Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques?

Raymond Duval [1]

RESUMEN

Tanto en la enseñanza como en sus prácticas más avanzadas, las matemáticas son el dominio donde todas las formas de representación semiótica pueden ser utilizadas. Ello plantea el problema siguiente: ¿las diferentes teorías semióticas permiten analizar la utilización de imágenes, del lenguaje y de los símbolos en matemáticas? Para comprender los elementos del problema, se debe no solamente observar cómo estas teorías distinguen las relaciones que constituyen y diferencian los signos, sino también considerar las exigencias matemáticas que demanda el recurso de las diferentes formas de representación semiótica. Su comparación muestra una diferencia considerable entre las herramientas de análisis semiótico existentes y la complejidad semiótica de todas las producciones matemáticas. Limitándose al caso de la representación de los números, se puede poner en evidencia que estas herramientas no permiten analizar la heterogeneidad semiótica de los diferentes sistemas utilizados. Ahora bien, esta heterogeneidad semiótica provoca una de las dificultades mayores del aprendizaje de las matemáticas: pasar de un tipo de representación a otro. El análisis de las producciones matemáticas exige herramientas de análisis semiótico más complejas y mejor adaptadas a los procesos cognitivos movilizados en toda actividad matemática. Para poder realizar esta investigación, tres preguntas son cruciales: una sobre la pertinencia de la distinción entre significante y significado, otra en torno a la clasificación de los signos, y, finalmente, otra referente a la comparación entre un análisis funcional y un análisis estructural de los signos.

- **PALABRAS CLAVE:** Condensación, designación, imagen, figura geométrica, relaciones constitutivas de signos, representaciones semióticas y no semióticas, sistema semiótico, transformación de representaciones.

ABSTRACT

Mathematics, whether in its teaching or in its more advanced practices, is a domain where all the forms of semiotic representation can be used. This entails the following problem: do different semiotic theories allow for the analysis of the use of images, language and symbols in mathematics? To grasp the givens of the problem, we not only have to

Fecha de recepción: Febrero de 2006/ Fecha de aceptación: Abril de 2006

1 Université du Littoral Côte d'Opale(ULCO), France.

see how these theories make the distinction between the relations that constitute and differentiate signs, but we also have to consider the mathematical demands which necessitate that we make recourse to different kinds of semiotic representation. Their comparison reveals a considerable gap between existing semiotic tools and the semiotic complexity found in all mathematical production. Limiting ourselves to the case of the representation of numbers, we can highlight the fact that these tools do not allow us to analyze the semiotic heterogeneity of the different systems used. Moreover, this semiotic heterogeneity brings up one the major difficulties in the learning of mathematics: going from one type of representation to another. The analysis of mathematical productions demands semiotic tools of analysis that are more complex and better adapted to the cognitive practices mobilized in all mathematical activity. In order to undertake this research, three questions seem to be crucial: that of the pertinence of the distinction between signifier and signified, that of the classification of signs, and that of the connection between the functional analysis and the structural analysis of signs.

- **KEY WORDS:** Condensation, designation, image, geometrical figure, constitutive relations of signs, semiotic and non semiotic representations, semiotic system, transformation of representations.

RESUMO

Tanto no ensino como nas práticas mais avançadas a matemática é o domínio onde todas as formas de representação semiótica podem ser utilizadas. Coloca-se o problema seguinte: As diferentes teorias semióticas permitem analisar a utilização de imagens, da linguagem e dos símbolos em matemática? Para compreender os elementos do problema, se deve não somente observar como estas teorias distinguem as relações que constituem e diferenciam os signos, mas também considerar as exigências matemáticas que demanda o recurso das diferentes formas de representação semiótica. Sua comparação mostra uma diferença considerável entre as ferramentas de análise semiótico existentes e a complexidade semiótica de todas as produções matemáticas. Limitando ao caso da representação dos números, se pode colocar em evidência que estas ferramentas não permitem analisar a heterogeneidade semiótica dos diferentes sistemas utilizados. Assim, esta heterogeneidade semiótica provoca uma das dificuldades maiores da aprendizagem das matemáticas: passar de um tipo de representação a outra. A análise das produções matemáticas exige ferramentas de análise semiótico mais complexas e melhor adaptadas aos processos cognitivos, mobilizados em toda atividade matemática. Para poder realizar esta investigação, três perguntas são cruciais: uma sobre a pertinência da distinção entre significante e significado, outra em torno da classificação dos signos, e, finalmente, outra referente a comparação entre uma análise funcional e uma análise estrutural dos signos.

- **PALAVRAS CHAVES:** Condensação, designação, imagem, figura geométrica, relações constitutivas de signos, representações semióticas e não semióticas, sistema semiótico, transformação de representações.

RÉSUMÉ

Aussi bien dans l’enseignement que dans ses pratiques les plus avancées, les mathématiques sont le domaine où toutes les formes de représentation sémiotique peuvent être utilisées. Cela pose le problème suivant : les différentes théories sémiotiques permettent-elles d’analyser l’utilisation des images, du langage et des symboles en mathématiques ? Pour saisir les données du problème, il faut non seulement regarder comment ces théories distinguent les relations qui constituent et différencient les signes, mais il faut aussi considérer les exigences mathématiques qui commandent le recours aux différentes formes de représentation sémiotique. Leur comparaison montre un écart considérable entre les outils d’analyse sémiotique existants et la complexité sémiotique de toutes les productions mathématiques. En se limitant au cas de la représentation des nombres, on peut mettre en évidence que ces outils ne permettent pas d’analyser l’hétérogénéité sémiotique des différents systèmes utilisés. Or cette hétérogénéité sémiotique soulève l’une des difficultés majeures de l’apprentissage des mathématiques : passer d’un type de représentation à un autre. L’analyse des productions mathématiques exige des outils d’analyse sémiotique plus complexes et mieux adaptés aux processus cognitifs mobilisés dans toute activité mathématique. Pour conduire cette recherche trois questions semblent cruciales : celle de la pertinence de la distinction entre signifiant et signifié, celle de la classification des signes, et celle du rapport entre une analyse fonctionnelle et une analyse structurale des signes.

- **MOTS CLÉS:** Condensation, désignation, image, figure géométrique, relations constitutives des signes, représentations sémiotique et non sémiotique, système sémiotique, transformation de représentation.

L’attention portée au rôle des signes dans la pensée mathématique est à la fois ancienne et récente. Elle est ancienne si l’on considère la création multiforme d’un symbolisme mathématique qui a accompagné le développement de l’algèbre, de l’analyse et de la logique dite mathématique. Mais elle est très récente si l’on considère les recherches sur les problèmes d’apprentissage qui, dans un cadre piagétien et constructiviste, ont privilégié une problématique d’acquisition de concepts.

Des raisons très différentes ont contribué à la découverte de l’importance des représentations sémiotiques pour comprendre la complexité des apprentissages en mathématiques. Il y a, bien sûr, l’introduction de l’algèbre. Il y a aussi l’analyse des productions des jeunes élèves dans le cadre des activités qui leur sont proposées en classe. Il y a eu également l’influence, tardive, de la pensée de Vygotski qui avait souligné, contre les explications de Piaget, l’importance du langage à travers ses trois modalités d’expression, intérieure, orale et écrite, dans le développement de la pensée de l’enfant. Mais la découverte de l’importance et de la variété des représentations sémiotiques dans les activités mathématiques et pour l’apprentissage soulève un problème considérable et souvent peu discuté : comment les décrire, comment les analyser et comment les situer par rapport aux démarches mathématiques ?

Le problème, en effet, n'est pas d'analyser la variété des représentations sémiotiques en fonction des concepts et des connaissances mathématiques qu'elles permettent d'exprimer, de traduire, de contextualiser, etc. Cela conduit, en fait, à les dissoudre dans une analyse faite en termes de « savoirs » relatifs à des contenus mathématiques particuliers. Le problème est d'abord de savoir déterminer ce que sont des « signes », ce qu'ils évoquent ou représentent et comment ils le font, quelles fonctions ils remplissent ou ne remplissent pas dans une démarche de connaissance. Certes, ces questions semblent avoir trouvé une réponse claire dans les différentes théories sémiotiques qui ont été élaborées depuis les Stoïciens et, plus particulièrement, avec Peirce, Saussure, et aussi Frege. Mais cette apparente clarté s'évanouit vite si on compare ces différentes théories entre elles et, surtout, si on considère la variété considérable et hétérogène des représentations sémiotiques utilisées en mathématiques et dans l'enseignement des mathématiques. Les quelques « concepts » et classifications élaborés dans les théories sémiotiques et auxquels beaucoup de travaux didactiques se réfèrent, apparaissent alors insuffisants et parfois non pertinents pour analyser l'activité mathématique et ses productions. Et c'est là que surgit la question suivante : quelle sémiotique pour analyser l'activité et les productions mathématiques ?

Cette question est essentielle à un triple titre. Tout d'abord, il s'agit de disposer d'un outil d'analyse suffisamment adapté et discriminant pour étudier l'activité mathématique et ses productions : celles des experts, celles des enseignants et celles des élèves y compris ceux de l'enseignement primaire. Car toutes les productions mathématiques mettent en jeu des représentations sémiotiques. Or, les types de représentations que l'on trouve chez les uns ne sont pas ceux qui sont privilégiés par les autres. Peut-on les considérer comme à peu près équivalents ou interchangeables tant du point de vue de leur fonctionnement sémiotique que du point de vue mathématique? En d'autres termes, peut-on ou non passer facilement d'un type à un autre, ou au contraire ce passage de l'un à l'autre ne cache-t-il pas une rupture? Ensuite, il y a le problème du rôle des signes et des représentations sémiotiques dans le fonctionnement de la pensée. On peut l'aborder de manière très générale sans se référer à aucun domaine particulier de connaissance, c'est-à-dire à la manière spécifique dont on a accès aux objets de connaissance dans chaque discipline scientifique. Mais on peut aussi l'aborder en prenant en compte les exigences propres au développement de la connaissance mathématique. Dans ce cas, il faut tenir compte de la situation épistémologique particulière des mathématiques par rapport aux autres domaines de connaissance. Les représentations sémiotiques jouent-elle le même rôle en mathématiques qu'en botanique, qu'en géologie, qu'en géographie, qu'en astronomie, etc.? Enfin, cela concerne les variables cognitives à prendre en compte dans les apprentissages. Peut-on considérer que certains types de représentation facilitent l'entrée dans les démarches mathématiques ou, au contraire, en brouillent la visibilité ? Les changements de type de représentation constituent-ils une variable didactique cruciale ou au contraire une variable secondaire ?

Le propos de cet article n'est pas de présenter ici une autre approche sémiotique pour analyser l'activité et les productions mathématiques, approche que nous avons développée dans d’autres travaux (Duval 1995a, 1996, 2003, 2005, 2006a, 2006b). Notre propos est de poser la question de la pertinence et des moyens d’une analyse sémiotique de l’activité mathématique et des problèmes d’apprentissage en mathématiques. Cette question exige que l’on commence par analyser les différentes théories sémiotiques dont on a importé en didactique les distinctions et les concepts, sans s’être vraiment interrogé sur leurs fondements, sur leur portée réelle ainsi que sur les critères opératoires qu’elles offrent ou n’offrent pas. Le résultat auquel nous espérons conduire le lecteur est qu’il voit pourquoi il faut se poser cette question. Si on ne s’est pas posé cette question, l’utilisation d’une théorie sémiotique, quelle qu’elle soit, ne peut avoir de sens.

Nous commencerons donc par présenter les données du problème sémiotique, telles qu’elles ressortent des différentes théories sémiotiques existantes. Nous verrons que les différentes théories ont conduit à expliciter cinq relations fondamentales pour caractériser les signes et les représentations sémiotiques, même si aucune ne prend en compte toutes les relations. Mais ce n’est là qu’une partie des données pour la question dont nous voulons montrer la nécessité et la priorité. Il nous faut aussi examiner les exigences mathématiques concernant l’utilisation des signes. Nous verrons alors que les représentations sémiotiques ne sont mobilisées et développées que dans la mesure où elles peuvent être transformées en d’autres représentations sémiotiques. Ce sont ces transformations possibles qui sont importantes et non pas les relations fondamentales explicitées dans les différentes théories sémiotiques. Pour illustrer cela, nous prendrons l’exemple de la représentation des nombres. Nous aurions pu aussi prendre un exemple en géométrie (Duval, 2005) ou un problème dans lequel on ne peut pas distinguer si on est dans un cadre géométrique ou numérique (Duval, 2006b). L’intérêt de la représentation des nombres est que cet exemple permet de comparer plusieurs types de représentation, dont celui de représentations «concrètes», ou iconiques, de marques unités que l’on utilise comme des pseudo objets et qui ne fonctionnement pas du tout comme des signes. Dans une troisième partie, nous verrons, en gardant le même exemple, comment le passage d’un type de représentation à un autre implique un saut sémiotique non seulement dans le fonctionnement de la relation de référence mais surtout dans le type d’opération discursive à effectuer. La dernière partie nous permettra de montrer comment la question, thème de cet article, se traduit et se diffracte en plusieurs questions cruciales. Nous en retiendrons trois. La distinction entre signifiant et signifié, est-elle pertinente en mathématiques ? La classification des représentations, se fait-elle en fonction des relations fondamentales caractéristiques des signes ou en fonction des systèmes producteurs de représentations ? L’analyse des productions peut-elle être entièrement subordonnée à la fonction remplie dans un contexte ?

