Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta

Juan D. Godino [1]
Vicenç Font [2]
Miguel R. Wilhelmi [3]

RESUMEN

En este trabajo aplicamos algunas nociones del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática al análisis de una lección sobre la suma y la resta de un libro de 5º grado de educación primaria del estado español. La finalidad es doble: (1) ilustrar la técnica de análisis de textos matemáticos propuesta por el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática y (2) identificar criterios de idoneidad de unidades didácticas para el estudio de las estructuras aditivas en educación primaria. Los resultados obtenidos pueden ser de utilidad para la formación de profesores de matemáticas.

• **PALABRAS CLAVE:** Idoneidad didáctica, conflictos semióticos, análisis textos matemáticos, formación profesores.

ABSTRACT

In this paper, we apply some theoretical notions of the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction to analyse a lesson on addition and subtraction taken from a Spanish textbook directed to the fifth grade in primary education. Our aims are: (1) to illustrate a technique for analysing mathematics textbooks based on the onto-semiotic approach, and (2) to identify suitability criteria for developing didactical units to study the additive structures in primary education. The results obtained might be useful in the training of prospective mathematics teachers.

• **KEY WORDS:** Didactical aptitude, semiotic conflicts, analysis of mathematical texts, teachers training.

RESUMO

Neste trabalho aplicamos algumas noções do enfoque ontosemiótico da cognição e instrução matemática al análise de uma lição sobre a soma e a divisão de um livro do

---

Fecha de recepción: Enero de 2006/ Fecha de aceptación: Mayo de 2006

1 Universidad de Granada.
2 Universidad de Barcelona.
3 Universidad Pública de Navarra.

ensino fundamental do estado espanhol. A finalidade é dupla: (1) ilustrar a técnica de análise de textos matemáticos proposta pelo enfoque ontosemiótico da cognição matemática e (2) identificar critérios de idoneidade de unidades didáticas para o estudo das estruturas aditivas na educação fundamental. Os resultados obtidos podem ser de utilidade para a formação de professores de matemáticas.

- **PALAVRAS CHAVE:** Idoneidade didática, conflitos semióticos, análise textos matemáticos, formação professores.

RÉSUMÉ

Dans cet article nous appliquons quelques notions théoriques de l'approche onto-sémiotique à la cognition et à l'instruction mathématique pour analyser une leçon sur l'addition et la soustraction tirée d'un manuel scolaire espagnol de la cinquième année. Nos objectifs sont : (1) d'illustrer une technique pour analyser des textes scolaires basée sur l'approche onto-sémiotique; et (2) d'identifier des critères souhaitables pour le développement d'unités didactiques pour l'étude des structures additives dans l'éducation primaire. Les résultats obtenus pourraient être utiles dans la formation des futurs enseignants en mathématiques.

- **MOTS CLÉS**: Aptitude didactique, conflits sémiotiques, analyse textes mathématiques, formation des enseignants.

1. Introducción

Como afirman Hiebert, Morris y Glass (2003), un problema persistente en educación matemática es cómo diseñar programas de formación que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores. La ausencia de efectos significativos de los programas de formación de profesores en dicha práctica se puede explicar, en parte, "por la falta de un conocimiento base ampliamente compartido sobre la enseñanza y la formación de profesores" (p. 201). El saber didáctico que progresivamente va produciendo la investigación en educación matemática queda reflejado en diversas fuentes dispersas y heterogéneas (revistas, monografías de investigación, etc.), pero de manera más accesible a los profesores se refleja en los libros de texto escolares. Los libros de texto escolares constituyen la fuente inmediata donde se acumula la experiencia práctica de los profesores y, en cierta medida, los resultados de la investigación. En consecuencia, el análisis crítico de los textos escolares, la evaluación de su pertinencia, idoneidad, adecuación, etc. debe ser un componente importante en los programas de formación de profesores de matemáticas.

