones interesadas en su construcción y comunicación. El análisis de los procesos de comunicación y reconstrucción de dichos saberes por el sujeto en el seno de los sistemas didácticos es el objetivo fundamental de la didáctica. La transposición didáctica da cuenta de las adaptaciones de estos saberes para su estudio en el contexto escolar.

Parece claro que el saber matemático se refiere a una forma especial de conocimiento institucionalizado, la cual habitualmente queda registrada de una forma axiomática, mediante la que se despersonaliza y descontextualiza. “Este saber cuyo texto existe ya, no es una producción directa del maestro, es un objeto cultural, citado o recitado” (Brousseau, 1986, p. 73).

Asimismo, pensamos que atribuye al saber matemático unos rasgos que podríamos calificar de absolutos: existe un “saber erudito” que está ahí (sin negar su carácter histórico y evolutivo) cuya apropiación por los estudiantes es el compromiso de la enseñanza.

> *La distinción entre un saber y un conocimiento se debe en primer lugar a su estado cultural; un saber es un conocimiento institucionalizado. El paso de un estado al otro implica, sin embargo, transformaciones que los diferencia y que se explican en parte por relaciones didácticas que se establecen al respecto(*Brousseau, 1986, p. 97)

La distinción entre saber y conocimiento es central en la TSD:

> *Las actividades sociales y culturales que condicionan la creación, el ejercicio y la comunicación del saber y los conocimientos […] El saber es una asociación entre buenas preguntas y buenas respuestas. El profesor plantea un problema que el alumno debe resolver: si el alumno responde, muestra así que sabe; si no, se manifiesta una necesidad de saber que pide una información, una enseñanza.* (Brousseau, 1986, pp. 38 y 48)

Generalmente, Brousseau utiliza el término ‘saber’ ligado con el calificativo de “saber formal”, “saber erudito”, “saber teórico”, “saber práctico”, lo cual indica que se interpreta como algo externo o institucional, como elemento de referencia de la enseñanza y el aprendizaje. La distinción entre *saber teórico* y *saber práctico* indica una primera “descomposición” del saber que podría relacionarse con la praxis y el logos, con lo procedimental y lo conceptual, estableciéndose una relación estrecha con la noción de *praxeología* (Chevallard, 1999).

En cuanto a las nociones usadas en la teoría de situaciones para referirse a los “conocimientos del sujeto”, hallamos el uso de ‘representación’, en el sentido de representación interna; en otras ocasiones Brousseau emplea la expresión *modelos implícitos* para dichos conocimientos y representaciones. Interpreta a los modelos implícitos como “formas de conocimiento”, las cuales “no funcionan de manera completamente independiente, ni de manera completamente integrada, para controlar las interacciones del sujeto. El estudio de las relaciones que se establecen entre estos tipos de controles en la actividad del sujeto y el papel que juegan en las adquisiciones es un sector de la psicología, esencial para la didáctica, estudio al que la didáctica pretende, por otra parte, contribuir” (Brousseau, 1986, p. 99).

De hecho, la noción de modelo es nuclear para describir los procedimientos de cálculo, los resultados de la formulación y los conocimientos puestos en juego por los estudiantes enfrentados a una situación dada. Así, se define:

- *Modelo de acción*: Procedimiento de cálculo que produce una *estrategia* (válida para todos los casos) o una *táctica* (específica para algunos casos concretos).

- *Modelo explícito*: Resultado de una situación de formulación y que puede ser planteado mediante signos y reglas, conocidos o nuevos.

- *Modelo implícito*: Representación simplificada de un conocimiento, suficiente para caracterizar los comportamientos observados en una situación dada.

Por otro lado, hay que resaltar que la teoría de situaciones es respetuosa con las aportaciones de la psicología en el estudio de los procesos de construcción de los conocimientos por parte del sujeto. Los conocimientos evolucionan según procesos complejos. Querer explicar esas evoluciones únicamente por las interacciones efectivas con el medio sería ciertamente un error, pues muy pronto los niños pueden interiorizar las situaciones que les interesen y operar con sus “representaciones internas”, experiencias mentales muy importantes. Resuelven así los problemas de asimilación (aumento de esquemas ya adquiridos por agregación de hechos nuevos) o de acomodación (reorganización de esquemas para aprender preguntas nuevas o para resolver contradicciones). Pero la interiorización de estas interacciones no cambia mucho la naturaleza: el diálogo con un oponente “interior” es ciertamente menos vivificante que un verdadero diálogo, mas es un diálogo.

Ahora bien, el término concepción sólo lo hemos encontrado en un párrafo de Brousseau, que hemos tomado como principal referencia para nuestro análisis. Nos parece que se usa con un significado similar a *modelo implícito* y también de manera equivalente a *conocimientos del alumno*: “Es necesario insistir sobre el carácter ‘dialéctico’ de estos procesos: las concepciones anteriores de los alumnos y los problemas que el medio les propone, conducen a nuevas concepciones y a nuevas preguntas cuyo sentido es fundamentalmente local” (Brousseau, 1986, p. 100). Sin embargo, en Antibi y Brousseau (2000, p. 18) se indica que “una de las hipótesis fuertes de la teoría de situaciones y de la teoría de los campos conceptuales es la que postula la existencia de las concepciones”.

Nos parece fundamental el progreso dado por la teoría de situaciones al conectar genéticamente los conocimientos matemáticos con las situaciones-problema, pero pensamos que es insuficiente el análisis de los constituyentes del conocimiento: las situaciones son uno de los constituyentes, pero no el único. En la teoría de situaciones hallamos propuestas, aunque de modo implícitas, para progresar en la descomposición controlada del conocimiento. Si bien están las *situaciones de acción* -que son ocasión para el desarrollo y aplicación de técnicas matemáticas de solución de los problemas-, las *situaciones de formulación* –comunicación en la que intervienen de manera esencial los instrumentos lingüísticos– y las *situaciones de validación*, donde intervienen lo que podemos denominar objetos validativos –argumentaciones o demostraciones–, los conceptos y teoremas deben ser reconocidos como constituyentes esenciales del componente discursivo del conocimiento, tanto en su versión personal (concepciones, conceptos y teoremas en acto) como institucional (conceptos y teoremas matemáticos).

3.2. La dialéctica instrumento-objeto y el juego de marcos

Douady (1986) atribuye a los conceptos matemáticos un carácter no unitario e identifica en ellos dos polos o dimensiones principales: el *aspecto objeto* (cultural, impersonal e intemporal), plasmado en definiciones y propiedades características, y el *aspecto instrumento*, que permite a alguien realizar una tarea en un momento dado.

> *Decimos que un concepto es instrumento cuando focalizamos nuestro interés sobre el uso que se hace de él para resolver un problema. Un mismo instrumento puede ser adaptado a varios problemas, varios instrumentos pueden ser adaptados a un mismo problema. Por objeto entendemos el objeto cultural que tiene un lugar en un edificio más amplio que es el saber sabio en un momento dado, reconocido socialmente* (Douady, 1986, p. 9).

Interpretamos que el concepto-instrumento se pone en juego en las fases o momentos de exploración en la resolución de problemas, y está del lado del estudiante o del investigador matemático que resuelve el problema. El concepto-objeto se pone en juego en las fases de institucionalización, normalmente hechas por el profesor, pero también es resultado de los procesos de fundamentación y validación de los conocimientos entendidos como entidades culturales. "Se llega a que los investigadores crean directamente objetos para organizar mejor una rama de las matemáticas, para poner en orden los pensamientos o por necesidades de la exposición" (Douady, 1986, p. 9).