I. LES DONNÉES DU PROBLÉME SÉMIOTIQUE

Les définitions des signes qui ont été proposées dans les différentes théories sémiotiques, mettent toutes en avant la fonction cognitive d’évocation, ou de remplacement, qu’un élément remplit à l’égard d’un autre élément, ces deux éléments étant implicitement considérés comme n’ayant pas le même statut épistémologique. De ce point de vue, il n'y a pas de différence entre la définition des signes et celle des représentations qui ne sont pas des signes, comme les images produites sur une surface plane réfléchissante ou par un système optique.

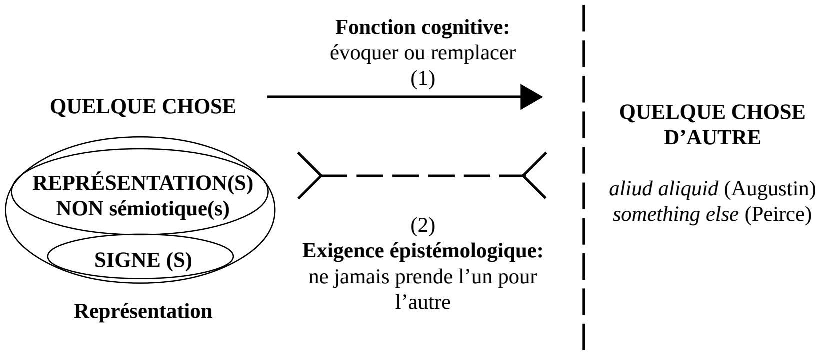


Figure 1. Les deux éléments constitutifs caractérisant les signes et toutes les représentations

Les trois définitions suivantes en sont une parfaite formulation :

— Le signe est une chose qui, outre la forme perçue par les sens, fait venir à partir d'elle la pensée de quelque chose d'autre .... (*Signum est enim res, praeter speciem quam ingerit sensibus, aliud aliquid ex se faciens in cogitationem venire*). (Augustin 1997, p. 136)
— Un signe ou représentamen est quelque chose qui tient lieu pour quelqu'un de quelque chose d'un certain point de vue ou realtivement à une compétence (*A sign, or representamen, is* ***something which stands*** *to somebody* ***for something*** *in some respect or capacity*). (Peirce 1978, p.121 (2.228)).
— Les « représentations » sont « l'évocation d'objets absents » (Piaget 1968a, p.305 ; 1968b, p. 8).

Malgré une apparente évidence, toutes ces définitions sont à la fois inutilisables et incomplètes. Elles sont tout d'abord incomplètes parce qu'elles laissent implicite l'exigence épistémologique fondamentale qui conduit à ne pas confondre une représentation avec ce qu'elle représente (Platon *République*, 509e-510b). Car, sans le respect de cette exigence, il n'y a plus de signe ou de représentation. Le respect de cette exigence peut sembler trivial ou immédiat lorsqu'il s'agit de choses matérielles, comme, par exemple une chaise. On ne confondra jamais la chaise en bois sur laquelle on peut s'asseoir et la photographie de cette chaise ou encore un dessin de cette chaise. Cela ne l'est plus pour les représentations sémiotiques utilisées en mathématiques, comme, par exemple les multiples représentations possibles des nombres, car on ne peut pas accéder à ces objets mathématiques sans mobiliser des représentations sémiotiques (Duval 2006b). Mais, surtout, cette définition est inutilisable car la fonction cognitive consistant à « évoquer » ou à « se tenir lieu de quelque chose » ne précise pas comment cette fonction cognitive peut être remplie. Autrement dit, cette définition, qui caractérise les signes par leur seule fonction, ne dit rien de la relation qui, structuralement, permet à quelque chose d'évoquer quelque autre chose.

C'est pourquoi les différentes théories du signe et de la représentation qui ont été développées ont été conduites à expliciter plusieurs relations fondamentales constitutives des signes ou des représentations. Nous en retiendrons cinq et il semble qu'il ne puisse pas en exister d'autres.

1. Une relation de « ressemblance »

La relation de ressemblance, à travers les notions de « copie » ou d'« image » (*eikon*) qui lui sont associées, a été dégagée par Platon (République 476c, 509[e], 510[e]). Peirce en a fait l'une des trois catégories des représentations : « Une icône est un *represenamen* dont la qualité représentative est la priméité du *representamen*...par conséquent n'importe quelle chose peut être un substitut de n'importe quelle chose à laquelle elle ressemble » (Peirce 1978 p.14 7 (2.276) ; voir aussi 2.247). Cependant, ce qui permet de définir une ressemblance entre le contenu d'une représentation et ce dont ce contenu est la représentation reste flou comme Quine (1977) l'avait signalé. Comment déterminer s'il y a « ressemblance» ou non entre une représentation et ce qu'elle est censée représenter, sans passer par un ensemble d'opérations qui coûtent plus de temps que le seul fait de reconnaître quelque chose comme une image ?

Bresson a proposé un critère qui s'avère être un outil précieux à la fois pour décider si une représentation est, ou n'est pas « iconique » et pour pouvoir distinguer les différents types d'images. La ressemblance se caractérise par « la conservation entre les éléments du représentant des relations de voisinage existant entre les éléments du représenté » (Bresson 1987, p. 940). Autrement dit, la ressemblance ne se fonde pas sur la reproduction de formes mais sur la conservation de relations topologiques des éléments qui composent l'ensemble d'une figure. Ainsi, dans l'exemple ci-dessous, les éléments des deux premiers dessins sont homogènes (que des carrés ou des ronds !) et leur forme ne ressemble pas aux différentes parties du visage humain. Ce sont leurs relations de voisinage qui les font interpréter comme des yeux, un nez, etc. Présentées simultanément à de jeunes enfants, ces formes sont généralement vues comme « un robot » et un « bonhomme ».

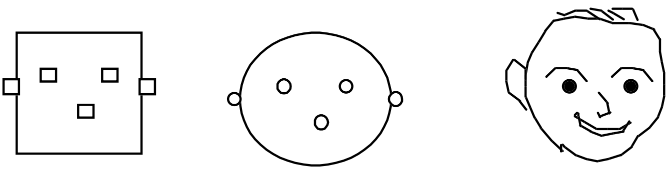


Figure 2. Deux images schématisées et une image figurative.

La comparaison du troisième dessin avec les deux premiers montre l'intérêt de la définition de Bresson. Elle permet de voir ce qui fait la différence entre une image figurative (à droite), qui est une «copie » plus ou moins fidèle d'un visage, et une image schématisée ou abstraite (à gauche) mais qui ressemble encore à un visage. Dans l'image figurative, les éléments sont différents et ont chacun une ressemblance de contour avec une partie du visage. Une image devient schématique lorsque tous les éléments composant l'image deviennent homogènes et perdent donc tout caractère d'iconicité (Duval 2003, p. 39-40).

Regardons maintenant ces figures qui suivent. En quoi se distinguent-elles des premiers dessins ci-dessus ? Peut-on les considérer comme relevant de la même catégorie que les images ci-dessus ?

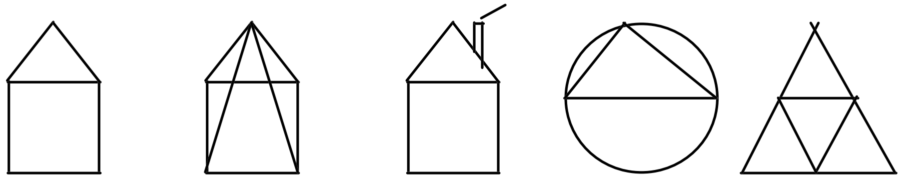


Figure 3. Quatre ou cinq figures géométriques ?

On peut noter une première différence. Une figure géométrique ne se dessine pas à main levée mais se construit à l'aide d'instruments, tandis qu'un dessin ne se construit pas mais se compose à main levée. Mais, d'un point de vue sémiotique, cette différence a peu d'importance. La question suivante demeure : une fois construite ou dessinée, une figure géométrique s'analyse-t-elle en termes de ressemblance avec ce qu'elle représente ?

2. Une relation de « référence »

Cette relation, que Frege (1971) appelait la *Bedeutung* (*dénotation*) des signes ou de leur combinaison en une expression, exclut toute possibilité de ressemblance entre les signes et ce dont ils sont les signes. Elle concerne surtout deux types de signes très différents : les symboles et les mots. **La relation de référence d'un signe ou d'une combinaison de signes à un objet résulte d'une opération discursive de désignation**. C'est de cette manière que les lettres en algèbre, les mots, ou les constructions syntagmatiques de mots dans un énoncé, réfèrent à un objet. Cette opération peut paraître simple lorsqu'il s'agit de lettres ou de symboles, puisque généralement on les associe à quelque chose qui est visible graphiquement : les sommets ou les points d'intersection sur une figure géométrique, ou un ensemble de nombres que l'on se donne : « Soit x... ». Dans ce type de situation on parle le plus souvent de « notation mathématique » (Freudenthal, 2002).

L'opération de désignation est beaucoup plus complexe dès qu'elle se fait par des mots. **Un mot, seul, ne désigne jamais un objet, sauf si on lui assigne un statut de nom propre.** La désignation d'un objet par un nom commun exige toujours une quantification. Autrement dit, la désignation linguistique se fait par la combinaison d'un nom commun et d'un déterminant. Mais, comme aucun lexique ne comporte jamais autant de mots que d'objets à désigner, la construction syntagmatique doit articuler plusieurs noms en une seule expression : « **le** point **d**'intersection **des** hauteurs **d**'un triangle ... ». Russell considérait ce type de construction syntagmatique, comme une « description ». Il est caractéristique du langage mathématique (Duval, 1995a). Et on le retrouve dans tous les énoncés de définition ou de théorème ainsi que dans les énoncés des problèmes ! Cette opération de désignation, qui crée la référence à un objet, est soumise à une condition d'unicité pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté dans la communication sur l'objet qui est ainsi désigné (Ducrot, 1972). En mathématiques, les expressions qui introduisent une notation articulent en fait deux opérations discursives de désignation : l'une littérale et l'autre linguistique : *« l'écriture* **a/b**) désigne (**le quotient de** *a* **par** *b* ». (Deledicq 1979, p.

48), ou encore « Soit **A** *le point d'intersection des hauteurs d'un triangle* ».

3. Deux relations caractérisées en termes de causalité

Il s'agit ici d'une relation totalement différente des deux précédentes. Ici la relation peut être prise de deux manières différentes : soit ce qui fonctionne comme signe est un effet de ce qu'il évoque, soit, au contraire, il agit comme cause ou comme déclencheur d'une action.

3.1 La relation effet $\longrightarrow$ cause

Elle caractérise les phénomènes naturels qui induisent la recherche de leur cause ou de leur origine : des reflets, des traces, des vestiges, des symptômes, des indices... Peirce a pris l'exemple de l'observation d'une fumée. On pourrait ici faire appel à l'abondante littérature qui, de Plotin à Derrida, a cherché, dans ce type de relation, le caractère premier et fondateur des signes. La trace est devenue la métaphore sémiotique de ce type de relation.

3.2 La relation cause $\longrightarrow$ effet

Elle ne concerne plus des phénomènes naturels mais ce qu'on considère comme un signal. Ainsi les feux aux carrefours sont des signaux qui doivent déclencher, de manière réflexe, une action de la part des conducteurs. Plus généralement, toute transmission d'informations à l'intérieur d'un système physique ou organique dépend de codes et de signaux.

4 . Une relation d'opposition alternative ouvrant un choix d'emploi

Ici, les termes de cette relation ne sont plus entre un élément qui remplirait une fonction d'évocation et un autre qui serait ce qui est évoqué; ils sont entre au moins deux éléments qui s'opposent comme deux signes possibles pour évoquer ou pour désigner quelque chose d'autre. Autrement dit, il n'y a pas de signes isolés qui fonctionneraient par eux-mêmes, comme une notation, mais il y a d'emblée un système de plusieurs signes. Cette relation a été mise en évidence par Saussure (1915) :

> La langue est un *système* dont tous les termes sont solidaires et où la valeur de l'un ne résulte que de la présence simultanée des autres..... Entre eux il n'y a qu'opposition. **Tout le mécanisme du langage repose sur des oppositions** de ce genre et sur les différences phoniques et conceptuelles qu'elles impliquent. Ce qu'il y a d'idée ou de matière phonique dans un signe importe moins que ce qu'il y a autour de lui dans les autres signes. (Saussure 1973, p. 159, 166)

Autrement dit, il n'y a pas de signes en dehors du système où des éléments prennent valeur de signe. Cette théorie a conduit aux méthodes d'analyse structurale des langues à base phonologique (Martinet, 1966) et de toutes les formes de discours produits (Benveniste, 1974). En dehors des langues, les systèmes de numération de position en fonction d'une base *n* sont une parfaite illustration de ce qu'est un système sémiotique, selon la définition structurale et non pas purement fonctionnelle de Saussure. En effet, ces systèmes de numération sont, selon l'expression de Freudenthal (2002), un «compromis entre le système linguistique et celui de l'abaque ». Pour bien le mettre en évidence, il suffit de comparer les deux types suivants de représentation des nombres.