> La preparación de programas de formación puede ser más efectiva centrándola en ayudar a los estudiantes a que adquieran las herramientas que necesitarán para aprender a enseñar, en lugar de competencias acabadas sobre una enseñanza efectiva. (Hiebert, Morris y Glass, 2003, p. 202)

Pensamos que entre estas herramientas

deben figurar los criterios para analizar la propia práctica docente y las lecciones de los textos escolares como fuente próxima para el diseño de unidades didácticas.

Dado que el uso de las lecciones propuestas en los libros de texto (o en un formato virtual multimedia) es una decisión importante, ya que en gran medida condiciona el proceso de estudio del tema, los profesores deben tener conocimientos básicos que les permitan evaluar las características de las lecciones para seleccionar (o elaborar) las más adecuadas y adaptarlas al nivel educativo correspondiente. Consideramos importante introducir en la formación (inicial y continua) de profesores de matemáticas criterios para valorar la idoneidad de los procesos de estudio matemático, tanto si son basados en el uso de libros de texto, como si se trata de procesos apoyados en el uso de materiales y documentos de trabajo elaborados por el propio profesor.

En este artículo vamos a utilizar algunas herramientas del "enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática" (EOS) desarrollado por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005; Font y Ramos, 2005; Godino, Contreras y Font, en prensa; etc.) para valorar la idoneidad de un texto matemático escolar. En este marco teórico se postula que la idoneidad global de un proceso de enseñanza-aprendizaje se debe valorar teniendo en cuenta los cinco criterios siguientes (Godino, Contreras y Font, en prensa):

- *Idoneidad epistémica* se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia[4]. Por ejemplo, la enseñanza de la adición en la educación primaria actual puede limitarse al aprendizaje de rutinas y ejercicios de aplicación de algoritmos (baja idoneidad), o tener en cuenta los diferentes tipos de situaciones aditivas e incluir la justificación de los algoritmos (alta idoneidad).

- *Idoneidad cognitiva* expresa el grado de proximidad de los significados implementados respecto de aquéllos que son personales iniciales de los estudiantes o, de manera equivalente, la medida en que el "material de aprendizaje" esté en la *zona de desarrollo potencial* (Vygotsky, 1934) de los alumnos y alumnas.

  Un proceso de enseñanza-aprendizaje con un alto grado de idoneidad cognitiva sería, en el estudio las operaciones aritméticas con números de tres o más cifras, que el profesor realizara una evaluación inicial para saber si los alumnos dominan los números de uno y dos cifras y, en caso de no ser así, comenzara el proceso de instrucción trabajando dichos números.

- *Idoneidad semiótica*. Un *conflicto semiótico* es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos

[4] Chevallard (1991) considera que todo proceso de enseñanza-aprendizaje comporta la transposición del saber: Saber sabio → Saber a enseñar → Saber enseñado. La noción de idoneidad epistémica puede ser reinterpretada en términos transpositivos de la siguiente forma: grado de representatividad del saber enseñado respecto del saber a enseñar.

sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa. Un proceso de enseñanza-aprendizaje es idóneo desde el punto de vista semiótico si las *configuraciones* y *trayectorias didácticas* (Godino, Contreras y Font, en prensa) permiten, por una parte, resolver conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar *a priori*), y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción (mediante la negociación de significados). Por ejemplo, un proceso de estudio realizado de acuerdo con una secuencia de situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización (Brousseau, 1997) tiene potencialmente mayor idoneidad semiótica que un proceso magistral que no tenga en cuenta las dificultades de los estudiantes.

- *Idoneidad mediacional,* grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Si el profesor y los alumnos tuvieran a su disposición medios informáticos pertinentes al estudio del tema en cuestión (Cabri-géomètre, p.e., para la geometría plana), el proceso de estudio que se apoye en estos recursos tendría mayor idoneidad mediacional que otro tradicional basado exclusivamente en la pizarra, lápiz y papel. Asimismo, un ejemplo de un proceso de enseñanza-aprendizaje con un alto grado de idoneidad mediacional con relación a los medios temporales sería una clase magistral, donde el profesor reproduce de manera íntegra y sin interacción con los estudiantes el significado pretendido.