Para Douady los conceptos matemáticos tienen una doble dimensión: por un lado, posibilitan la acción (*instrumento*), por otro, son conceptualizados como entidades reutilizables en otros procesos similares –no se vinculan necesariamente a una situación determinada– y pueden formar parte de un discurso más general (*objeto*). De esta forma, la distinción instrumento-objeto descrita por Douady la podemos interpretar en términos de *subsistema de prácticas operatorias* (praxis) y *discursivas* (logos), entre las cuales se establecen relaciones dialécticas de mutua interdependencia.

Pero la dialéctica instrumento-objeto no puede ser explicada totalmente sin hacer referencia a la noción de marco (en francés, *cadre*) introducida por Douady, que supone el reconocimiento de una relatividad en las prácticas matemáticas respecto a los "contextos de uso" internos en la propia matemática. El uso de un marco u otro afecta a los procedimientos de solución, su eficacia relativa e incluso al planteamiento de nuevos problemas. En el aprendizaje de una noción matemática, o en la resolución de un problema, el hecho de cambiar de marco en el que se afronta dicho problema permite desbloquear los procesos de comprensión y, en muchos casos, generalizar una noción, un procedimiento o un significado matemáticos. Tal generalización representa el paso de un *uso contextualizado* de un objeto matemático (que determina una función como concepto-instrumento en una situación concreta de dicho objeto) a un *uso potencial* (el objeto trasciende la situación concreta y se constituye en un concepto-objeto reutilizable para una clase de situaciones).

> *La palabra 'cadre' es tomada en el sentido usual que tiene cuando se habla de marco algebraico, aritmético, geométrico..., pero también de marco cualitativo o algorítmico. Decimos que un marco está constituido por los objetos de una rama de las matemáticas, de las relaciones entre los objetos, sus formulaciones eventualmente diversas y a las imágenes mentales asociadas a estos objetos y estas relaciones* (Douady, 1986, p. 11)

La mención de las imágenes mentales en la descripción de los marcos que hace Douady nos lleva a pensar que, en su formulación inicial, esta noción tiene un carácter híbrido institucional-personal. Por una parte, los marcos o contextos algebraico, geométrico, etc., tienen unas connotaciones independientes de los sujetos y se postula una relatividad de los significados ligados a los mismos:

> *El significado de un concepto se deriva del contexto en que está implicado. Por tanto, es el estado como instrumento lo que entra en juego. También se deriva de las relaciones desarrolladas en el contexto con otros conceptos en el mismo dominio matemático o no* (Douady, 1991, p. 116).

Pero al incluir las imágenes mentales en la definición de marco se está atribuyendo a dicha noción una dimensión individual, y en cierto modo una relatividad personal del significado de los objetos matemáticos. Esta apreciación es compartida por Lerouge (2000) quien, en referencia a los trabajos de Douady, afirma que "la autora ha pasado en algunos años de un modelo sincrónico a un modelo diacrónico en el que cada estado en el transcurso del tiempo se puede caracterizar por componentes matemáticas, socioculturales y personales" (Lerouge, 2000, p.180).

Este breve análisis de la dialéctica instrumento-objeto y del juego de marcos nos lleva a afirmar que en el modelo teórico de Douady está presente, al menos de una manera implícita, una concepción de las matemáticas en términos praxeológicos, así como la atribución de una relatividad pragmática del significado de los objetos matemáticos en sus dimensiones personales y socioculturales.

No obstante, estas nociones teóricas y su metodología nos parecen insuficientes para el análisis de la actividad matemática, de sus objetos emergentes y de las distintas funciones que éstos pueden desempeñar. En la sección 5 justificaremos esta afirmación.

3.3. Teoría antropológica de lo didáctico

La teoría antropológica de lo didáctico se ha centrado hasta el momento, casi de manera exclusiva, en la dimensión institucional del conocimiento matemático. Aquí, las nociones de *obra matemática*, *praxeología* y *relación institucional al objeto* se proponen como los instrumentos para describir la actividad matemática y los objetos institucionales emergentes de tal actividad. La dimensión cognitiva es descrita en términos de la *relación personal al objeto*, que agrupa todas los restantes conceptos propuestos desde la psicología (concepción, intuición, esquema, representación interna, etc.); sin embargo, la noción de *relación personal al objeto* no ha sido desarrollada, al postularse como previa y determinante la caracterización de las praxeologías matemáticas y el estudio de las relaciones institucionales. De hecho, la *praxeología local representa la unidad mínima de análisis de los procesos didácticos* (Bosch y Gascón, 2004). Por praxeología, se entiende:

> *Alrededor de un tipo de tareas*, T, *se encuentra así, en principio, una tripleta formada por una* técnica (*al menos*), τ, *por una tecnología de* τ,θ, *y por una teoría de* θ,Θ. *El total, indicado por* $[\mathrm{T}/\tau/\theta/\Theta]$, *constituye una praxeología* puntual, *donde este último calificativo significa que se trata de una praxeología relativa a un único tipo de tareas*, T. *Una tal praxeología* –u organización praxeológica– *está pues constituida por un bloque práctico - técnico*, $[\mathrm{T}/\tau]$, y por un bloque *tecnológico-teórico,* $[\theta/\Theta]$.
>
> *El bloque* $[\theta/\Theta]$ *se identifica habitualmente como un* saber, *mientras que el bloque* $[\mathrm{T}/\tau]$ *constituye un* saber-hacer. *Por metonimia, se designa corrientemente como "saber" la praxeología* $[\mathrm{T}/\tau/\theta/\Theta]$ completa, *o incluso cualquier parte de ella. Pero esta manera de hablar estimula una* minoración del saber-hacer, *sobre todo en la producción y difusión de las praxeologías* (Chevallard, 1999, p. 229).

Las técnicas se describen como *maneras de realizar las tareas*. Una técnica no es necesariamente de naturaleza algorítmica o casi algorítmica; sólo en casos poco frecuentes. No se hace referencia alguna a que las técnicas sean usadas para el análisis de la cognición del sujeto, sino más bien para la cognición, entendida en sentido institucional. Se trata de una noción de carácter epistémico y, por tanto, es útil para la descripción de dicha dimensión, no de la cognitiva (personal).

Parece claro que como constituyentes de las tecnologías y de las teorías –aunque no se ha precisado hasta el momento los conceptos, las proposiciones y las demostraciones matemáticas, mediante los cuales se logra justificar y explicar las técnicas–, estas nociones están implícitamente contenidas en las praxeologías matemáticas y tienen una naturaleza epistémica y, por ende, institucional.

La noción de *praxeología* guarda gran paralelismo con la de *sistema de prácticas institucionales ligadas a un campo de problemas* (Godino y Batanero, 1994). De hecho, el punto de partida de este trabajo de Godino y Batanero fue precisar algunas nociones introducidas por Chevallard (1992), como sistema de prácticas y objeto matemático, pero sobre todo desarrollar la noción de relación personal al objeto.

> *La distinción entre el dominio de lo personal y de lo institucional y de sus mutuas interdependencias es uno de los ejes principales de la antropología cognitiva. Pero un énfasis excesivo en lo institucional puede ocultar la esfera de lo mental, de los procesos de cognición humana, que quedan diluidos en la teorización de Chevallard, de los que en un enfoque sistémico de la didáctica no se puede prescindir. La consideración explícita de este dominio nos lleva a diferenciar entre* objeto institucional*, base del conocimiento objetivo, y* objeto personal (o mental)*, cuyo sistema configura el conocimiento subjetivo y proporciona una interpretación útil a la noción de concepción del sujeto (Artigue, 1990), así como a las de concepto y teorema en acto (Vergnaud, 1990)* [Godino y Batanero, 1994, p.333].

Respecto a la noción de praxeología, según se describe en Chevallard (1999), consideramos que el polo tecnológico/

teórico (logos) se debe descomponer explícitamente en entidades más elementales y operativas (conceptos-definición, proposiciones, argumentaciones); además, nos parece necesario añadir un tercer polo, formado por el sistema de objetos perceptibles mediante los cuales se expresan y operan los otros dos polos (el lenguaje).