<table>
<tr><td>Des MARQUES UNITÉS tenant lieu chacune d’un objet</td><td colspan="2">Un SYSTÈME SÉMIOTIQUE</td></tr>
<tr><td>Aucune valeur de position mais des arrangements configuraux possibles</td><td colspan="2">Principe positionnel de l’abaque: la valeur dépend de la colonne où se trouve la marque</td></tr>
<tr><td></td><td>Base «10» : lexique fondé sur neuf valeurs d’opposition pour chaque terme</td><td>Base «2» : lexique réduit à une seule valeur d’opposition</td></tr>
<tr><td>|</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>| |</td><td>2</td><td>10</td></tr>
<tr><td>| | |</td><td>3</td><td>11</td></tr>
<tr><td>| | | | | | | | | |
ou (| | | | | | | | | |)</td><td>10</td><td>100</td></tr>
</table>

Figure 4. Hétérogénéité sémiotique de deux types de représentation des nombres.

Nous sommes ici en présence de deux genres radicalement différents de représentation. L’un consiste en des marques unités qui sont indépendantes les une des autres et qui ne peuvent être assemblées que sous forme d’une collection. L’autre est un système sémiotique dans lequel les chiffres, analogues aux termes d’un lexique, dépendent les uns des autres selon deux principes de composition.

— un principe organisationnel de position qui permet de combiner systématiquement les chiffres entre eux pour écrire de nouveaux nombres. Chaque chiffre a ainsi une valeur de position qui correspond à une élévation, à une puissance. Ce principe détermine un algorithme de calcul pour les opérations arithmétiques.
— un principe de choix lexical qui correspond à la base *n*. Cette base détermine le nombre d’oppositions alternatives pour le choix des signes numériques.

A la différence des marques unités (colonne de gauche) qui sont constituées par leur seule trace matérielle, la réalité signifiante des chiffes est déterminée par leur seule valeur d’opposition alternative à d’autres chiffres, et non pas par leur trace matérielle. En ce sens, il ne peut pas y avoir de lexique ne comportant qu’un seul terme : « 1 » ne fonctionne comme signe d’un nombre que par son opposition soit à « 0 » dans le système binaire, soit à neuf autres signes dans le système décimal, dont évidemment « 0 ». Par conséquent « 1 » ne représente le nombre UN, comme la marque unité « I », que par son opposition à « 0 », et sous la condition qu’il occupe la première position en partant de la gauche.

Ces deux types de représentation des nombres sont hétérogènes. De l’une à l’autre, il y a un saut sémiotique et cognitif. Lorsque nous comparerons ces deux types de représentations sous le point de vue des opérations qu’elles permettent, nous verrons que les marques unités fonctionnent comme des pseudo objets manipulables concrètement et non pas comme des signes opératoires (*infra* 2.1). L’apparition du symbole « 0 », irréductible à toute représentation concrète, c’est-à-dire non représentable par des marques unités, traduit déjà la rupture qui se produit quand on passe d'un type de représentation à l'autre.

5. Quel est l'autre terme de ces relations fondamentales ?

Ces relations fondamentales sont autant de modes différents par lesquels «quelque chose », appelé « signe» ou « représentation », peut remplir la fonction cognitive d'évocation de « quelque chose d'autre » (Figure 1). Quel peut être cet autre terme que les définitions purement fonctionnelles désignent comme *aliud aliquid* ou *something else* et qui, d'un point de vue épistémologique ne doit jamais être confondu avec son signe ou sa représentation ?

C'est cet « autre chose » du signe ou de la représentation qui est important. C'est pourquoi il a été considéré comme «l'étant véritable » (Platon), comme la *res*, comme la « chose elle-même», c'est-à-dire comme l'objet de connaissance. La notion d'objet est celle qui s'est imposée dans toutes les analyses philosophiques et phénoménologiques de la connaissance comme la notion fondamentale (Duval 1998, p.167-168, 196). L'objet peut être soit une chose matérielle, accessible perceptivement comme une chaise, comme les plantes dans une forêt ou comme le soleil que l'on reconnaît être « le même » qui se lève chaque matin, soit une réalité idéale accessible uniquement par des démarches de pensée mobilisant justement des signes, comme par exemple les nombres. Ainsi les représentations « III », « 3 », « 39/13 », ou encore une configuration triangulaire de points, renvoient au même nombre comme à un même objet. On ne parle jamais du nombre « trois » comme d'un concept et du nombre « quatre » comme d'un autre concept. En mathématiques, on travaille avec les nombres et non pas avec le nombre, c'est-à-dire avec une définition du nombre, celle donnée par exemple par Peano, ou celles qui ont été discutées lors du débat entre Poincaré et Russell. De ce point de vue, l'ouvrage de Piaget sur *La genèse du nombre chez l'enfant* (1941) a introduit des glissements terminologiques qui ont été néfastes pour la réflexion didactique concernant les processus de la pensée.

Un objet, réalité matérielle ou idéalité, peut être le terme de plusieurs relations sémiotiques fondamentales. Ainsi, une chaise peut être à la fois le terme d'une relation de ressemblance dans une photographie, d'une relation de référence dans un énoncé descriptif, et d'une relation d'effet à cause, s'il reste une trace de cette chaise, sur un sol meuble par exemple. Cela permet de composer des juxtapositions paradoxales comme nous le verrons plus loin. Au contraire, à la différence d'une chose matérielle, une réalité idéale ne peut pas être le terme d'une relation de ressemblance.

Cependant, il y a des situations où les signes ne tiennent pas à la place des objets qu'ils évoquent, mais remplacent d'autres signes. C'est le cas, par exemple, des codes alphabétiques qui commutent l'émission orale d'un discours en une suite visuelle de caractères, ou encore des lettres en algèbre, les lettres remplaçant une liste de valeurs numériques possibles. Dans le premier cas, les codes apparaissent comme un marquage formel de signes, les marques formelles appelant un décodage pour retrouver la réalité des signes, c'est-à-dire l'une ou l'autre des cinq relations fondamentales. Aristote, qui avait déjà remarqué cette situation, en avait conclu à une plus grande distance de l'écriture par rapport à la pensée que celle de la parole à la pensée (*De l'interprétation*, 16a 1-10). Le second cas est différent. Il répond à une fonction d'abréviation et d'économie cognitive et soulève la question du caractère « aveugle » d'un symbolisme qui ne remplit plus la fonction d'évocation d'un objet (*infra*, 2.13 et 4.3). Mais ces deux cas peuvent donc être ramenés à l'opposition entre signe et objet, conformément à l'exigence épistémologique sans laquelle la définition purement fonctionnelle des signes deviendrait non pertinente. Rappelons d'ailleurs que Peirce recourt lui aussi à cette notion d'objet pour caractériser des différents types de r*epresentamen*, c'est-à-dire trois des cinq relations fondamentales constitutives des signes.

6. Qu'en est-il de la distinction entre signifiant et signifié ?

Cette distinction est évidemment la distinction familière. Mais elle est aussi celle dont l'emploi dans la littérature didactique est complètement équivoque.

Soit elle correspond à la distinction entre l'élément qui remplit une fonction d'évocation et cet autre chose qu'il évoque. Dans ce cas, la distinction est redondante par rapport aux définitions classiques du signe (Figure 1) : « signifiant » est alors synonyme de signe et « signifié » synonyme de l'objet évoqué ! Soit elle porte sur ce qui serait la structure interne de l'élément qui remplit la fonction cognitive d'évocation. Dans ce cas, la portée de cette distinction se limite aux langues humaines qui remplissent une fonction de communication orale, c'est-à-dire **aux systèmes linguistiques à base phonologique**.

En effet, toute l'économie des langues humaines, qui remplissent une fonction de communication orale, repose sur ce que Martinet a appelé la « double articulation ». D'une part, il y a une première articulation de la parole en unités de sens (phrases, mots, monèmes). D'autre part, les unités de sens minimales (les monèmes) sont le produit d'une articulation de plusieurs unités phoniques (les phonèmes), ces deux articulations étant entièrement indépendantes l'une de l'autre :

> « Si nous devions faire correspondre à chaque unité significative minima une production vocale spécifique et inanalysable, il nous faudrait en distinguer des milliers, ce qui serait incompatible avec les latitudes articulatoires et la sensibilité auditive de l'être humain. Grâce à la seconde articulation, les langues peuvent se contenter de quelques dizaines de productions phoniques distinctes que l'on combine pour obtenir la forme vocale des unités de première articulation» (Martinet 1966, p. 19).

Les langues humaines se distinguent du langage des animaux par cette double articulation.

Nous verrons plus loin (4.1) que cette distinction n'a pas de sens pour les signes purement visuels, notamment pour les notations mathématiques.

7. Conclusion : le problème de l'analyse et du rôle des signes dans l'activité cognitive.

Ce rapide panorama de la diversité des relations constitutives de la « signifiance » des signes (Benveniste 1974, p .45, 51) permet de faire les trois observations suivantes.

Tout d'abord, personne ne confondra la fonction cognitive d'évocation ou de substitut d'autre chose avec les relations de ressemblance, de référence, de causalité ou d'opposition alternative entre deux éléments. Ce sont ces relations structurales qui permettent qu'un élément remplisse la fonction d'« évocation ». Seule la relation cause$\rightarrow$effet, caractéristique du signal, ne remplit pas cette fonction, mais une fonction d'instruction ou de commande, comme on peut le voir dans le fonctionnement de tous les systèmes automatisés ou non conscients.

Dans une approche sémiotique, on ne peut pas faire appel aux phénomènes d'association (Russell, 1969). Car cela concerne un autre problème, celui de l'apprentissage des signes et plus particulièrement de celui d'une langue. Or, pour expliquer cet apprentissage le recours au processus d'association relève d'une théorie plus que discutable et démentie par les observations (Boysson-Bardies 1999). Nous verrons plus loin que ce qu'on appelle association relève en fait d'une opération discursive de dénomination complexe.

Aucune théorie sémiotique existante ne permet de prendre en compte toutes ces relations, mais chacune tend à en privilégier une ou deux. Autrement dit, aucune théorie ne couvre la diversité et la complexité des phénomènes sémiotiques.

Maintenant la question n'est pas seulement de savoir quelles sont les relations les plus pertinentes pour analyser les activités et les productions mathématiques, elle est surtout de savoir si les relations que l'on estime pertinentes sont suffisantes.

II. ÉXIGENCE ET PRATIQUE MATHÉMATIQUES CONCERNANT LES SIGNES : LES POSSIBILITÉS DE TRANSFORMATION DES REPRÉSENTATIONS.

En mathématiques, une représentation n'est intéressante que dans la mesure où elle peut se transformer en une autre représentation. Un signe n'est intéressant que s'il peut être substitué à d'autres signes pour effectuer des opérations (Condillac, 1982). Ce ne sont donc pas les représentations qui sont importantes, mais les transformations des représentations. Cette exigence a commandé le développement d'un symbolisme spécifique aux mathématiques, avec la représentation des nombres, avec l'algèbre, avec l'analyse... Elle traduit le fait que la fonction primordiale des signes et des représentations, en mathématiques, n'est ni la communication, ni « l'évocation d'objets absents », mais le traitement d'informations, c'est-à-dire la transformation intrinsèque de leurs représentations en d'autres représentations pour produire de nouvelles informations ou de nouvelles connaissances.

Ce serait cependant une erreur que de limiter cette exigence au symbolisme mathématique et donc au calcul. Cette exigence mathématique concerne aussi l'utilisation de tous les types de signes culturellement communs, comme les langues naturelles ou les représentations figurales, lesquelles donnent, en géométrie par exemple, des possibilités purement visuelles de transformation. L'originalité et la puissance de la pensée mathématique viennent de ce qu'elles jouent sur la variété des registres sémiotiques et sur les possibilités spécifiques de transformation qui sont propres à chaque système. Pour illustrer cela, nous allons prendre deux exemples : la variété sémiotique de la représentation des nombres et les représentations figurales en géométrie.

2.1 Quel rapport entre les signes et les opérations dans la représentation des nombres et/ou des grandeurs ?

Nous avons analysé plus haut les différences entre deux types de représentation des nombres (Figure 3).

Nous pouvons compléter cette comparaison en y ajoutant deux autre types de représentation : l'écriture littérale et algébrique, et les dessins schématisés d'objets (Belmas 2003) que l'on trouve dans les productions de jeunes enfants, ou dans celles d'étudiants plus âgés (Hitt 2003), pour résoudre des problèmes de dénombrement.

	Les principes d'organisation suivent les lois d'organisation perceptive	Pas de principes d'organisation pour l'emploi des marques	Des principes d'organisation déterminent **l'EMPLOI** des signes et leurs **COMBINAISONS** en unités de sens (expressions)	
TYPES DE REPRÉSENTATION DES NOMBRES	**I. Des dessins schématisant des d'objets** conservant les correspondances topologiques (voitures, roues d'un véhicule..)	**II. Des marques-unités formellement indiscernables** pouvant être agrégées en collections (traits, points ...)	**III. Des systèmes d'écriture de position** décomposant un nombre selon une puissance n et exigeant n signes	**IV. Notations algébriques** articulant deux types de symboles : - variables conventionnelles pour une désignation fonctionnelle - symboles d'opérations et de relations
OPÉRATIONS possibles de TRANSFORMATIONS des représentations	Accentuer ou effacer l'**iconicité** (ressemblance avec l'objet représenté) par ajout ou suppression de tracés	Support pour des **manipulations libres**: - comptage -regroupements ou séparation en paquets - disposition selon des configurations polygonales	**algorithmes de calcul** fondés sur le principe : un changement de position correspond à une élévation à la puissance	**Substitutions d'expressions** symboliques fondées sur - des règles syntaxiques propres à chaque opération - invariance référentielle dans les substitutions

Figure 5. Possibilités de transformations, ou de calcul en fonction du type de représentation.