- *Idoneidad emocional,* grado de implicación (interés, motivación, …) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como de aquéllos que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa. Por ejemplo, tendrán idoneidad emocional alta los procesos basados en el uso de situaciones-problemas que sean de interés para los estudiantes.

Como se puede deducir de los ejemplos propuestos, la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza-aprendizaje. Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto del proyecto educativo global (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005).

En la siguiente sección presentamos brevemente algunos de los constructos del EOS que nos permitirán fundamentar los criterios de análisis y valoración de una lección de un libro de texto. Estos criterios serán aplicados al análisis de una lección sobre la suma y la resta de un libro de texto para 5º grado de educación primaria (Ferrero y cols., 1999).

2. Herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico

Para poder valorar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción realmente implementado, o bien de un proceso de instrucción planificado en un libro de texto, es necesario establecer un “significado de referencia” que sirva de comparación. Este significado de referencia se interpreta en el EOS en términos de sistemas de prácticas (operativas y discursivas) compartidas en el seno de una institución para la resolución de una cierta clase de situaciones-problemas.

Para la realización y evaluación de cualquier práctica es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los siguientes elementos: lenguaje, situaciones, reglas (conceptos, proposiciones, procedimientos) y argumentos. A este conglomerado de objetos se le llama *configuración*. Estas configuraciones pueden ser cognitivas (conglomerado de objetos personales) o epistémicas (conglomerado de objetos institucionales) según que se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional. A su vez, estas configuraciones son emergentes de las prácticas realizadas para resolver un campo de problemas.

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan (Wittgenstein, 1953) pueden ser considerados desde las siguientes dimensiones duales: personal-institucional, elemental-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo y extensivo-intensivo (Godino, 2002).

- *Personal-institucional*: si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como "objetos personales" (Godino y Batanero, 1994).

- *Ostensivo-no ostensivo.*Los objetos institucionales y personales se pueden considerar como objetos no-ostensivos. Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, …). Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan. El motivo es que un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica).

- *Extensivo-intensivo*: un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo *concreto*, la función $y = 2x + 1$) y una clase más general o *abstracta* (p.e., la familia de funciones $y = mx + n$).

- *Elemental-sistémico*: en algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas,…) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades elementales. Estos mismos objetos, en el primer curso, tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

- *Expresión-contenido*: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica.

La actividad matemática y los procesos

de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestos en relación unos con otros. La distinción entre expresión y contenido nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un *antecedente* (expresión, significante) y un *consecuente* (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios y secundarios, dando lugar a distintas "versiones" de dichos objetos. En Godino, Batanero y Roa (2005) se describen los seis tipos de entidades primarias y los cinco tipos de dualidades cognitivas mediante ejemplos relativos a una investigación en el campo del razonamiento combinatorio.

En la Figura 1 se representan las diferentes nociones teóricas que se han descrito sucintamente. En el EOS la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos, que están relacionados entre sí formando configuraciones. Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales.