El análisis detallado sobre los procesos de resolución de tareas matemáticas revela que las fases de desarrollo de las técnicas (en general, elementos procedimentales) suponen la aplicación contextualizada de objetos intensivos (conceptos-regla y proposiciones) y validativos, al menos de manera implícita. De igual modo, la elaboración de justificaciones requiere la aplicación de elementos procedimentales y situacionales. Esta circunstancia nos parece que resta relevancia a la distinción praxis-logos (y la de tecnología-teoría): los elementos discursivos y regulativos son densos por doquier en la actividad matemática.

4. EL PROGRAMA COGNITIVO EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

4.1. La teoría de los campos conceptuales

La teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990, 1994) es la que más nociones cognitivas ha introducido: *esquema*, *invariante operatorio* (*concepto en acto* y *teorema en acto*[16]), *concepto*, *campo conceptual*, *sentido de un conocimiento*. Esta es la razón por la que incluimos este modelo teórico dentro del programa cognitivo, reconociendo, no obstante, que algunas nociones teóricas elaboradas (campo conceptual) tienen una naturaleza epistémica.

La noción de esquema

La noción cognitiva básica para Vergnaud es la de *esquema*, que describe como “la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dadas” (Vergnaud, 1990, p. 136). Dice que “es en los esquemas donde se deben investigar los conocimientos en acto del sujeto que son los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria”.

Cada esquema es relativo a una clase de situaciones cuyas características son bien definidas. Además, un esquema reposa siempre sobre una conceptualización implícita, siendo los conceptos-en-acto y los teoremas-en-acto constituyentes de los esquemas operatorios. A su vez, considera que los esquemas son los elementos que sirven de base (sostienen) a las “competencias matemáticas”. De manera más precisa, Vergnaud (1990, p.135) señala que para “considerar correctamente la medida de la función adaptativa del conocimiento, se debe conceder un lugar central a las formas que toma en la acción del sujeto. El conocimiento racional es operatorio o no es tal conocimiento”.

Por ello, continua Vergnaud, es necesario distinguir dos clases de situaciones: 1) aquellas para las cuales el sujeto dispone en su repertorio […] de competencias

[16] Los conceptos y teoremas en acto han sido traducidos al inglés como *theorems-in-action* y *concepts-in-action* (Vergnaud, 1998). Las expresiones “en acto” y “en acción” expresan una misma concepción: los teoremas y conceptos emergen de la actividad matemática. Así, un conocimiento se constituye en un teorema en acto si el alumno organiza diversas estrategias de resolución en torno a dicho conocimiento.

necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación; 2) aquellas para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, lo que le obliga a un tiempo de reflexión y de exploración, de dudas, tentativas abordadas, y le conduce eventualmente al éxito o al fracaso. Según Vergnaud, el concepto de esquema se aplica fácilmente a la primera categoría de situaciones y con mayor dificultad a la segunda.

Un esquema es una totalidad organizada que permite generar una clase de conductas diferentes en función de las características particulares de cada una de las situaciones de la clase a la cual se dirige. Implica los siguientes componentes:

- *Invariantes operatorios* (conceptos-en-acto y teoremas-en-acto) que pilotan el reconocimiento por el sujeto de los elementos pertinentes de la situación y la recogida de información sobre la situación a tratar

- *Anticipaciones del fin a lograr*, de los efectos a esperar y de las etapas intermedias eventuales

- *Reglas de acción* del tipo *si... entonces...* que permiten generar la serie de acciones del sujeto

- *Inferencias* (o razonamientos) que permiten "calcular" las reglas y las anticipaciones a partir de las informaciones y del sistema de invariantes operatorios de los que dispone el sujeto

La noción de esquema incorpora elementos procedimentales (técnicas o modos de actuar) y tecnológicos-teóricos implícitos (conocimientos en acto); además, está asociada a una clase de situaciones, entendidas como tareas. En tal sentido, admite una interpretación coherente en términos de los "sistemas de prácticas personales ligadas a un tipo de problemas" (Godino y Batanero, 1994).

La noción de concepto

Los invariantes operatorios (conceptos y teoremas en acto) son entidades cognitivas, no epistémicas, al igual que la noción de esquema, la cual constituyen.

> *Un concepto-en-acto no es de hecho un concepto, ni un teorema-en-acto un teorema. En la ciencia, los conceptos y los teoremas son explícitos y se puede discutir su pertinencia y su verdad* (Vergnaud, 1990, p.144).

Vergnaud propone una noción de concepto a la que parece atribuir una naturaleza cognitiva, al incorporar los invariantes operatorios "sobre los que reposa la operacionalidad de los esquemas". Esta noción es distinta de lo que son los conceptos y teoremas en la ciencia, para los que no propone ninguna conceptualización. Expresamente, dice que:

> *Una aproximación psicológica y didáctica de la formación de conceptos matemático, conduce a considerar un concepto como un conjunto de invariantes utilizables en la acción. La definición pragmática de un concepto pone, por tanto, en juego el conjunto de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades, y el conjunto de esquemas puestos en juego por los sujetos en estas situaciones* (Vergnaud, 1990, p. 145).

Una primera observación es que en la aproximación dada a los procesos de conceptualización no se tiene en cuenta el uso de significantes explícitos (palabras, enunciados, símbolos y signos).

Una segunda observación es que en dicha aproximación no se distingue con claridad el plano personal del institucional, ni su carácter relativo al sujeto individual o a los contextos institucionales. El *saber sabio* se propone como un elemento de referencia para el investigador con un carácter absoluto o universal. La incorporación del conjunto de situaciones y de significantes, junto con los "invariantes operatorios constituyentes de los esquemas", lleva inevitablemente a confundir los planos cognitivos y epistémicos, lo que va a dificultar estudiar la dialéctica entre ambas facetas de la cognición matemática. Esta falta de problematización de la dualidad personal-institucional se percibe también en la definición de la noción de campo conceptual.

La noción de campo conceptual

La primera descripción que hace Vergnaud de un campo conceptual es la de "conjunto de situaciones". Pero a continuación aclara que, junto a las situaciones, se deben considerar también los conceptos y teoremas que se ponen en juego en la solución de tales situaciones.

> *En efecto, si la primera entrada de un campo conceptual es la de las situaciones, se puede también identificar una segunda entrada, la de los conceptos y los teoremas* (Vergnaud, 1990, p. 147).

Así, por ejemplo, el campo conceptual de las estructuras aditivas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas.

En esta descripción del campo conceptual no se mencionan elementos de tipo subjetivo, por lo cual consideramos que al campo conceptual se le atribuye una naturaleza de tipo epistémica. Los conceptos y teoremas que intervienen aquí se califican como "matemáticos", nociones que no son teorizadas; la de concepto matemático no parece ser la misma que la de cognitiva de concepto, que acaba de definirse como una tripleta heterogénea de conjuntos formados por situaciones, invariantes y significantes.

La noción de campo conceptual y los ejemplos que pone de ella tiene unas características muy generales (estructuras aditivas, estructuras multiplicativas, la electricidad, la mecánica, las magnitudes espaciales, la lógica de clases). Al igual que la noción de concepto no se relativiza a los contextos institucionales, dificultando de este modo el análisis de la dinámica y ecología de tales formaciones epistémicas.

Según nuestra interpretación, la noción de *campo conceptual*, que de una manera implícita también incluye los algoritmos y procedimientos de resolución de los tipos de problemas que se incluyen en los campos conceptuales, podría asimilarse a la de *praxeología matemática global*, ya que ambas nociones tienen una naturaleza institucional e incluyen componentes similares. Ciertamente, la noción de praxeología es bastante más general y flexible, pues se aplica también a tipos de problemas más puntuales, aparte de distinguir entre los dos polos del saber matemático: el *saber-hacer* (*praxis*) y el *saber-qué* (*logos*).