Si on regarde ces quatre types de représentations sémiotiques en fonction des relations fondamentales, les types I et II peuvent être considérés comme iconiques puisqu'ils ressemblent soit aux objets représentés soit à des collections de jetons, de cailloux. Les types III et IV doivent être considérés comme symboliques bien qu'ils ne relèvent pas de la même relation fondamentale : III est déterminé par une relation d'opposition alternative (*supra* 1.4) et IV est déterminé par une relation de référence (*supra* 1.3). Mais une telle analyse ne nous conduit pas loin et elle n'apporte pas grand chose. En revanche, **tout change si on regarde ces quatre types de représentations des nombres en fonction des opérations de transformations qu'ils permettent** (ligne 2 du tableau). On voit alors qu'il faut distinguer trois classes de représentations. Elles sont séparées par un trait double entre les colonnes. Chacune de ces trois classes de représentation donne respectivement lieu à trois types d'opérations radicalement différentes : des manipulations concrètes libres, des algorithmes de calcul, des opérations discursives de désignation et de substitution *salva veritate.*

2.1.1 Représentations n'étant qu'un simple support externe pour des manipulations libres

Les opérations que l'on peut effectuer avec les représentations de type I ou II (Figure 5) sont totalement extérieures à ces représentations : on peut les compter en les pointant du doigt, les regrouper par paquets, ou les disposer sur deux rangées parallèles pour les mettre en correspondance, etc. Ce sont ces opérations que Piaget a presqu'exclusivement considérées dans son étude sur *La genèse du nombre* (1941). Dans les épreuves piagétiennes, les jetons sont le strict équivalent des marques unités. Celles-ci sont un simple support, matériel ou graphique, pour des opérations. Elles fonctionnent plus comme des pseudo objets que comme des signes. Les opérations effectuées sur ce matériel n'entraînent à proprement parler aucune transformation de ces représentations. Se pose alors la question de savoir s'il est utile de représenter les opérations faites et comment les représenter.

Les marques auxquelles on recourt généralement dépendent entièrement du choix de celui qui les utilise. Ainsi on peut jouer uniquement sur la disposition spatiale des marques unités (les séparer en paquets puis les regrouper) comme l'a fait par exemple Wittgenstein (1983, p.143), ou bien les entourer comme dans les diagrammes de Venn. On peut également utiliser des traits plus longs pour matérialiser des paquets, etc. De toute manière elles viennent se surajouter aux marques unités et elles ne sont que des **indices des opérations faites.**

Dans la pratique, les représentations de type I et II ne sont jamais employées sans que l'on recourt à un deuxième type de représentation sémiotique pour justement expliciter ou pour effectuer les opérations : soit par exemple, une explication verbale qui, évidemment, s'oublie très vite, soit l'utilisation d'une écriture numérique qui vient en quelque sorte représenter les opérations (*infra* Figure 11).

Les dessins schématisant des objets présentent des caractéristiques qui les rapprochent de ces marques unités. A la différence des marques unités, ils présentent l'inconvénient majeur de ne pas pouvoir être répétés à loisir comme les marques unités. Cela devient vite trop coûteux.

2.1.2. Représentation ou signes constitués par un principe d'organisation interne qui détermine des algorithmes de calcul

Les écritures numériques (III, Figure 5) ne peuvent pas être considérées comme un simple support pour des opérations de calcul. L'effectuation des opérations est ici entièrement subordonnée aux possibilités et aux contraintes des principes d'organisation du système numérique utilisé. Pour l'écriture des nombres, les algorithmes des différentes opérations arithmétiques dépendent à la fois du principe de position et de la base. Par exemple, les valeurs de position permettent un déplacement à droite ou à gauche, correspondant à une élévation ou à une diminution de la puissance de la base, et, pour chaque position, un dépassement des possibilités de choix offertes par la base conduit à un déplacement à gauche avec report. Ce système est évidement extensible avec l'adjonction d'un séparateur (virgule ou point), et cette extension permet de calculer avec d'autres nombres que les nombres entiers. Pour les mêmes opérations sur les mêmes nombres, les algorithmes changent si, au lieu d'une écriture décimale, on adopte une écriture fractionnaire.

2.1.3 Représentations ou signes ouvrant à l'intégration des calculs dans des opÉrations DISCURSIVES : l'algèbre.

L'écriture littérale (IV, Figure 5) crée une nouvelle rupture sémiotique avec les précédentes représentations des nombres et elle ouvre la voie à de nouvelles opérations. Cette rupture apparaît sur deux points. Tout d'abord, une différenciation entre la sémantique des signes (l'interprétation des lettres) et leur syntaxe (les règles déterminant l'ordre des opérations et leur portée sur les symboles associés dans l'expression) devient nécessaire. Avec cette différenciation, l'interprétation des lettres ne dépend plus directement des choix offerts par un système sémiotique (*supra* 1.4) mais d'une opération discursive de désignation (*supra* 1.2). Ensuite, il y a la possibilité de construire des unités syntagmatiques par l'organisation de plusieurs signes autour d'un symbole dominant (un symbole d'égalité ou d'inégalité). Cette possibilité conduit à des opérations de substitution d'expressions ou de transfert d'expressions *salva veritate*, c'est-à-dire *salva suppositione.* C'est ce qui fait l'originalité du calcul algébrique.

Pour illustrer cette rupture, nous nous limiterons à la seule émergence des lettres en rappelant comment, avec Viète et Descartes, elle s'est inscrite dans la constitution de l'écriture algébrique (Serfati, 1987).

L'émergence des lettres comme symboles algébriques a longtemps été réduite à la désignation d'une quantité inconnue, laquelle fut appelée *res* ou *cosa* pour faciliter la résolution d'un problème. On en retrouve d'ailleurs la trace dans l'explication que Lacroix donnait des signes algébriques : « ...la détermination du nombre inconnu par le moyen des nombres donnés » (Lacroix 1820, p. 1). Cependant, c'est avec **la substitution de lettres à des mots désignant différents types de grandeurs** que les lettres comme signes se sont véritablement constituées. Ainsi, pour ne combiner dans le calcul que des grandeurs homogènes, Viète a classé les grandeurs selon deux critères : le critère géométrique des genres (*planus, solidus*..) et le critère numérique d'un produit scalaire (*quadratus, cubus*..). Et pour pouvoir définir systématiquement et brièvement les règles de composition des opérations selon la nature des grandeurs, Viète a abrégé par des lettres les mots qui désignaient les différents types de grandeur. Cette substitution systématique de lettres à des mots référant déjà à des types de grandeur conduit, chez Descartes, à l'écriture d'équations et à la notation des puissances, lesquelles ont ouvert la voie à la notion de polynôme (Serfati, 1987). Et cela s'est fait en fonction d'une exigence cognitive d'économie que Descartes a formulée dans la règle XVI des *Regulae*. Il faut condenser en un seul signe tout ce qui intervient dans la résolution d'un problème, c'est-à-dire tout ce que Viète avait bien pris soin de séparer pour les calculs : les quantités connues ou inconnues (*res*) et les deux genres de grandeur, géométrique (*solidus*) ou scalaire (*cubu*s).

L'autonomie sémiotique des signes qui s'est ainsi imposée en algèbre s'est donc faite au prix d'une réduction-condensation des différents types d'objets représentés. En d'autres termes, l'autonomie sémiotique des signes en algèbre s'est faite au prix d'une neutralisation de leur fonction cognitive d'évocation (*supra* Figure 1) et, par la suite, de toutes les relations fondamentales. Seul importe ce que Husserl a appelé leur

« signifié opératoire », c'est-à-dire les règles d'emploi (règles de priorité, de substitution...). On comprend alors la question du sens des signes algébriques que Leibniz soulève dans un texte de 1684, donc peu après la constitution de l'écriture algébrique moderne : «... cette pensée là, j'ai coutume de l'appeler *aveugle* ou encore *symbolique*... ; c'est celle dont nous usons en algèbre et en arithmétique.. » (Leibniz 1972, p. 152-153).

2.2 Peut-il y avoir des transformations figurales purement visuelles ?

Il semble plus difficile d'associer des représentations figurales, que ce soit des « images », des schématisations ou des figures géométriques, à des opérations. Bresson (1987) soulignait qu'une figure représente un état et que la représentation d'une transformation exige la représentation de deux états, l'un initial et l'autre final. Ce sont les différences entre deux figures qui peuvent évoquer un mouvement, une action ou une opération. Et en ce qui concerne la géométrie, les opérations sont généralement associées à des propriétés qui ne peuvent être mobilisées qu'en fonction d'hypothèses. Par conséquent, le contenu visuel d'une figure géométrique ne remplirait que l'une des fonctions suivantes : soit une fonction d'illustration pour faciliter la compréhension d'un énoncé soit un support pour des opérations commandées par le raisonnement et non pas par le contenu visuel de la représentation[2].

Cependant, et contrairement à cette opinion commune, il est important de remarquer que **les représentations figurales suggèrent ou induisent des opérations qui sont internes au contenu visuel de la représentation.** Nous nous limiterons ici à un exemple très simple. Le dessin d'un quadrilatère concave induit plusieurs transformations visuelles possibles, comme on peut le voir ci-dessous **:**

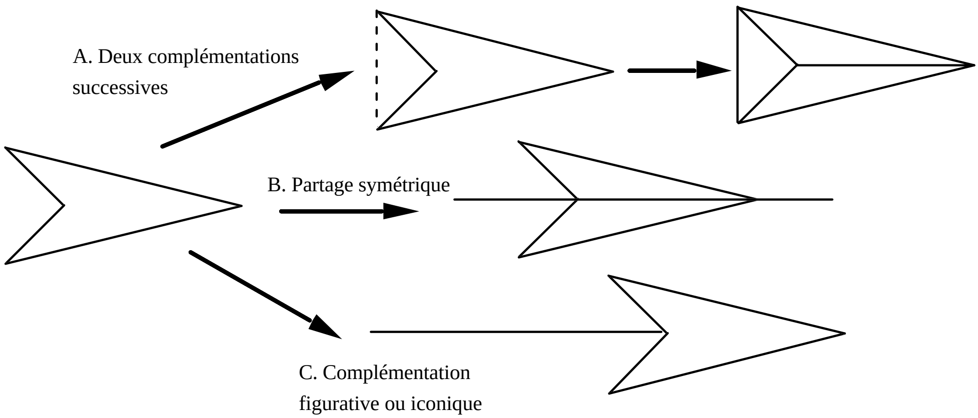


Figure 6. Trois transformations visuelles possibles d'une forme polygonale concave

[2] « Deux rôles au moins, peuvent être attribués aux figures en géométrie : d'une part, elles illustrent les situations étudiées, d'autre part elles servent de support à l'intuition au cours de la recherche en faisant apparaître sur un objet visible des relations ou des hypothèses de relations qui ne sont pas clairement évidentes dans un énoncé verbal » (Bessot 1983, p.35). La distinction entre dessin et figure reprend cette opposition entre ce qui est visuel, donc particulier, et l'ensemble des propriétés qui le sous-tendent et qui en font un dessin parmi d'autres.

La transformation A se fait par complémentation. Cette transformation résulte automatiquement des lois d'organisation perceptive qui conduisent à voir les formes concaves dans leur enveloppe convexe. Ainsi un quadrilatère concave est spontanément transformable en un assemblage de trois triangles. Cette transformation ne doit pas être confondue avec une règle essentielle pour les propriétés affines d'une figure: joindre tous les points singuliers (sommets) d'une forme, règle dont la mise en œuvre visuelle n'est jamais évidente comme on peut le vérifier avec les quadrilatères convexes, surtout s'il s'agit de faire apparaître les droites qui sont les supports des segments tracés (Duval & Godin, 2005). La transformation B résulte de la reconnaissance d'une organisation symétrique.

On remarquera que ces deux types de transformation ne dépendent ni d'une interprétation fondée sur une ressemblance partielle ou complète avec quelque chose d'autre, ni d'une interprétation en termes d'objets représentés. Le recours à des propriétés mathématiques sert seulement à les justifier.

Il n'en va pas de même avec la transformation C. Elle se fait en fonction d'une ressemblance du contenu avec un objet extérieur de l'environnement : une flèche, une lance, la forme concave du quadrilatère étant ici mise en rapport avec celle d'une partie de la forme typique d'une lance. La transformation C se fait évidemment sur la base de connaissances.

Ce sont des transformations de type A ou B qui constituent l'enrichissement intuitif des figures en géométrie. Elles sont indépendantes de toute analyse des figures en termes de propriétés . Elles dépendent d'abord de facteurs propres à la visualisation. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler ici que la géométrie fait appel à au moins deux types de représentation hétérogène et que chaque type de représentation y fonctionne indépendamment l'un de l'autre. Sinon pourquoi mobiliser simultanément deux représentations hétérogènes ?