La noción de sentido

"El sentido es una relación del sujeto a las situaciones y a los significantes. Más precisamente, son los esquemas evocados por el sujeto individual en una situación o por un significante lo que constituye el sentido de esta situación o de este significante para este sujeto. Los esquemas, es decir, las conductas y su organización. El sentido de la adición para un sujeto individual es el conjunto de esquemas que puede poner en práctica para tratar las situaciones a las cuales es confrontado, y que implican la idea de adición" (Vergnaud, 1990, p. 158).

En esta descripción, Vergnaud está haciendo corresponder a un objeto matemático, por ejemplo, "la adición", con un conjunto de otros objetos (situaciones, esquemas, significantes), o sea, lo que anteriormente ha presentado como un concepto en sentido cognitivo. Tal sistema[17] representa entonces el sentido o significado de la adición para el sujeto, por lo que guarda una fuerte relación con uno de los tipos de significados que hacemos en el enfoque ontosemiótico: el significado personal de un objeto matemático considerado como "sistema de prácticas personales eficaces para la resolución de un cierto tipo de problemas".

Respecto a este punto, podemos decir que la teoría de los campos conceptuales no introduce una versión institucional de la noción de sentido, por lo cual se dificulta el estudio de la dialéctica entre las dimensiones personales e institucionales de la cognición matemática. Además, debemos analizar si el "sistema de prácticas" del EOS es una interpretación más general y flexible de las nociones de esquema y concepto (según Vergnaud), como herramientas utilizadas para la descripción del comportamiento matemático de los alumnos.

> *[Las nociones de esquema y concepto son] un análisis muy fino de los procedimientos de pensamiento, de los 'gestos' intelectuales del alumno, puesto que de algún modo es la facilidad del alumno en la realización de estos gestos lo que le va a permitir principalmente entrar en la situación, que va a condicionar la atribución de sentidos adaptados* (Legrand, 1996, p. 246).

El interés de la TCC por los comportamientos de los estudiantes determina su diferencia fundamental con la TSD.

> *La teoría del campo conceptual puede ser considerada como una teoría que clarifica esencialmente el funcionamiento individual del alumno o del profesor, mientras que la teoría de situaciones clarifica más el funcionamiento de la clase* (Legrand, 1996, p. 247).

4.2. La noción de concepción

La noción de concepción es la más usada para el análisis cognitivo en didáctica de las matemáticas, como puede inferirse del estudio que hace Artigue (1990). Es también usada por los modelos teóricos TSD, TCC y DIO-JM, descritos anteriormente.

Esta noción no se distingue claramente en la bibliografía de otras como representación (interna), modelo implícito, etc. Como describe Artigue (1990, p. 265), "trata de poner en evidencia la pluralidad de puntos de vista posibles sobre un objeto

---

[17] Es un *sistema* y no un *conjunto*, ya que importa tanto los objetos referidos como la estructura que se les confiere.

matemático, diferenciar las representaciones y modos de tratamiento que se le asocian, poner en evidencia su adaptación más o menos buena a la resolución de distintas clases de problemas". En la descripción que hace Artigue se aprecian dos sentidos complementarios para el término concepción: el punto de vista epistémico (naturaleza compleja de los objetos matemáticos y de su funcionamiento) y el punto de vista cognitivo (los conocimientos del sujeto en relación a un objeto matemático particular). Así, Artigue (1990) habla de, "un conjunto de concepciones es definido a priori con referencia a once definiciones distintas de círculo" (p. 268); y también se habla de "las concepciones del sujeto sobre el concepto de ... (círculo, tangente, límite, etc.)".

Sobre las concepciones del sujeto se discuten dos tipos de usos según los distintos autores:

a) *La concepción como estado cognitivo global* que tiene en cuenta la totalidad de la estructura cognitiva del sujeto en un momento dado en relación a un objeto. En este caso, una concepción representa un "concepto subjetivo", entendiendo éste en términos de la tripleta de Vergnaud (situaciones, invariantes y significantes).

b) *La concepción como un objeto local*, estrechamente asociado al saber puesto en juego y a los diferentes problemas en cuya resolución intervienen.

Sin embargo, el uso habitual (basado en un enfoque cognitivo) de concepción conlleva unas connotaciones fuertemente mentalistas. A pesar de los intentos de proponer un uso técnico de esta noción no parece muy distinto del uso que se hace del mismo en el lenguaje ordinario: "la idea que tiene una persona en su mente cuando piensa sobre algo en un momento y circunstancias dadas". Con otras palabras, los conocimientos y creencias son concebidos únicamente como entidades mentales y, por lo tanto, no susceptibles de generalización a colectivos sociales en el enfoque cognitivista.

Por otro lado, desde el programa epistemológico, la noción de concepción es modelizada en tanto objeto que permite la acción o la argumentación del sujeto con relación a la búsqueda de una respuesta a una cuestión matemática.

> *Una concepción está determinada por un conjunto relativamente organizado de conocimientos utilizados con bastante frecuencia, y conjuntamente, sobre un conjunto de situaciones (para el cual son pertinentes, adecuados, útiles, etc.), y que se manifiestan mediante un repertorio relativamente estable y limitado de comportamientos, lenguajes, técnicas, etc.* (Antibi y Brousseau, 2000, p. 20)

Por último, bajo un enfoque antropológico la concepción comprende también las destrezas, disposiciones, capacidades lógicas y discursivas, en definitiva, la "relación personal al objeto". En esta interpretación de la concepción vemos que si la noción de conocimiento es lo suficientemente amplia, de modo que abarque tanto los conocimientos de "saber hacer" (praxis), como "saber qué" (logos) la concepción del sujeto viene a ser equivalente a la faceta no ostensiva (interiorizada) de los subsistemas de prácticas personales asociadas a un objeto, relativas a un contexto de uso o un marco institucional.

4.3 Registros de representación semiótica

Una característica importante de la actividad matemática es el uso de diversos sistemas de expresión y representación, además del lenguaje natural: variados sistemas de escritura para los números, escrituras algebraicas para expresar relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc. Duval (1995) se ha interesado particularmente por este uso variado de los sistemas de representación semiótica y se pregunta: "¿Es esencial esta utilización de varios sistemas semióticos de representación y expresión, o al contrario no es más que un medio cómodo pero secundario para el ejercicio y para el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales?" (p. 3). Considera que esta pregunta sobrepasa el dominio de las matemáticas y de su aprendizaje y apunta hacia la naturaleza misma del funcionamiento cognitivo del pensamiento humano, aportando los siguientes argumentos:

1) No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. No se deben confundir nunca los objetos matemáticos (números, funciones, rectas, etc.) con sus representaciones (escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazados de figuras, etc.), pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy diferentes.

2) Existen representaciones mentales, conjunto de imágenes, conceptos, nociones, ideas, creencias, concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que les está asociado. "Permiten una mirada del objeto en ausencia total de significante perceptible". (p. 20). Las representaciones mentales están ligadas a la interiorización de representaciones externas, de la misma manera que las imágenes mentales lo están a una interiorización de los perceptos.

3) Las representaciones semióticas son un medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los demás. Además de sus funciones de comunicación, las representaciones semióticas son necesarias para el desarrollo de la propia actividad matemática. La posibilidad de efectuar tratamientos (operaciones, cálculos) sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. El progreso de los conocimientos matemáticos se acompaña siempre de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que coexisten con el de la lengua natural y les confieren el carácter de objetos.