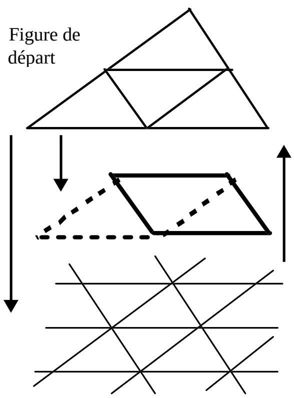
Registre de la visualisation : un jeu de réorganisations visuelles selon la forme ou selon le nombre de dimension des unités figurales reconnues	**ARTICULATION par le codage des sommets avec des lettres**	**Registre du discours :** mise en œuvre d'énoncés de propriétés et de dérivation déductive des énoncés
	*Quels éléments des énoncés permettent* *un ancrage dans la visualisation ?* *Quelle fonction remplit la figure par rapport à l'énoncé et à la résolution du problème :* *—illustration ?* *—heuristique ?* *— objet support pour des mesures ?*	Enoncé du problème : A'C' et AC sont parallèles A'B' et AB sont parallèles B'C' e BC sont parallèles Prouver que A est le milieu de B'C' ABED et BCED sont des parallélogrammes le théorème des milieux

Figure 7. Analyse sémiotique des représentations géométriques (Duval 2005, p. 29)

L'un des points décisifs de l'enseignement de la géométrie porte sur la prise en compte des facteurs qui favorisent l'entrée des élèves dans le jeu cognitif complexe de toutes les transformations des représentations figurales (Duval 1995b, 2005).

2.3 Transformations sémiotiques et démarches de pensée

Les théories du signe reposent, implicitement ou explicitement, sur l'idée que les signes remplissent d'abord une fonction de communication et qu'elles fournissent secondairement une représentation d'appui par rapport à la pensée et à ses démarches. Cette idée est d'ailleurs reprise dans beaucoup d'études sur le rôle et l'usage des signes en mathématiques (Kaput 1987). Or, c'est cette idée qu'il faut remettre en cause si l'on veut analyser et comprendre le rôle des signes en mathématiques. En mathématiques, les signes ne remplissent pas d'abord et essentiellement une fonction de communication mais une fonction de traitement. Condillac (1982) semble être le premier dans l'histoire à avoir mis l'accent sur cette fonction fondamentale des signes. Et les mathématiques sont le domaine de connaissances où l'on utilise le spectre le plus étendu et le plus hétérogène de représentations sémiotiques. Mais, comme nous avons pu le voir avec les deux exemples précédents, cela se fait toujours en fonction des opérations de transformation que chaque type de représentation rend possible. Et là, nous devons distinguer deux grands types d'opérations :

— celles qui sont externes aux éléments utilisés, les représentations étant alors des pseudo objets que l'on peut manipuler librement, et ce sont seulement le résultat d'une opération déjà faite qui peut être marqué. Ici on peut séparer et opposer les représentations et les actions (« perceptivo-gestuelles » selon l'expression de G. Vergnaud), comme cela se fait dans la théorie piagétienne.

— celles qui sont intrinsèques et spécifiques au système de représentation sémiotique, comme avec les écritures numériques de position, l'écriture algébrique et ou les représentations figurales en géométrie. Ici on ne peut plus opposer les représentations et les opérations. Car il y a des opérations sémiotiques et il y a des opérations qui ne sont possibles que sémiotiquement. Et toutes les opérations et les transformations mathématiques sont de ce type. Les démarches de pensée mobilisent toujours un type issu des multiples types possibles de représentation sémiotique. En mathématiques, elles en mobilisent plusieurs à la fois, même si un seul occupe le devant de la scène.

On peut résumer cela dans le tableau suivant :

Transformation d'une représentation en une autre du même genre par des OPÉRATIONS				
Externes aux signes pris isolément	Dépendant de principes d'organisation d'un système sémiotique			
	Opérations de reconfiguration portant sur des formes ou sur des positions		Opérations discursives dans une langue naturelle ou formelle	
	Spatialcontinu	discret	Sémantique (référence à des objets)	Syntaxique Formation d'expression et d'énoncés
Marques unités	Figures en géométrie	Système numérique de position	Ecriture algébrique (ouverte à l'intégration de quantificateurs)	

Figure 8. Les différents types de transformations sémiotiques.

Lorsque les transformations sont externes aux signes utilisés, c'est-à-dire lorsque ces derniers ne remplissent qu'une fonction de support, elles peuvent être réalisées matériellement d'une manière équivalente à une transformation symbolique. En revanche, si certaines transformations sémiotiques peuvent être reproduites matériellement, elles deviennent cependant très vite impossibles à réaliser, non seulement pour des raisons de coût mais surtout parce qu'elles ne sont pas concevables en dehors de la représentation symbolique qui les permet. On peut d'ailleurs remarquer qu'il n'y a souvent aucune congruence entre la réalisation matérielle d'une opération et sa réalisation symbolique. C'est l'une des difficultés, dans la représentation des nombres, lors du passage des marques unités au système décimal. Et c'est aussi l'une des difficultés en géométrie où l'articulation des énoncés avec les figures exige la déconstruction dimensionnelle des formes visuelles reconnues (Duval, 2005).

De la représentation iconique ou matérielle des petits nombres à leur représentation systématique dans une écriture décimale, binaire, etc., le saut sémiotique et cognitif à faire est considérable. Mais ce n'est là qu'un exemple parmi d'autres de ce qui constitue l'obstacle spécifique à l'apprentissage des mathématiques : passer d'un type de représentation sémiotique à un autre.

III. LE PASSAGE D'UN TYPE DE REPRÉSENTATIONS SÈMIOTIQUES A UN AUTRE : PROBLÈME CLÉ DE L'APPRENTISSAGE.

Le phénomène le plus important concernant les représentations est qu'il n'y a pas une seule représentation pour un objet, comme pourrait le laisser croire la définition fonctionnelle (Figure 1), mais une très grande diversité de représentations possibles pour un même objet. On connaît la célèbre photo intitulée « une et trois chaises ». Celle-ci juxtapose, dans un même montage, une chaise, une photo de cette chaise et la description verbale de cette chaise. Mais un autre montage aurait pu tout aussi bien permettre de faire une photo « une et cinq chaises » en ajoutant des schémas ou un plan de montage de la chaise à partir de morceaux livrés en kit. En réalité, il y a autant de représentations possibles d'un objet qu'il y a de systèmes différents producteurs de représentations (Duval, 2006b). Et cela vaut aussi bien pour les représentations non sémiotiques que pour les représentations sémiotiques. Le problème cognitif que pose cette diversité de représentations possibles est celui de la reconnaissance du même *something else* (ou *aliud aliquid*), c'est-à-dire du même objet, dans les contenus différents de chacune de ses multiples représentations possibles.

Ce problème est crucial pour l'apprentissage des mathématiques dont la situation épistémologique est totalement différente de celle des autres disciplines. En effet, dans les autres domaines de connaissance, les objets et les phénomènes étudiés sont accessibles perceptivement ou à l'aide d'instruments (microscope, télescope, etc..) qui augmentent soit le champ de la perception soit les capacités de détection (les sondes spatiales pour cartographier la planète Mars). On peut alors ancrer chaque type de représentation dans une expérience perceptive directe ou instrumentalement médiatisée. Cela n'est pas possible pour les mathématiques. Car les objets mathématiques ne sont pas accessibles perceptivement et, en mathématiques, l'attention se porte toujours sur tous les cas possibles et non pas seulement sur ceux qui sont réellement observés ou observables. L'accès aux objets mathématiques passe nécessairement par des représentations sémiotiques, rudimentaires ou complexes. **C'est dans cette situation épistémologique très particulière que le problème cognitif de la diversité des représentations sémiotiques devient crucial**.

Rappelons tout d'abord l'un des phénomènes les plus caractéristiques de l'activité mathématique : la mobilisation, simultanée ou successive, de plusieurs types de représentations sémiotiques y est constante. D'une part, toute activité mathématique exige que l'on puisse passer d'un type de signe et de représentation à un autre type, c'est-à-dire que l'on puisse convertir la représentation d'un objet en une autre représentation du même objet dans un autre système sémiotique, afin de se donner d'autres moyens de traitement ou de contrôle. D'autre part, la pratique de l'enseignement des mathématiques tend à juxtaposer des représentations sémiotiques différentes comme si cela devait rendre l'accès aux objets mathématiques plus facile. Il suffit d'ouvrir n'importe quel manuel à n'importe quelle page pour le constater. Et le recours à l'informatique permet de développer cette stratégie.

Or, tout cela présuppose que les élèves puissent comprendre ce passage d'un type de représentation à un autre, et surtout comprendre comment il se fait. Car, comment reconnaître que deux représentations, dont les contenus sont différents , puissent être deux représentations du même objet, si on n'a pas la possibilité d'avoir une expérience de cet objet en dehors de ces deux représentations? On peut se référer à une autre troisième représentation supposée plus familière. Mais, c'est simplement déplacer le problème. Là, se trouve le seuil de compréhension que beaucoup d'élèves ne franchissent pas.

Il ne s'agit pas, ici, de présenter les méthodes d'observation et les résultats qui mettent en évidence la relation entre les échecs pour passer d'un type de représentation à un autre et les difficultés rencontrées par les élèves en mathématiques (Duval 1996, 2006a). L'intérêt d'une approche sémiotique est plus théorique. Il est d'analyser comment fonctionne chacun des systèmes sémiotiques utilisés en mathématiques et d'expliciter le saut cognitif considérable que le passage de l'un à l'autre exige. Cela est important pour comprendre la complexité des apprentissages. Car, quels que soient les contenus et les objectifs visés, l'enseignement des mathématiques implique nécessairement l'introduction de nouveaux types de représentation et il exige que les élèves puissent passer spontanément de l'un à l'autre.

Pour illustrer les sauts existant entre des systèmes de représentation hétérogène, sauts qui sont au cœur des tâches mathématiques demandées aux élèves, nous pouvons garder l'exemple des différents types de représentation des nombres (Figure 5). Ce qui est demandé aux élèves peut alors se traduire dans les trois séries de flèches suivantes :

		Pas de principes d'organisation pour l'emploi des marques	Des principes d'organisation déterminent **l'EMPLOI** des signes et leurs **COMBINAISONS** en unités de sens (expressions)	
TYPES DE REPRÉSENTATION DES NOMBRES	**I. Des dessins schématisant des d'objets**	**II. Des marques unités formellement indiscernables**	**III. Des systèmes d'écriture de position**	**IV. Notations algèbriques**
Passages d'un type à un autre Et coordination cognitive	(1)	(2) ?	(3) (5) (5bis) ?	(4) ?

Figure 9. Ruptures sémiotiques dans la représentation des nombres et/ou des grandeurs.

3.1 Des dessins schématisant des objets matériels jusqu'à l'écriture algébrique : un ordre d'introduction progressif aveugle aux ruptures ?

Les passages représentés par les flèches (1) (2) et (3) dans le tableau ci-dessus sont souvent considérés comme un ordre, aussi bien génétique qu'historique, d'apparition. C'est un tel ordre que l'enseignement suit de la Maternelle jusqu'au début du Collège. Or, c'est évidemment le passage (3) qui retient le plus l'attention en raison du passage de l'arithmétique à l'algèbre, tandis que le passage (2), celui de marques unités manipulables comme des objets matériels à un système d'écriture de position, n'est pas considéré comme un saut sémiotique important parce qu'il s'agirait toujours des mêmes objets, les nombres entiers ! Pourtant, ce changement de représentation affecte le sens des opérations[3], car il introduit des algorithmes d'opérations qui n'ont plus rien de commun avec des manipulations libres sur des marques unités. Et il marque comme une première ligne d'arrêt, souvent masquée par une fausse familiarité avec l'usage culturel du système décimal dans l'apprentissage des mathématiques.

Voici deux exemples de difficultés classiques et récurrentes auxquelles l'apprentissage se heurte. Ceux-ci soulignent la complexité sémiotique, irréductible et trop souvent sous-estimée, de la représentation décimale des nombres.

Le premier exemple est emprunté à une enquête d'évaluation nationale sur les décimaux chez des adultes et porte sur des situations de la vie courante (Leclère, 2000) :

« Les adultes que nous avons observés ont entendu ou retenu : «multiplier par 10, c'est rajouter un zéro! »

3 Il y a deux types d'interprétation des signes mathématiques qu'il est capital de ne pas confondre. L'un est interne aux démarches mathématiques et l'autre concerne l'application d'opérations ou de modèles mathématiques à des situations de la réalité physique, économique ou quotidienne, dont il faut sélectionner des données (Duval, 2003). En ce sens, il y a une sémantique mathématique et une sémantique commune, celle correspondant à la pratique commune du langage et à la culture d'un milieu ou d'une société. Pour pouvoir justifier les mathématiques, l'enseignement tend à rabattre la sémantique mathématique sur la sémantique commune ! Cela se révèle catastrophique pour l'analyse des problèmes d'apprentissage. Car nous sommes là devant deux types de problèmes très différents.

— **10** forets à **25,99** F cela fait combien ?	— à peu près **300** balles!	*sait faire* **25** x 10 et **30** x 10 *mais ne voit pas*
	— Je vais faire l’opération	
— Combien exactement ?		25,9 proche de **26**
	— **250, 99** ! peut-être plus !	
— Combien ?		**(**et donc ne fait pas **26** x 10)

Figure 10. Exemple d’incompréhension typique du système de la représentation décimale des nombres

Avant de résulter d’une incompréhension des nombres décimaux, cet exemple montre une incompréhension du système de représentation des nombres. En effet, ce qui a été retenu par ces adultes reflète une double déficience : d’une part, le non accès au principe d’organisation de l’écriture, dont la règle retenue n’est qu’une description partielle et, d’autre part, la non articulation de l’écriture numérique avec l’énonciation orale des nombres, utilisée par ailleurs sans erreur pour estimer les ordres de grandeur des prix familiers !

Le deuxième exemple montre que le recours à un type de représentation plus familier ne constitue pas nécessairement une aide pour entrer dans un autre système. Car cela soulève deux questions. La première est celle de la congruence entre les deux types de représentations. La seconde est celle de savoir si on peut articuler, par exemple, une représentation concrète ou iconique et une représentation symbolique. Dans le cadre de l’apprentissage de la multiplication, le problème suivant a été présenté : Madame Dubois a acheté 5 tablettes de chocolat à 7 francs l’une. Combien a-t-elle dépensé ?». Les trois types de réponses ont été observées (Brissiaud 1995 ,15).

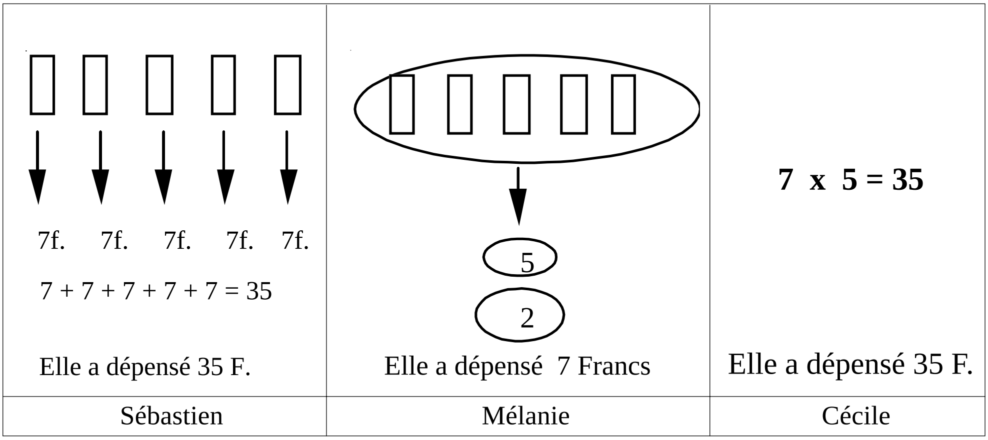


Figure 11. Quelle articulation entre deux types de représentation ?

Les deux premières productions utilisent simultanément des dessins schématisant des objets et l'écriture décimale des nombres. Or, le recours à la représentation iconique d'une quantité conduit à des productions différentes chez Sébastien et chez Mélanie.

Chez Sébastien, la représentation iconique d'une quantité est mise en correspondance avec les prix unités. Or, il est important de voir que ce type de représentation iconique impose quasi nécessairement l'opération additive ! Chez Mélanie, la représentation iconique d'une quantité induit une opération de regroupement des images schématisées de tablettes et cette opération est marquée par un encerclement (2.1.1). Cela conduit à une impasse sémiotique car aucune correspondance pertinente ne peut plus alors être établie avec l'écriture numérique des nombres.

Ces deux exemples montrent que le passage d'une représentation iconique des nombres par des marques unités à la représentation par un système d'écriture de position constitue peut-être un saut analogue à celui de l'apprentissage de la lecture. Et pour les difficultés qui apparaissent à travers ces exemples, on pourrait ici presque parler de **difficultés d'alphabétisation numérique**. En revanche, les difficultés d'entrée dans l'algèbre sont d'une toute autre nature : elles concernent la maîtrise d'un langage, à commencer par les opérations discursives de désignation (Duval, 2002). Or, chacun sait que, dans le langage, ce ne sont pas les mots qui importent mais les énoncés et, sous-jacentes aux énoncés, les opérations discursives qui en construisent le sens (Duval,1995a).

3.2 De l'écriture algébrique aux dessins et aux marques unités : quelle fonction et pour qui ?

La deuxième série de flèches (les flèches inverses (4), (5), (5bis) de la Figure 9) correspond aux productions individuelles que l'on peut observer chez des étudiants ou dans des manuels. Celle-ci marque un retour vers des représentations pseudo concrètes qui sont à la fois manipulables et qui correspondent à de petites quantités que l'on peut « voir ». Ce retour peut répondre à des besoins très différents.

Ce peut être pour des besoins de bricolage, lors d'une phase de recherche d'un problème, ou pour des besoins de vérification (Hitt, 2003). Ce peut-être aussi pour un besoin de preuve. Ainsi Wittgenstein lui-même, voulant souligner contre Russell la nécessité d'une synopsis dans un processus de preuve mathématique, n'hésite pas à dessiner:

||||||||||||||||||||||||||| ||||||||||||||||
Puis il commente :

> « Cette figure est-elle une preuve que 27 + 16 = 43 parce qu'on arrive à «27» **en comptant les traits** du côté gauche et à «16» **quand on compte ceux du côté droit**, et à «43» **quand on compte la série entière**?... A quoi tient l'étrange ici - quand on appelle la figure preuve de cette proposition ? Eh bien à la façon dont il faut reproduire ou reconnaître cette preuve : en ce qu'elle n'a pas de forme visuelle caractéristique... » (1983, p. 143).

Quel que soit le besoin ou la fonction particulière qui commande l'utilisation de ces représentations qu'on peut manipuler comme des pseudo objets, cette utilisation manifeste toujours le besoin de s'éloigner de l'abstraction sémiotique, « aveugle » selon Leibniz, pour revenir aux choses mêmes, ou du moins à ce qui aiderait à les apercevoir.

Cependant, il faut être ici extrêmement prudent dans l'interprétation des utilisations faites de ce type de représentation. Outre la polyvalence fonctionnelle de leur utilisation, on peut se demander si le recours à ce type de représentation correspond aux mêmes démarches cognitives chez un expert et chez un élève du primaire. En d'autres termes, le recours à ces représentations relève-t-il de la même compréhension chez celui qui peut à loisir passer d'un type de représentation à un autre et chez celui qui ne peut travailler qu'avec des représentations pseudo concrètes ? Cette question est celle de la coordination entre les différents types de représentations et, donc, celle de la capacité des individus à passer d'un type de représentation à un autre. Elle est marquée par la troisième série de flèches sur la figure 9 ci-dessus.

3.3 Les difficultés intrinsèques à la coordination des registres de représentation et les passages d'un type de représentation à un autre.

C'est la situation épistémologique très particulière des mathématiques qui rend le passage d'un type de représentation à un autre si difficile et si insaisissable pour les apprenants. En effet, en mathématiques comme dans les autres domaines de connaissances l'exigence épistémologique de ne jamais confondre les représentations avec les objets représentés demeure (Figure 1). Mais, comment ne pas confondre les représentations sémiotiques avec les objets représentés, lorsque ces objets ne peuvent pas être atteints en dehors de ces représentations?

Une chose en tout cas est certaine : la capacité à passer d'un type de représentation sémiotique à un autre et la reconnaissance d'un même objet représenté dans deux représentations dont les contenus sont différents sont les deux faces d'un même processus cognitif. Deux réactions interprétatives manifestent ce processus cognitif et sont d'ailleurs nécessaires pour conduire une activité mathématique ou résoudre des problèmes :

— reconnaître un même objet représenté à travers deux représentations dont les contenus sont sans rapports entre eux, parce qu'elles *dépendent de systèmes différents.* Il s'agit ici d'une **reconnaissance identifiante** qui permet, par exemple pour une procédure de dénombrement, de jouer sur au moins deux registres différents : les représentations figurales et l'établissement de suites numériques.

— reconnaître deux objets différents, à travers deux représentations, dont les contenus paraissent semblables, parce qu'elles relèvent *du même système de représentation* et que, d'une représentation à l'autre, la variation de contenu est faible. Il s'agit ici d'une **reconnaissance discriminante** qui conduit, par exemple, à la variation de l'écriture algébrique d'une fonction linéaire quand on varie la position d'une droite sur un plan organisé selon des coordonnées cartésiennes, et inversement ! Mais on pourrait également prendre l'exemple des énoncés de problèmes additifs, de mises en équations, et plus généralement tous les énoncés verbaux d'application de savoirs mathématiques à des situations non mathématiques.

Un individu ne devient capable de ces deux réactions que lorsqu'il a commencé à développer des coordinations entre les différents systèmes de représentations.

Or, il ne suffit pas que l'enseignement ait fait suivre aux élèves le parcours marqué par les flèches (1), (2), (3) dans la Figure 9 et que l'on voit les élèves effectuer des retours du type (4) ou (5), pour que de telles coordinations cognitives se soient développées et que les élèves aient acquis de réelles capacités de conversion (Duval, 2006 b). Le problème qui se pose dans l'enseignement des mathématiques n'est pas de savoir de quel type de représentations, sémiotiques ou non sémiotiques, seraient les productions spontanées des élèves, ou encore quel serait le meilleur type de représentation pour les élèves, **mais pourquoi les élèves ont tant de mal à passer d'un type de représentation sémiotique à un autre et comment leur faire acquérir cette capacité.** Car un élève incapable de ces passages se trouve très vite durablement bloqué dans sa compréhension et ses capacités de recherche et de contrôle, pour les activités mathématiques qu'on peut lui proposer.

IV. QUELLE SÉMIOTIQUE POUR LES MATHÉMATIQUES ET POUR L'ANALYSE DES PROBLÈMES QUE SOULÈVE LEUR APPRENTISSAGE ?

Il pourrait paraître provoquant d'affirmer que la sémiotique comme science des signes reste encore à fonder et que les différentes théories des signes souffrent des limitations du champ particulier des signes qu'elles ont étudiés : la logique et l'interprétation adaptative des phénomènes observés dans l'environnement avec Pierce, la linguistique avec Saussure ou encore les phénomènes de codage et de transmission d'informations avec Jakobson, etc. Ces théories ont eu au moins l'intérêt de définir cinq relations fondamentales pour analyser ce qu'on considère comme *eikon* et non comme le corps dont on voit le reflet (Platon, *Républiqu*e 509e), comme *signum* et non pas comme la *res* (Augustin, 1997), comme *representamen* et non pas simplement comme l'objet dont il tient lieu (Peirce, 1978). En réalité, chacune de ces relations, ou parfois leur composition, caractérise un type particulier de signes : image réfléchie ou image imitée, signe logique ou algébrique, signe linguistique, trace, indice ou signal. La question est de savoir si tout cela constitue un apport utile et pertinent pour l'analyse des signes en mathématiques et du rôle qu'ils jouent dans le fonctionnement de la pensée. Pour cerner cette question avec plus précision, nous allons examiner trois questions.

4.1 Comment situer la distinction signifiant-signifié par rapport à la relation signe-objet ?

La distinction signifiant-signifié est souvent présentée comme une analyse de la structure interne des signes. Un signe serait constitué de deux éléments : son aspect matériel qui le rend perceptible et son aspect immatériel qui serait sa signification. Cette distinction ne doit évidemment pas être confondue avec la fonction cognitive d'évocation d'un objet absent dont le signe tient lieu (Figure 1). Les stoïciens ont été les premiers à avoir explicitement bien séparé les deux aspects de la « signifiance » des signes: la signification et la dénotation.

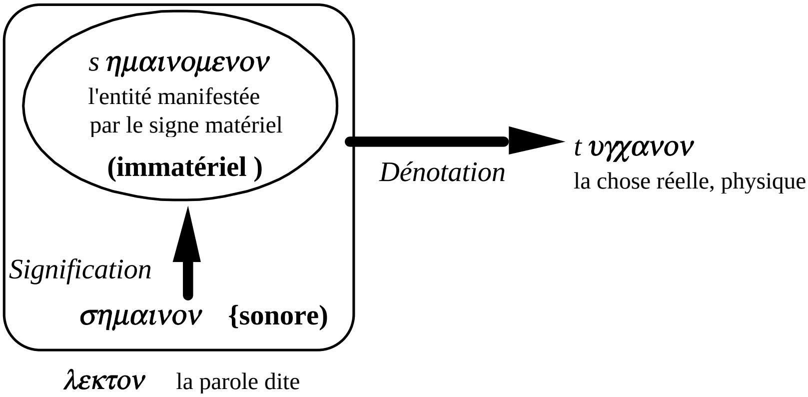


Figure 12. Schéma de l’analyse stoïcienne de la signifiance des signes

On peut tout de suite faire trois remarques :

— La distinction entre signifiant et signifié ne vaut que pour les signes linguistiques, c’est-à-dire pour les langues dont l’emploi est d’abord oral pour remplir une fonction sociale de communication. Cela veut dire que **la distinction entre signifiant et signifié ne s’applique pas aux symboles mathématiques ni d’ailleurs aux signes purement graphiques, c’est-à-dire purement visuels.** Car les signes purement graphiques, à la différence des signes linguistiques, lesquels sont d’abord oraux avant d’être codés graphiquement, ne relèvent pas d’une double articulation (*supra* I.6). Ils relèvent uniquement d’une relation de référence qui lie un caractère à un objet, constituant ainsi ce caractère en signe. Or, cette relation de référence est établie par une opération de désignation (*supra* 1.2) et elle peut d’ailleurs répondre à des fonctions très différentes selon le contexte particulier de la démarche où cette opération de désignation est effectuée. Il n’y a pas de signifiant algébrique, mais seulement des notations qui sont des signes par leur seule référence instituée à un objet (Freudenthal 2002 ; Weyl 1994).