4) La pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y, por tanto, de sus representaciones mentales. Esta interdependencia entre las representaciones internas y externas la expresa Duval afirmando que "no hay noesis[18] sin semiosis; es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis" (p. 5). La aprehensión

[18] Noesis, aprehensión conceptual de un objeto; semiosis, la aprehensión o la producción de una representación semiótica.

conceptual no es posible sin el recurso a una pluralidad, al menos potencial, de sistemas semióticos, y, por tanto, su coordinación por parte del sujeto.

5) La coordinación entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes no es espontánea; la conversión de unos sistemas a otros requiere un aprendizaje específico. El problema esencial de la semiosis es el de la diversidad de sistemas de representación y los fenómenos de no-congruencia que resultan por la conversión de las representaciones. La coordinación entre representaciones no es una consecuencia de la aprehensión conceptual (noesis) sino que, al contrario, el logro de dicha coordinación es una condición esencial de la noesis.

La contribución teórica de Duval se inscribe dentro de la línea de indagación que postula una naturaleza mental (las representaciones internas) para el conocimiento matemático y que atribuye un papel esencial en los procesos de formación y aprehensión de las representaciones mentales (*noesis*) al lenguaje, en sus diversas manifestaciones. La disponibilidad y uso de diversos sistemas de representación semiótica, sus transformaciones y conversiones, se considera imprescindible en la generación y desarrollo de los objetos matemáticos; pero la semiosis (producción y aprehensión de representaciones materiales) no es espontánea y su dominio debe ser un objetivo de la enseñanza. Una atención particular debe darse a la conversión entre registros de representación semiótica no congruentes entre sí[19].

Estas ideas nos parecen razonables y útiles para la educación matemática. Sin embargo, desde la perspectiva más global del EOS, encontramos las siguientes limitaciones en el modelo cognitivo elaborado por Duval.

1. No se propone una teoría explícita de qué sean los objetos matemáticos, aparte de ser concebidos como representaciones internas (conceptos, ideas, nociones, creencias, etc.). No se concede un papel claro a la acción del sujeto, ligada a situaciones-problema, ni a su dimensión sociocultural. Sólo se enfatiza el papel mediador del lenguaje y las tareas de producción y manipulación de los sistemas de representación. ¿Qué es un concepto para Duval? ¿Qué otros tipos de objetos, además de conceptos, se ponen en juego en la actividad matemática?

2. Comprensión y diversidad de representaciones. Se postula que para la aprehensión conceptual es necesario el trabajo con al menos dos registros de representación semiótica. Sin embargo, desde el punto de vista del EOS, la aprehensión del componente discursivo, por ejemplo, del número 3 se consigue cuando se conoce (entiende) que el signo '3' es un miembro de la estructura numérica natural, o sea, un miembro de $(\mathrm{N},+,\leq)$ y es indiferente usar cualquier numeral para indicar ese miembro. El uso de distintas representaciones proporciona propiedades ergonómicas específicas que enriquecen progresivamente la comprensión de los números, pero no es necesario "conocer" varios sistemas numerales para saber qué son los números naturales. El componente praxémico (situacional y procedimental) del significado sistémico del número requiere

19 La congruencia o no congruencia entre dos registros de representación semiótica se determina según criterios *económicos* (coste para la realización de una tarea), *prácticos* (utilidad y eficacia de un registro para la realización de una tarea) y *teóricos* (consistencia con los saberes existentes en el seno de una institución dada).

el conocimiento de los usos del número, de las técnicas e instrumentos de contar y ordenar. El conocimiento del número no se reduce a un juego de representaciones.

3. El modelo de cognición matemática de Duval no incorpora la faceta institucional o epistémica del conocimiento matemático. Esto nos deja sin medios para planificar los procesos curriculares e instruccionales matemáticos y entender el aprendizaje y la comprensión matemática como un acoplamiento progresivo entre significados institucionales y personales de objetos matemáticos.

Independientemente de estas limitaciones pensamos que la semiótica cognitiva elaborada por Duval es un desarrollo parcialmente compatible con el EOS, al que aporta algunas nociones útiles para estudiar los fenómenos del aprendizaje matemático (tipos de funciones discursivas y meta-discursivas del lenguaje, diferenciación funcional y coordinación de registros, etc. (Duval, 1996)).

5. HACIA UNA ARTICULACIÓN DE MODELOS TEÓRICOS

La tesis que vamos a argumentar en esta sección es que el EOS puede ayudar a comparar los marcos teóricos descritos anteriormente y, en cierta medida, a superar algunas de sus limitaciones para el de análisis de la cognición matemática. La justificación de esta afirmación, sin duda demasiado fuerte, sólo podrá ser esbozada en este trabajo. En principio, se trata de una expectativa que se basa en la generalidad con la que se define en el EOS las nociones de problema matemático, práctica matemática, institución, objeto matemático, función semiótica y las dualidades cognitivas (persona-institución; elemental-sistémico; ostensivo-no ostensivo; extensivo-intensivo; expresión-contenido). Estas nociones nos permiten establecer conexiones coherentes entre los programas epistemológicos y cognitivos sobre unas bases que describimos como ontosemióticas[20].

Concebimos las teorías como instrumentos que permiten definir los problemas de investigación así como una estrategia metodológica para su abordaje. El sistema de nociones teóricas y metodológicas que necesitamos elaborar, para caracterizar los fenómenos didácticos, deberá permitir diferentes niveles de análisis de las diversas dimensiones o facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este sistema no puede elaborarse con la simple agregación de elementos teóricos y metodológicos de distintos enfoques disponibles, sino que será necesario elaborar otros nuevos más eficaces, enriqueciendo algunas nociones ya elaboradas, evitando redundancias y conservando una consistencia global. Debemos aspirar a incluir en dicho sistema las nociones teóricas y metodológicas "necesarias y suficientes" para investigar la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

[20] El papel central dado en el EOS a la *práctica* matemática (en su versión institucional, esto es, relativa a juegos de lenguaje y formas de vida) y las características que se le atribuye a dicha noción (acción compartida, situada, intencional, mediada por recursos lingüísticos y materiales) permite acomodar en este marco otras posiciones teóricas como el constructivismo social (Ernest, 1998), la socioepistemología (Cantoral y Farfán, 2003), y en general las perspectivas etnomatemáticas y socioculturales en educación matemática (Atweh, Forgasz y Nebres, 2001).

5.1. Supuestos sobre la naturaleza del conocimiento matemático

Consideramos que la naturaleza del saber matemático, en el sentido de saber “sabio”, o saber en la institución matemática-profesional, no ha sido problematizada en las teorías discutidas. En la TAD, con la noción de praxeología y su dependencia de las instituciones se atribuye una naturaleza relativa y plural al conocimiento matemático, como consecuencia de la adopción del marco antropológico, pero se continúa hablando de un “saber sabio” que se traspone a las instituciones de enseñanza, cuya naturaleza no se explicita.

¿Es posible compaginar de manera coherente el relativismo antropológico con la visión platónica usual que atribuye un tipo de realidad absoluta y universal al conocimiento matemático? En Wilhelmi, Lacasta y Godino (en prensa) abordamos esta cuestión desde el enfoque ontosemiótico analizando, como un ejemplo, las diversas definiciones de la noción de igualdad de números reales y los subsistemas de prácticas asociadas a las mismas. Proponemos que cada definición y la configuración de objetos y relaciones entre los mismos constituyen un sentido, o significado parcial, de la noción de igualdad de números reales, y que en última instancia, el significado matemático de la noción, en singular, debemos asociarlo a la estructura formal que describe los diversos significados parciales. El saber matemático, en singular, es una emergencia del sistema de prácticas matemáticas, realizadas en el seno de una comunidad de prácticas especial (matemática pura), ante el problema de la organización y estructuración de los subsistemas de prácticas implementados en diversos marcos institucionales, contextos de uso y juegos de lenguajes.