— La distinction signifiant-signifié ne permet pas de définir la nature des signes comme Saussure (1973) l’a montré. On ne peut donc pas considérer le signifiant et le signifié comme deux constituants qui auraient chacun une identité ou une réalité par eux-mêmes. Les signifiants (phoniques) comme les signifiés lexicaux ne sont déterminés que par des différences respectivement à d’autres signifiants phoniques et à d’autres signifiés à l’intérieur d’une langue (*supra* 1.4). Ce n’est pas le signifiant qui signifie mais le signe dans sa totalité indivisible.

— **Les signes, à la différence des signaux ou des représentations non sémiotiques, relèvent toujours d’un emploi intentionnel**. Cela veut dire qu’il ne faut pas confondre les images produites intentionnellement, comme par exemple les dessins, et les images produites automatiquement par le seul usage d’un appareil ou par le jeu des lois physiques (celles par exemple de la réflexion). Cela veut dire aussi que, parmi les cinq relations fondamentales permettant de caractériser des signes, la relation d'opposition alternative (1.4) et la relation de référence (1.2) sont les relations les plus appropriées à un emploi intentionnel. Cela est particulièrement net pour la relation de référence qui s'inscrit toujours dans une opération discursive de désignation d'un objet (individu, classe, relation, etc.).

Il apparaît donc qu'on ne peut pas mettre sur le même plan la distinction signifiant-signifié, laquelle relève de la double articulation spécifique aux langues, et la relation signe-objet, laquelle relève d'une opération discursive de désignation ou de définition. Ce qu'on a présenté comme le triangle sémiotique (Eco 1990, p.31-33) est une illusion néfaste pour la compréhension de ce qu'est un signe et de la manière dont il peut évoquer ou «tenir lieu». On ne peut pas fermer le schéma illustrant les deux aspects, ou plus exactement les deux niveaux de la signifiance des signes (Figure 12) : le niveau du système sémiotique constitutif d'un type de signes (par exemple une langue naturelle ou formelle) et le niveau du discours produit ou du traitement effectué à l'aide de ce système sémiotique.

Il faut donc s'interroger sur la pertinence du recours à la distinction signifiant-signifié que l'on trouve dans beaucoup de travaux de didactique des mathématiques, dans lesquels d'ailleurs le terme « signifié » devient vite synonyme de « concept » et le terme « signifiant » synonyme de « signe » ! Cette distinction induit un glissement d'idées qui conduit à des conclusions erronées : de l'immatérialité du signifié, on glisse à son caractère non sémiotique et, par la suite, à la nécessité de doubler les représentations sémiotiques par des représentations mentales pures. Comme si la pensée était indépendante de tout *lecton* ou de tout langage !

4.2 Comment distinguer, dans la variété des signes, différents types ou catégories de signes : en fonction des relations fondamentales ou en fonction des systèmes producteurs de signes et de représentations ?

C'est certainement l'apport de Peirce que d'avoir mis cette question au centre de l'étude des signes. Et c'est lui qui a proposé la première classification systématique des signes. En fait, cette question de la classification recouvre deux problèmes qu'il est important de ne pas confondre. Il y a tout d'abord celui du corpus de signes et de représentations, c'est-à-dire le champ d'observation à partir duquel on établit la classification. Il y a ensuite le problème des critères ou des principes que l'on retient pour établir la classification.

4.2.1 Quelle diversité de signes et de représentations sert de base à l'étude des signes et des représentations?

Il faudrait ici produire un corpus d'exemples. Nous ne pouvons ici qu'évoquer la variété des signes et des représentations que l'on met sous les mots « image » et « symbole », ce qui rend l'emploi de ces termes problématique ou équivoque.

Ainsi le mot « image » peut recouvrir non seulement des dessins schématisés ou des « copies » (Figure 2) mais également des reflets dans un miroir ou encore les productions du rêve, les souvenirs visuels. C'est sur la base de ce type d'images que Platon a élaboré son analyse de la représentation. Le développement technologique est venu élargir encore cette gamme avec les photos argentiques et les photos numériques. Quoi de commun entre tous ces types d'images ?

Le mot « symbole » est employé également pour une variété considérable de signes : les notations mathématiques, les sigles, et même des fragments de l’objet représenté. Peut-on aussi l’utiliser pour caractériser les mots de la langue ? L’opposition « antithétique », soulignée par Benveniste (1974), entre l’approche de Peirce et celle de Saussure, vient de ce que le premier avait cherché à prendre en compte la diversité des signes, au risque de perdre la spécificité des langues naturelles, et que le second s’était au contraire limité à la langue en en faisant le système sémiotique par excellence, c’est-à-dire celui dont les autres pouvaient être dérivés. Mais qu’y a-t-il de commun entre les mots d’une langue et les notations mathématiques ?

Si maintenant nous regardons les mathématiques, nous sommes devant une situation encore plus complexe, car les mathématiques utilisent une gamme très étendue de signes et de représentations. Il y a, d’une part, tous les types de signes progressivement créés pour le calcul numérique et algébrique, mais il y a également les figures en géométrie, qui peuvent ressembler à des dessins schématisés, mais qui ne le sont pas, et il y a aussi tous les graphes et enfin la langue naturelle qu’il ne faut pas oublier. Car la langue naturelle continue de jouer un rôle essentiel en mathématiques: sans elle, il ne pourrait pas y avoir d’énoncés, c’est-à-dire de définitions, de théorèmes ou même d’énoncés de problème.

4.2.2 Selon quels critères distinguer et classer la variété des signes et des représentations ?

Pour classer la variété des signes, **Peirce a pris comme critères deux des cinq relations fondamentales** que nous avons distinguées plus haut : la relation de ressemblance (1.1) et la relation cause → effet (1.3.1). Avec ces deux relations, il a établi la partition trichotomique suivante :

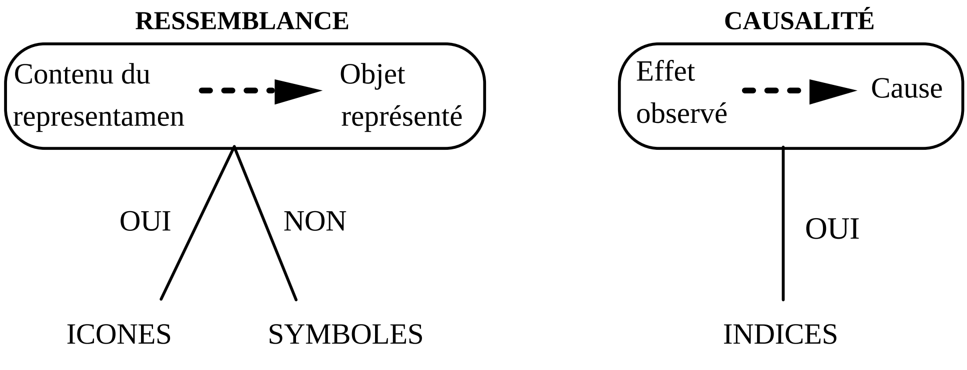


Figure 13. Partition trichotomique des signes selon Peirce

On remarquera qu’il n’y a pas de rapport entre les deux relations retenues par Peirce. En effet, dans la première relation, les signes et les représentations sont caractérisés comme étant des r*epresentamen* à partir de leur seul contenu. Dans la seconde relation, les signes et les représentations sont considérés comme étant le résultat, ou l’effet du phénomène ou de l’objet qu’ils évoquent. Ce peut être un effet direct comme la fumée. Mais ce pourrait être aussi bien un effet indirect médiatisé par un système physique (un appareil photo) ou neurophysiologique (la mémoire visuelle). De toute manière, la classification de Peirce se limite à juxtaposer ces deux relations hétérogènes.

Pour notre propos, la principale question n'est cependant pas là. Elle est de savoir si cette trichotomie est suffisamment discriminante pour être utilisée dans l'analyse des productions mathématiques. Par exemple, le recours à la notion d'icône, fondée sur la relation de ressemblance, permet-elle de distinguer les différences entre les figures schématisées qui peuvent évoluer vers des marques unités (Figure 2, 4 et 5), les figures figuratives (Figure 2) et les représentations visuelles de la géométrie (Figures 3, 6 et 7) ? Le recours à la notion de symbole, permet-il de discriminer entre les systèmes d'écriture des nombres, les symboles algébriques ou logiques, et les mots d'une langue (Figure 4, 5 et 12) ? D'une manière plus générale, cette partition trichotomique permet-elle de prendre en compte les signes qui dépendent d'un système producteur, c'est-à-dire de principes d'organisation générant des règles de formation et une syntaxe[4], et les marques qui sont des supports pour des opérations libres ou encore qui sont seulement la trace d'une opération faite ? Cette question n'a rien de général et de vague. Peut-on, par exemple, appliquer la catégorie d'indice pour désigner le recours à des lettres marquant une opération discursive de désignation et répondant à une fonction d'abréviation (Radford, 1998) ?

La tentative de la classification des signes permet donc de formuler un problème théorique fondamental pour la sémiotique : les relations fondamentales pour l'analyse des signes, peuvent-elles être des critères pertinents et discriminants pour établir une classification des signes utilisable en mathématiques ? Il semble qu'aucune théorie sémiotique cohérente ne soit susceptible d'articuler ensemble les différentes relations fondamentales qui ont été mises en évidence de Platon à Saussure. Il semble en outre, que ces relations ne permettent pas de prendre en compte ce qui est pourtant essentiel pour l'activité et la pensée mathématiques : la transformation des représentations *(supra* II).

En réalité, si l'on veut classer les signes, il faut partir d'un tout autre point de vue : celui des systèmes qui produisent les représentations. La variété des représentations vient de la diversité des systèmes producteurs de représentations, ainsi que nous l'avons déjà suggéré plus haut à propos de la photo intitulée « une et *n* chaises ». Car il y a autant de types de représentations possibles qu'il existe de systèmes différents pour les produire. Ce sont donc moins les représentations qu'il s'agit de classer que les systèmes permettant de les produire (Duval, 1999). Ces systèmes peuvent être :

— de nature physique (reflets, photographies) ou neurophysiologique (images oniriques, souvenirs visuels...) : dans ce cas, la relation est une relation de causalité et le mode de production ne dépend pas de l'intention du sujet mais des propriétés du système qui produit la représentation. En retenant la relation effet observé $\rightarrow$ cause, Peirce s'en est tenu aux seuls systèmes physiques comme systèmes producteurs de représentation.

4 Rappelons que le principe de position de l'abaque génère une règle de composition des signes qui permet de désigner systématiques et sans confusion n'importe quel nombre entier, la seule limitation étant celle du coût temporel et spatial. En ce sens le principe de position de l'abaque génère un ébauche de syntaxe.

— de nature sémiotique : dans ce cas, la relation est une relation de référence et la production est une production intentionnelle, c'est-à-dire opérant des choix dans la production des représentations qui impliquent une élaboration combinant des unités de sens. Il est surprenant que l'on ait peu ou pas du tout prêté attention au fait que les systèmes sémiotiques sont aussi des systèmes producteurs de représentation. Cela est pourtant frappant en mathématique, ne serait-ce qu'avec les systèmes de numération ! Mais, c'est aussi frappant avec les langues naturelles. L'oublier, c'est oublier toute la création littéraire et poétique.

En ce qui concerne les mathématiques, ce sont évidemment les systèmes sémiotiques qui sont intéressants, et non pas les systèmes de nature physique ou organique. On peut alors classer les systèmes sémiotiques en prenant en compte deux aspects : d'une part, selon qu'ils permettent, ou non, des traitements algorithmiques et, d'autre part, selon qu'ils sont multifonctionnels ou monofonctionnels. Nous obtenons ainsi quatre grandes classes de registres de représentation utilisées en mathématiques (Duval 2003 ; 2006a p.110). Elles permettent, en particulier, de voir que la géométrie mobilise au moins deux types totalement différents de représentations. Cette classification permet de mettre en évidence les deux grands types de transformations des représentations, c'est-à-dire les conversions et les traitements qui font la dynamique de toute activité mathématique (Figures 7 et 9) ainsi que les variables cognitives qui jouent dans l'apprentissage des mathématiques.

4.3 L'analyse des signes et des systèmes sémiotiques, peut-elle être entièrement subordonnée à la fonction remplie par les signes dans un contexte déterminé ?

Cette question touche le problème des rapports entre une analyse fonctionnelle des signes et une analyse structurale. Il faut reconnaître que, dans la plupart des travaux, hormis ceux qui prennent en compte l'apport de Saussure, l'analyse des signes est faite en leur assignant une ou plusieurs fonctions, sans que ni une analyse structurale du fonctionnement propre à chaque type de représentation ni une étude systématique de leurs fonctions possibles (Duval, 1999) n'aient réellement été faites. Ainsi, pour la langue naturelle, c'est la fonction de communication qui est immédiatement retenue. Mais, lorsqu'il s'agit des notations algébriques, on fait évidemment appel à d'autres fonctions :

— abréger, faire court, non seulement pour soulager la mémoire mais également pour appréhender le plus grand nombre de signes (et donc d'objets) dans un seul acte de pensée. En d'autres termes, il s'agit de transformer l'appréhension successive d'une séquence en une appréhension simultanée. Cette **fonction d'économie cognitive,** qui a été explicitée pour la première fois par Descartes, tient essentiellement compte des limitations des capacités de l'intuition et de la mémoire (*supra* 2.1.3). Mais, cette fonction d'économie cognitive ne peut réellement être mise en œuvre que dans une production écrite des signes, et non pas dans la parole.

— pouvoir effectuer des substitutions de signes entre eux. C'est la **fonction mathématique de traitement** que les signes doivent remplir pour permettre d'effectuer des calculs. Et la puissance de calcul dépend évidemment du système sémiotique utilisé.

Il y a bien d'autres fonctions que nous n'allons pas prendre en compte ici. Cela suffit pour soulever les deux problèmes suivants en nous limitant aux seules fonction de communication et de traitement.

4.3.1 Un même système sémiotique peut-il remplir des fonctions hétérogènes ?

Le langage, c'est-à-dire l'expression dans un langue naturelle, répond prioritairement à une fonction sociale de communication. C'est à ce titre que l'on oppose souvent les mathématiques et le langage. Cependant, la langue naturelle est aussi utilisée, par exemple en géométrie, pour effectuer des démarches mathématiques qui vont permettre de remplir une fonction de preuve : pour définir, pour énoncer des théorèmes, pour déduire. Ce changement de fonction dans l'utilisation de la langue entraîne un changement, souvent non remarqué, dans les opérations discursives qui vont être privilégiées (Duval, 1995a). La difficulté de l'utilisation de la langue naturelle en mathématiques tient au fait qu'un changement de fonction dans son utilisation entraîne un autre type de fonctionnement du discours. Et, le plus souvent, ce changement de fonction ne peut se faire qu'en passant d'une modalité d'expression orale à une modalité d'expression écrite. Car la pratique orale de la langue ne permet pas de remplir les mêmes fonctions que sa pratique écrite (Duval 2000, 2001). C'est là une source profonde, et souvent niée, d'équivoques dans l'enseignement des mathématiques entre les enseignants et leurs élèves (Duval, 2003).

On pourrait faire des remarques analogues à propos des fonctions très différentes que l'on fait remplir aux figures géométriques (Duval, 2005).

Au contraire, les systèmes que nous avons appelés « monofonctionnels », comme les systèmes de numération ou le symbolisme mathématique constitutif des langages formels, ne permettent de remplir qu'une seule fonction, celle de traitement.

4.3.2 Quel est le degré de liberté de l'interprétant dans la signification des signes ?

Ce qui est le plus souvent cité, et retenu, de la définition des signes proposée par Peirce est la relation des signes à un interprétant : « Un signe ou *representamen* est quelque chose qui tient lieu pour quelqu'un de quelque chose ». Cette relation, que nous n'avons pas retenue parmi les relations fondamentales, est, en effet, très générale et son utilisation dans l'analyse des productions requiert que l'on prenne en compte deux facteurs importants.

Le premier facteur est le type de représentation. Nous avons vu, par exemple, qu'il y avait deux grands types de représentation des nombres (Figure 4 et Figure 5). Lorsque la représentation dépend d'un système de numération, comme, par exemple, le système décimal, l'interprétant n'a aucun degré de liberté. En revanche, s'il s'agit de marques unités, l'interprétant dispose de tous les degrés de liberté qu'il souhaite puisque les représentations lui servent seulement de support externe pour des manipulations libres.

Le deuxième facteur est la situation de l'interprétant : est-il lui-même en situation de production, comme dans un travail de recherche, ou est-il en situation de réception, comme dans l'écoute ou la lecture d'une explication ? Dans la première situation, la relation de l'interprétant aux signes varie selon qu'il produit les représentations pour lui-même, c'est-à-dire pour explorer, pour contrôler, pour mieux prendre conscience ou, au contraire, selon qu'il produit les représentations pour les autres, c'est-à-dire pour communiquer. Dans la première situation, c'est la fonction que l'interprétant assigne aux signes qu'il produit lui-même qui détermine leur critère d'interprétation. Dans la seconde situation, l'interprétant n'a que le contexte global de la communication qui lui sert alors d'appui pour comprendre. C'est dans cette situation particulière qu'une approche pragmatique des signes devient plus essentielle qu'une approche sémantique ou syntaxique. Historiquement, l'intérêt de la relation à l'interprétant qui est mentionnée dans la définition de Peirce est d'avoir ouvert une approche pragmatique dans l'analyse des productions sémiotiques. Mais, une telle approche peut-elle être mise au centre d'une analyse sémiotique de l'activité et des productions mathématiques ?

CONCLUSION

L'analyse de signes se fait toujours par rapport au type d'activité pour lequel la production et la transformation de représentations sémiotiques s'avèrent nécessaires. Pour ne pas se trouver trop retreintes dans leur champ de validité et d'application, les théories du signe ont donc cherché à s'appuyer sur les formes d'activités les plus communes et, donc les plus générales : la communication, l'interprétation adaptative des phénomènes de l'environnement, ou, en psychologie, la dualité de ces modes de la représentation que sont l'image et le langage, et plus récemment les transmissions de l'information avec leur traitement numérique. Mais toutes ces théories restent en deçà de la complexité et de la variété des représentations sémiotiques qui sont mobilisables dans l'activité et les productions mathématiques.

L'originalité de l'activité mathématique par rapport à tous les autres types d'activité est double. D'une part, ce sont les mathématiques qui utilisent le spectre le plus étendu de représentations sémiotiques et elles ont même contribué à l'enrichir. Mais, elles le font toujours avec la même exigence : utiliser les possibilités de transformation que chaque type de signes ou de représentation peut offrir de manière spécifique. Et cela, pour des raisons heuristiques, pour des raisons de simplification ou d'économie, pour des besoins de contrôle, pour augmenter la puissance de traitement, etc. D'autre part, les objets de connaissances mathématiques sont indépendants des représentations utilisées pour y accéder ou pour les utiliser. Ce qui rend tel ou tel type de représentation sémiotique, localement ou momentanément nécessaire, c'est la fonction que ce type de représentation permet de remplir : fonction heuristique, fonction de contrôle, fonction de traitement. La variété des types de signes mobilisés dans les productions mathématiques reflète la variété des démarches de pensée à accomplir dans une activité mathématique. C'est pourquoi une sémiotique prenant en compte la variété des représentations sémiotiques mobilisées en mathématiques reste peut-être encore à faire ! Mais, pourquoi alors une approche sémiotique ?

Nous touchons là au paradoxe cognitif des mathématiques. Les objets de connaissances mathématiques ne sont accessibles que par le moyen de représentations sémiotiques, mais ils ne peuvent jamais être confondus avec les représentations sémiotiques qui permettent de les atteindre et de les utiliser. Comment alors reconnaître les mêmes objets dans la variété de leurs représentations possibles ? C'est évidemment ce paradoxe qui est au cœur des difficultés que les élèves rencontrent dans l'apprentissage des mathématiques, paradoxe qui n'existe pas dans les autres domaines de connaissance.

En outre, il faut rappeler que l'enseignement des mathématiques ne se limite pas à introduire des concepts selon une progression planifiée dans un curriculum. Il introduit aussi de nouveaux systèmes de représentations sémiotiques, en même temps qu'il introduit une autre mode de fonctionnement cognitif dans les systèmes culturellement communs des images et du langage. L'analyse des différentes tâches impliquées dans les activités proposées aux élèves et dans la résolution de problèmes ne peut pas faire l'impasse sur la variété des représentations sémiotiques à mobiliser. Le paradoxe cognitif des mathématiques ne peut être résolu par les élèves que par une coordination de tous les registres de représentation mobilisables dans l'activité mathématique. Les passages d'un registre à un autre, qui sont ce qu'il y a de plus difficile, ne deviennent possibles pour les élèves qu'avec le développement d'une telle coordination.

Ne prendre en compte dans l'enseignement ni ce paradoxe cognitif ni la complexité cognitive d'une mobilisation simultanée ou successive de types de signes hétérogènes, qui est pourtant inhérente à l'activité mathématique, c'est prendre le risque d'égarer la plupart des élèves dans ce qu'on pourrait appeler, en prolongement des réflexions de Leibniz sur «ce qui embarrasse notre raison», le troisième « labyrinthe », celui des représentations sémiotiques.

REFERENCE LIST

Augustin, (saint) (1997). *De Doctrina Christiana.* Paris: Institut d'Etudes Augustiniennes.

Belmas, P. (2003). Apprentissage de la proportionnalité et symbolisations chez des élèves en échec scolaire de SEGPA. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *8*, 167-189.

Benveniste, E. (1974). Sémiologie de la langue. In *Problèmes de linguistique générale*, *2*, (pp. 43-66). Paris: Gallimard.

Bessot, D. (1983). Problèmes de représentation de l'espace. In Enseignement de la Géométrie, *Bulletin Inter-IREM* , *23*, 33-40.

Boysson-Barides, B. (1999). *Comment la parole vient aux enfants*. Paris : Odile Jacob.

Bresson, F. (1987). Les fonctions de représentation et de communication. In J. Piaget, Mounoud & Bronckart (Eds.), *Psychologie* (pp. 933-982). Paris: Encyclopédie de la Pléiade.

Brissiaud, R. (1995). *J'apprends les maths*, *CE2*. Paris : Retz.

Condillac (1982 (1798)). *La langue des Calculs.* Lille: Presses universitaires de Lille.

Deledicq, A. (1979). *Mathématiques 4ème*. Paris: Cédic.

Ducrot, O. (1972). *Dire et ne pas dire*. Paris: Hermann.

Duval, R. (1995a). *Sémiosis et Pensée humaine*. Berne: Peter Lang

Duval, R. (1995b) Geometrical Pictures : kinds of representation and specific processing. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1996) «Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 349-382.

Duval, R. (1998). Signe et objet : trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *6*, 139-163.

Duval, R. (Ed.) (1999). *Conversion et articulation des représentations analogiques*. Lille: I.U.F.M. Nord Pas-de-Calais, D.R.E.D.

Duval, R. (2000). Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *20*(2), 135-170.

Duval, R. (2001). Pourquoi faire écrire des textes de démonstration. In E.Barbin, R.Duval, I. Giorgiutti, J.Houdebine, C. Laborde (Eds.), *Produire et lire des textes de démonstration* (pp.183-205). Paris : Ellipses.

Duval, R. (2002). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. In Ph. Drouhard & M. Maurel (Eds.) *Actes des Séminaires SFIDA 13-16*, Volume IV 1901-2001 (pp.67-94) Nice: IREM.

Duval, R. (2003). Décrire, visualiser, raisonner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *8*, 13-62.

Duval, R. (2005). Les conditions didactiques de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. ? *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *10*, 5-53.

Duval, R. (2006a). The cognitive Analysis of Problems of comprehension in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131 .

Duval R. (2006b). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXII ème Colloque COPIRELEM*, 67-89.

Duval, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N, 76*, 7-27.

Eco, U. (1990 (1973)). *Le signe* (tr.J-M. Klinkenberg). Paris: Labor.

Frege G. (1971). *Ecrits logiques et philosophiques*. Paris : Seuil.

Freudenthal, H. (2002). Notation Mathématique. *Encyclopedia Universalis* (pp. 338-344). Paris

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *8*, 255-271.

Kaput, J. (1987). Towards a Theory of Symbol Use in Mathematics. In C Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 159-195). Hillsdale, New jersey/ London : Lawrence Erlbaum.

Lacroix, S.F. (1820). *Eléments d'Algèbre.* Paris : Mme Veuve Courcier.

Leclère, J.P. (2000). *Faire des mathématiques à un public en situation d'illettrisme : le contraire d'une utopie.* Thèse Université Lille 1.

Leibniz, G.W. (1972). *Oeuvres* I (Editées par L. Prenant). Paris: Aubier Montaigne.

Martinet, A (1966). *Eléments de linguistique générale*. Paris : Armand Colin.

Piaget, J. (1968a). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Neuchatel : Delachaux et Niestlé.

Piaget , J. (1968b). *La formation du symbole chez l'enfant.* Neuchatel : Delachaux et Niestlé.

Peirce, C.S. (1978). *Ecrits sur le signe* (tr. G. Deledalle) Paris: Seuil.

Radford L. (1998). On signs and Representations. A cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *35*(1), 277-302.

Russell, B. (1969). *Signification et Vérité* (tr.Ph ;Delvaux). Paris : Flammarion.

Saussure, F. de (1973 (1915)). *Cours de linguistique générale*. Paris : Payot.

Serfati, M. (1987). La question de la chose. Mathématiques et Ecriture. *Actes du colloque Inter IREM d'Histoire et d'Epistémologie des Mathématiques*, (pp. 309-334). Strasbourg: IREM.

Quine, W.V. (1977). *Relativité de l'ontologie et autres essais* (tr. Largeault). Paris: Aubier.

Weyl, H. (1994 (1953)) Sur le symbolisme des mathématiques et de la physique mathématique in *L e continu et autres écrits* (tr. Largeaut), (pp. 248-264). Paris: Vrin.

Wittgenstein, L (1983). *Remarques sur les fondements des mathématiques* (tr. M-A. Lescouret). Paris : Gallimard.

Raymond Duval
Université du Littoral Côte d'Opale(ULCO)
France

E-mail: ray@wanadoo.fr