En el EOS la cuestión del “significado de los objetos matemáticos” es de naturaleza ontológica y epistemológica, esto es, se refiere a la naturaleza y origen de los objetos matemáticos. En un primer momento se propone una respuesta pragmática/antropológica –significado como sistema de prácticas operativas y discursivas–, pero simultáneamente se postula la emergencia de nuevos objetos de tales sistemas de prácticas que se concretan en reglas socialmente convenidas (y objetos personales), los cuales serán a su vez contenidos de nuevas funciones semióticas. Con esta formulación dualista –sistema de prácticas y objetos emergentes organizados en redes o configuraciones- se pretende articular los programas epistemológicos (sobre bases antropológicas) y cognitivo (sobre bases semióticas).

Las visiones pragmática y realista sobre el significado se suelen presentar como contrapuestas. Sin embargo, Ullman (1962) presenta las teorías de tipo pragmático (que denomina operacionales o contextuales) como un complemento válido de las teorías de tipo realista (que denomina referenciales).

> *No hay ningún atajo hacia el significado mediante la introspección o cualquier otro método. El investigador debe comenzar por reunir una muestra adecuada de contextos y abordarlos luego con un espíritu abierto, permitiendo que el significado o los significados emerjan de los contextos mismos. Una vez que se ha concluido esta fase, se puede pasar con seguridad a la fase “referencial” y procurar formular el significado o los significados así identificados. La relación entre los dos métodos, o más bien entre las*

dos fases de la indagación, es, en definitiva, la misma que hay entre la lengua y el habla: la teoría operacional trata del significado en el habla; la referencial, del significado en la lengua. No hay, absolutamente, necesidad de colocar los dos modos de acceso uno frente a otro: cada uno maneja su propio lado del problema, y ninguno es completo sin el otro (Ullman, 1962, p. 76-77)

Esta observación de Ullmann sirve de apoyo para el modelo de significado de los objetos matemáticos que se propone en el EOS. El significado comienza siendo pragmático, relativo al contexto, pero existen tipos de usos que permiten orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático.

En el EOS, de acuerdo con la visión antropológica sostenida por Wittgenstein (Bloor, 1983), los componentes teóricos del conocimiento matemático (conceptos, teoremas) se interpretan como reglas gramaticales para el manejo de las expresiones usadas para describir el mundo de objetos y situaciones extra o intramatemáticas[21].

5.2. Relatividad ontosemiótica personal, institucional y contextual

Las teorías analizadas dan un peso muy diferente al aspecto personal e institucional del conocimiento matemático y a su dependencia contextual. En el EOS se postula que los sistemas de prácticas, los objetos emergentes y las configuraciones mediante las cuales se expresan son relativos a los contextos de uso, a las instituciones en que tienen lugar las prácticas y a los sujetos implicados en las mismas (juegos de lenguaje y formas de vida, según Wittgenstein, 1953).

La descripción de los conocimientos de un sujeto individual sobre un objeto *O* se puede hacer de una manera global con la noción de “sistemas de prácticas personales”. Esta noción queda concretada mediante la trama de funciones semióticas que el sujeto puede establecer en las que *O* se pone en juego como expresión o contenido (significante, significado). Si en este sistema de prácticas distinguimos entre las que tienen una naturaleza operatoria o procedimental ante un tipo de situaciones-problema, respecto de las discursivas obtenemos un constructo que guarda una estrecha relación con la noción de praxeología (Chevallard, 1999), siempre y cuando le atribuyamos a dicha noción una dimensión personal, además de la correspondiente faceta institucional. También se puede incorporar de esta manera la dualidad “instrumento-objeto” que propone Douady para los conceptos matemáticos.

Los modos de “hacer y de decir” ante un tipo de problemas que ponen en juego, por ejemplo, el “objeto función” se proponen como respuesta a la pregunta “qué significa el objeto función” para un sujeto (o una institución). Esta modelización semiótica del conocimiento permite interpretar la noción de esquema como configuración cognitiva asociada a un subsistema de prácticas relativas a una clase de situaciones o contextos de uso, y las nociones de concepto-en-acto, teorema-en-acto y concepción como componentes parciales (intensionales) constituyentes de dichas configuraciones cognitivas.

21 Esta es la manera en que se conciben los conceptos y teoremas en la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein (Baker y Hacker, 1985).

En el EOS la noción de concepción es interpretada mediante el par (sistema de prácticas personales, configuración cognitiva) para sacar la cognición del sesgo mentalista. En términos semióticos, cuando nos preguntemos por el significado de “concepción” de un sujeto sobre un objeto *O* (o sostenida en el seno de una institución) asignemos como contenido, “el sistema de prácticas operativas y discursivas que ese sujeto manifiesta en las que se pone en juego dicho objeto”. Dicho sistema es relativo a unas circunstancias y momento dado y se describe mediante la red de objetos y relaciones que se ponen en juego (*configuración cognitiva*).

Asimismo, la comprensión y el conocimiento se conciben en su faceta dual personal-institucional, involucrando, por tanto, los sistemas de prácticas operativas y discursivas ante ciertos tipos de tareas problemáticas. El aprendizaje de un objeto *O* por un sujeto se interpreta como la apropiación de los significados institucionales de *O* por parte del sujeto; se produce mediante la negociación, el diálogo y acoplamiento progresivo de significados.

En el EOS la noción de significado y sentido dejan de ser entidades etéreas y misteriosas. El significado de un objeto matemático es el contenido de cualquier función semiótica y, por tanto, según el acto comunicativo correspondiente, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, extensivo – intensivo, personal o institucional; puede referirse a un sistema de prácticas, o a un componente (situación-problema, una notación, un concepto, etc.). El sentido se puede interpretar como un significado parcial, esto es, se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinados.

La noción de representación y registro semiótico usadas por Duval y otros autores hacen alusión según nuestro modelo, a un tipo particular de función semiótica representacional entre objetos ostensivos y objetos mentales (no ostensivos). La noción de función semiótica generaliza esta correspondencia a cualquier tipo de objetos y, además, contempla otros tipos de dependencias entre objetos.

El uso que se hace en teoría de las situaciones didácticas de la noción de sentido queda restringido a la correspondencia entre un objeto matemático y la clase de situaciones de la cual emerge, y “le da su sentido” (podemos describirlo como “significado situacional”). Según el EOS esta correspondencia es, sin duda crucial, al aportar la razón de ser de tal objeto, su justificación u origen fenomenológico, pero también se tienen que tener en cuenta las correspondencias o funciones semióticas entre ese objeto y los restantes componentes operativos y discursivos del sistema de prácticas del que consideramos sobreviene el objeto, entendido bien en términos cognitivos o bien en términos epistémicos.

La teoría de los campos conceptuales extiende la noción de significado como “respuesta a una situación dada” introducida en la teoría de las situaciones didácticas. Esta extensión supone la inclusión, además del componente situacional, de elementos procedimentales (esquemas) y discursivos (conceptos y teoremas en acto), relacionando además el significado con la noción de *modelo implícito*.

> *Los diferentes tipos de representación o los teoremas en acto que rigen las decisiones del sujeto no son muy fáciles de identificar, incluso si parecen*

> *formulables o explicitables por el sujeto. Pero numerosos trabajos empiezan a mostrar cómo las regularidades en los comportamientos pueden dar acceso a un tipo de 'modelos implícitos'. La importancia que estos modelos juegan en la adquisición de conocimiento representa una cuestión muy abierta, muy a menudo abordada de forma demasiado estrecha* (Brousseau, 1986, p.103)

El contenido que se considera "significado de un objeto matemático para un sujeto" en la TCC es prácticamente la globalidad holística que nosotros describimos como "sistema de prácticas personales". Sin embargo, nuestra noción de función semiótica y la ontología matemática asociada proporciona un instrumento más general y flexible para el análisis didáctico-matemático.

5.3. Niveles de análisis de la cognición matemática

La didáctica debe identificar no sólo los fenómenos relativos a la ecología de los saberes matemáticos (objetivo principal de la TAD), o los correspondientes al diseño e implementación de ingenierías didácticas (objetivo principal de la TSD), sino también los fenómenos relativos al aprendizaje de los alumnos. En última instancia los esfuerzos de los profesores e investigadores convergen en el objetivo de lograr que los estudiantes aprendan, esto es, se apropien de los conocimientos matemáticos que les permitan desenvolverse en la sociedad y, en algunos casos, contribuyan al desarrollo de nuevos conocimientos. El abordaje de cuestiones como ¿por qué los alumnos tienen dificultades en resolver este tipo de tareas?, ¿es idónea esta tarea, este discurso matemático, para estos alumnos en unas circunstancias dadas?, etc., supone un nivel "microscópico" de análisis de fenómenos cognitivos y didácticos y requiere usar nociones teóricas y metodológicas específicas.

Las nociones de esquema, conceptos y teoremas en actos, que proponen la TCC y la RRS se orientan en esa dirección. Ahora bien, ¿son suficientes estas nociones para este aspecto del trabajo didáctico? Consideramos que la noción de "configuración cognitiva" que propone el EOS, con su desglose en entidades situacionales, lingüísticas, procedimentales, conceptuales, proposicionales y argumentativas permiten un análisis más fino del aprendizaje matemático de los estudiantes. La noción de configuración, en su versión epistémica, permite también hacer análisis microscópicos de los objetos matemáticos, caracterizar su complejidad ontosemiótica y aportar explicaciones de los aprendizajes en términos de dicha complejidad.

El EOS permite estudiar los hechos y fenómenos a nivel microscópico, incluso fenómenos que pueden calificarse de singulares. ¿Qué ocurre aquí y ahora? ¿Por qué ocurre? ¿Qué aprende, o deja de aprender, este alumno en estas circunstancias? Aportar respuestas a estas cuestiones puede ser un primer paso para generar hipótesis referidas a otros alumnos y circunstancias. Para hacer este tipo de análisis el EOS introduce las dualidades cognitivas: elemental-sistémica; ostensiva-no ostensiva; extensiva-intensiva; expresión-contenido (función semiótica). Un ejemplo de estos análisis más puntuales en el marco del EOS se puede encontrar en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2005). Estos autores utilizan conjuntamente las dualidades extensivo-intensivo y expresión-contenido para explicar, en el caso de la función derivada, las dificultades de los alumnos relacionadas con la complejidad semiótica inherente al uso de elementos genéricos.

Por otra parte, las nociones de sistema de prácticas (praxeología u organización matemática), instituciones, marcos y contextos de uso, ecología de significados son nociones apropiadas para realizar análisis de tipo macroscópico (curricular, instruccional).

La noción de *conflicto semiótico*, cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa, es también útil para la realización tanto de análisis de nivel macro como de nivel microdidáctico en la producción y comunicación matemática.

En la Tabla 1 presentamos una síntesis de las relaciones entre algunas nociones de los modelos teóricos estudiados y las correspondientes interpretaciones en el enfoque ontosemiótico.

Tabla 1: Comparación de algunas nociones teóricas de los enfoques analizados

NOCIONES DE MARCOS TEÓRICOS ESTUDIADOS	INTERPRETACIÓNES EN EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO
TEORÍA DE SITUACIONES	
Situación	Situación-problema
Conocimiento	Conocimiento, entendido como significados de objetos personales (sistemas de prácticas personales y sus configuraciones cognitivas asociadas)
Saberes matemáticos	Saberes, entendidos como significados de objetos institucionales (sistemas de prácticas institucionales y sus configuraciones epistémicas asociadas)
Modelo implícito /concepción	Concepción, entendida como significados de objetos personales (sistemas de prácticas y sus configuraciones cognitivas asociadas)
Sentido de un conocimiento	Sentido, entendido como significado parcial (subsistemas de prácticas)
Formas de conocimiento (ligadas a situaciones de acción, formulación, validación)	Diferentes configuraciones cognitivas ligadas a prácticas actuativas, comunicativas o argumentativas
DIALÉCTICA INSTRUMENTO – OBJETO	
Problema matemático	Situación – problema (que reúne ciertas condiciones)

Concepto – instrumento	Concepto entendido como objeto interviniente en un sistema de prácticas (principalmente operatorias)
Concepto –objeto	Concepto, entendido como objeto interviniente en un sistema de prácticas regulativas y discursivas (definiciones y propiedades del objeto en un contexto formal).
Marcos	Contextos matemáticos (geométrico, algebraico, etc.; atribuyen un significado parcial a los objetos)
Juego de marcos	Coordinación de significados parciales derivados de los contextos de uso.
TEORÍA ANTROPOLÓGICA	
Tarea (problemática)	Situación – problema que desencadena una práctica
Praxeología u organización matemática(puntual, local, regional, global)	Configuración epistémica asociada a un sistema de prácticas operativas y discursivas y relativas a una clase de situaciones más o menos amplia
Praxis (tarea; técnica)	Prácticas operativas ligadas a un tipo de situaciones
Logos (tecnología; teoría)	Prácticas discursivas ligadas a campos de problemas
Transposición didáctica	Ecología de significados (entendidos como sistemas de prácticas)
TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES	
Concepto	Concepto, entendido como parte de una configuración cognitiva/ epistémica asociada a un sistema de prácticas
Campo conceptual	Campo conceptual, entendido como configuración epistémica global
Esquema	Esquema, entendido como significados de objetos personales (sistemas de prácticas y sus configuraciones cognitivas asociadas)
Concepto y teorema en acto	Concepto y teorema (entendidos como reglas), parte regulativa de la configuración cognitiva que se activa al realizar una práctica personal.
Sentido	Significado personal, entendido como sistema de prácticas personales ligadas a una clase de situaciones

REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA	
Registros de representación	Tipos de lenguajes o medios de expresión ostensiva
Representación semiótica	Representación semiótica, entendida como configuración epistémica que participa como expresión o contenido en una función semiótica
Cambio de registros	Coordinación de significados parciales

6. OBSERVACIONES FINALES

En este trabajo hemos abordado solo algunos aspectos de los modelos teóricos seleccionados, en particular las nociones relacionadas con el conocimiento matemático. Consideramos que este es un aspecto crucial, ya que la didáctica de las matemáticas no puede evitar abordar este problema, a pesar de su dificultad[22], y entrar en interacción con las diversas disciplinas que tradicionalmente se han ocupado del mismo. Los modelos teóricos seleccionados, bien asumen posiciones tomadas de otras disciplinas, o proponen nuevos planteamientos y desarrollos.

Un aspecto esencial que permite distinguir entre los modelos teóricos es el relativo a la dialéctica entre la dualidad institucional y personal, entre enfoques epistemológicos y cognitivos, los cuales con frecuencia se presentan disjuntos dando lugar a posiciones extremas. En unos casos el acento se pone en la dimensión personal (TCC y RRS), en otros en la dimensión institucional (TAD y TSD), mientras que en el EOS se postula una relación dialéctica entre ambas dimensiones, por lo que pensamos puede ayudar a la articulación entre los restantes modelos teóricos.

La clasificación de los modelos teóricos descritos como pertenecientes a los programas epistemológico o cognitivo no es completamente satisfactoria. Se trata de una clasificación dicotómica que sólo parece pertinente en algunos casos extremos, como ocurre con la TAD (que consideramos claramente posicionado dentro del programa epistemológico) y la RRS (claramente dentro del programa cognitivo). Por el contrario la TSD y la TCC reúnen características de ambos programas; en el caso de la TSD más próximo al programa epistemológico y en el de la TCC al cognitivo. Consideramos que la última formulación de la DIO-JM estaría en una posición central, como ocurre con el EOS, uno de cuyos objetivos clave es la articulación coherente de los programas epistemológico y cognitivo (Figura 1).

22 "La noción de conocimiento nos parece una y evidente. Pero, en el momento en que se le interroga, estalla, se diversifica, se multiplica en nociones innumerables, planteando cada una de ellas una nueva interrogante" (Edgard Morin, 1977, p. 18).

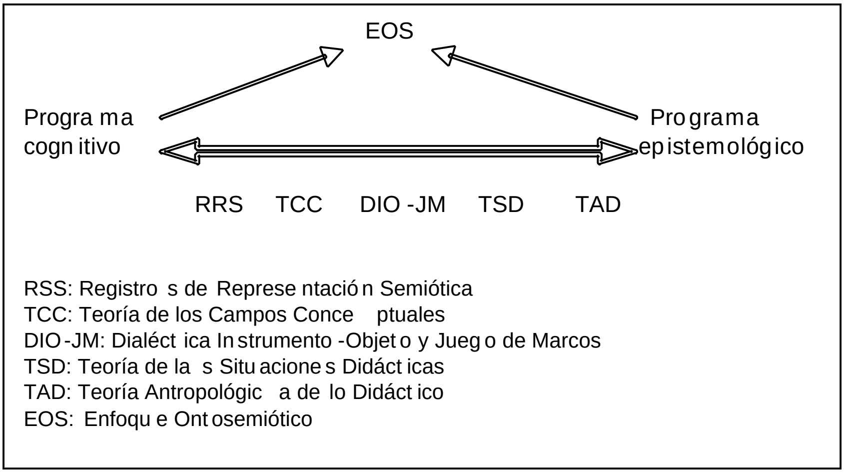

Figura 1. *Articulación de programas de investigación en didáctica de las matemáticas.*

En este trabajo no hemos abordado el análisis de los supuestos y nociones teóricas que se introducen en cada modelo para la descripción, explicación y predicción de fenómenos ligados a los procesos de instrucción matemática. En cierta manera, el análisis instruccional se apoya en la adopción de un modelo epistemológico sobre las matemáticas y un modelo de cognición individual por lo que su estudio lo hemos considerado previo. En Godino, Contreras y Font (en prensa) se amplía el marco del EOS incorporando algunas nociones para el análisis de procesos de estudio matemático.

Somos conscientes de las limitaciones de este trabajo, ante la complejidad del problema abordado, y de la necesidad de profundizar en la clarificación y confrontación de las nociones teóricas usadas en la investigación didáctica, tanto respecto de los autores que hemos seleccionado, como de otras aportaciones valiosas que se han realizado en diferentes países y escuelas de pensamiento, cuyo análisis y confrontación deberá ser abordada en otros trabajos. Es el caso de la teoría APOS (Dubinsky, 1991), Interaccionismo simbólico (Cobb y Bauersfeld, 1995), Socioepistemología (Cantoral y Farfán, 2003), Semiótica antropológica (Radford, 2006), etc.

Terminamos este trabajo expresando nuestro reconocimiento a G. Brousseau, R. Douady, G. Vergnaud, Y. Chevallard y R. Duval por sus contribuciones a la fundamentación de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica y estimular nuestro interés hacia este espacio de reflexión teórica.

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco del proyecto MCYT – FEDER: SEJ2004-00789, Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica. Madrid.

7. REFERENCIAS

Antibi, A. y Brousseau, G. (2000). Le dé-transposition de connaissances scolaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques 20* (1), 7-40

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10* (2-3), 241-286.

Atweh, B., Forgasz, H. y Nebres, B. (2001). *Sociocultural research on mathematics education. An international perspective*. London, England: Lawrence Erlbaum.

Baker, G. P. y Hacker, P. M. S. (1985). *Wittgenstein. Rules, grammar and necessity. An analytical commentary on the Philosophical Investigations*. Glasgow: Basil Blackwell.

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. London, England: The Macmillan Press.

Bosch M., Fonseca C., Gascón J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques 24* (2-3), 205–250.

Bosch M., Gascón J. (2004, en prensa). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. En C. de Castro y M. Gómez (Eds.), *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas* (XX SIIDM-SEIEM, 26–28 marzo, Madrid).

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7 (2), 33-115.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6* (1), 27-40.

Chevallard, Y. (1991), Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2-IMAG, Université Joseph-Fourier, Grenoble.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 12* (1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19* (2), 221-266.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* Hillsdale,N.Y.: Lawrence Erlbaum A. P.

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques 25* (2), 151–186.

CP Peirce, C. S. 1931-1958. *Collected Papers,* vols. 1-8, C. Hartshorne, P. Weiss y A. W. Burks (eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et penseé humaine*. Berna: Peter Lang.

Duval, R. (1996). Quel cognitive retenir en didactique des mathématiques?. *Recherches en Didactique des Mathématiques 16* (3), 349-382.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7* (2), 5-31.

Douady, R. (1991). Tool, object, setting, window: elements for analysing and constructing didactical situations in mathematics. En, A. J. Bishop y S. Melling Olsen (Eds). *Mathematical knowledge: its growth through teaching*, (pp. 100-130). Dordrecht, Kluwer A. P.

Eco, U. (1979). *Tratado de semiótica general*. Barcelona, Lumen (1991).

Ernest, P. (1994). Varieties of constructivism: Their metaphors, epistemologies and pedagogical implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 2*, 1-14.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. New York, USA: SUNY.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en didáctica de las matemáticas. *Revista EMA 7* (2), 127-170.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques 18* (1), 7-33.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14* (3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 22* (2-3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics 60* (1), 3-36.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font. V. (2006, en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*.

Hjemslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos, 1971.

Legrand, M. (1996). La problématique des situations fondamentales. Confrontation du paradigme des situations à d'autres approches didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 16* (2), 221-280.

Lerouge, A. (2000). La notion de cadre de rationalité. A propos de la droite au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques 20* (2), 171-207.

Morin, E. (1977). *El método I; la naturaleza de la naturaleza*. Madrid: Cátedra, 1986.

Radford, L. (2006, en prensa). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht: Kluwer A. P.

Ullmann, S. (1962). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado*. Madrid: Aguilar, 1978.

Varela, F. J. (1988). *Conocer. Las ciencias cognitivas: tendencias y perspectivas; cartografía de las ideas actuales.* Barcelona: Gedisa, 1990.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques 10* (2-3), 133-170.

Vergnaud, G. (1994). Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. En, M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavignot (Eds.), *Vingt ans de Didactique de Mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud* (pp. 177-191). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior 17* (2), 167-181.

Wilhelmi, M. R., Godino J. D. y Font V. (en prensa). Bases empiriques de modèles théoriques en didactique des mathématiques : réflexions sur la théorie de situations didactiques et l'approche ontologique et sémiotique. *Colloque International «Didactiques: quelles références epistemologiques?»* (25–27 mayo 2005). Bordeaux: Association Francophone Internationale de Recherche Scientifique en Education (AFIRSE) et IUFM d'Aquitaine.

Wilhelmi, M. R., Lacasta, E. y Godino, J. D. (en prensa). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques* .

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona, España: Crítica.

Juan D. Godino
Facultad de Educación
Granada, España

E.mail: jgodino@ugr.es

Vicenç Font
Universitat de Barcelona
Facultat de Formació del Professorat
Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica
Barcelona, España

E-mail: vfont@ub.edu

Angel Contreras
Departamento de Didáctica de las CC. EE
Sociales y Matemática
Universidad de Jaén
Jaén, España

E mail: afuente@ujaen.es

Miguel R. Wilhelmi
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad Pública de Navarra
Navarra, España

E-mail: miguelr.wilhelmi@unavarra.es