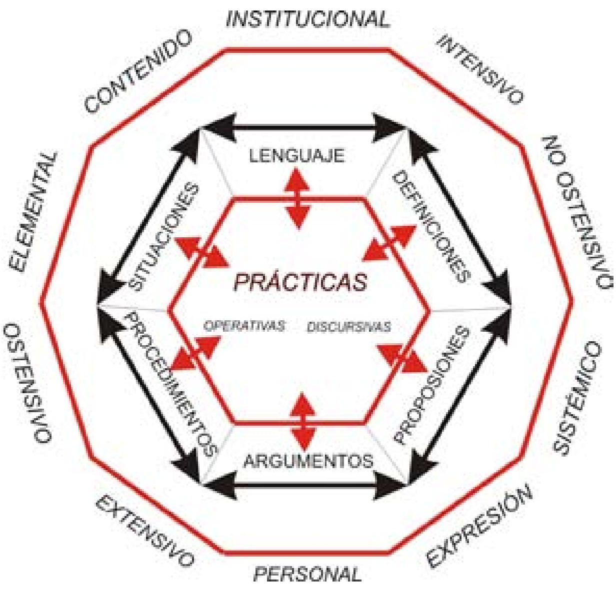

Figura 1. *Herramientas teóricas del EOS*

Por último, dentro del "enfoque ontosemiótico" se están introduciendo nuevas herramientas teóricas que permiten abordar el estudio de los fenómenos de instrucción matemática. Godino, Contreras y Font (en prensa) proponen, como unidad primaria de análisis didáctico, la *configuración didáctica*, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de una tarea matemática y usando unos recursos materiales específicos. El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas, cada una de las cuales incorpora una determinada configuración epistémica.

3. Configuraciones epistémicas asociadas con las situaciones aditivas. Reconstrucción del significado de referencia

Para poder valorar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción realmente implementado (*significado implementado*) o bien de un proceso de instrucción planificado en un libro de texto (*significado pretendido*) es necesario establecer el significado de referencia que sirva de comparación. En esta sección describimos de manera sintética los principales elementos del significado de referencia para las estructuras aditivas, agrupando dichos elementos en los seis tipos de entidades que propone el EOS: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, propiedades y argumentos y los organizaremos en configuraciones epistémicas.

El primer tipo de configuración epistémica que consideraremos son las "formales". En dichas configuraciones se usa el método axiomático, es decir, se eligen ciertos enunciados de la teoría como axiomas y se exige que todos los demás sean probados a partir de ellos.

3.1 Configuraciones formales

Las entidades matemáticas que se ponen en juego en las situaciones aditivas contextualizadas son analizadas de manera formal o estructural en el marco interno de las matemáticas. Para ello, los números dejan de ser considerados como medios de expresión de cantidades de magnitudes (números de personas o cosas, papel que cumplen en una situación, etc.) y son interpretados bien como elementos de una estructura caracterizada según la teoría de conjuntos, bien según los axiomas de Peano. En este contexto de formalización matemática se plantean preguntas tales como:

- ¿Cómo se debería definir la adición, a partir de los axiomas de Peano?
- ¿Cómo se debería definir la adición, cuando los números naturales son definidos como los cardinales de los conjuntos finitos?
- ¿Qué tipo de estructura algebraica tiene el conjunto N de los números naturales dotado de la ley de composición interna de adición?
- ¿Es la sustracción una ley de composición interna? ¿Qué propiedades cumple?

La respuesta a estas preguntas requiere de la elaboración de recursos lingüísticos específicos, técnicas operatorias (recursión, operaciones conjuntistas), conceptos (definiciones conjuntistas de adición y sustracción; definiciones recursivas; definición algebraica de sustracción), propiedades (estructura de semigrupo de **N**) y argumentaciones (deductivas), en definitiva una configuración epistémica con rasgos o características específicas, adaptadas a la generalidad y rigor del trabajo matemático. Estos tipos de configuraciones formales no son las que nos pueden resultar útiles para determinar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción planificado para una institución escolar de enseñanza primaria. Para este tipo de institución necesitamos una configuración, que llamaremos *intuitiva* (o contextualizada), que presuponga una cierta concepción empírica de las matemáticas. Es decir, una concepción que considere que las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones y formalizaciones de la experiencia; una concepción de las matemáticas que suponga que, al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre el comportamiento de los objetos materiales.

3.2. Configuración empírica

Las operaciones aritméticas de la adición y de la sustracción se construyen inicialmente como medio de evitar los recuentos en situaciones que incluyen distintas colecciones parcialmente cuantificadas. Las situaciones concretas o contextualizadas ponen en juego un proceso de modelización que produce, como etapa intermedia, una *situación aditiva formal*; esto es, una situación en la que se requiere realizar una suma o una resta, cuyo resultado debe ser interpretado según el contexto inicial. El aprendizaje de la suma y la resta implica, por tanto, el dominio de las situaciones formales y de los algoritmos de sumar y restar.

La resolución de los problemas aditivos pone en funcionamiento diversos recursos operatorios, lingüísticos, conceptuales, proposicionales y argumentativos que deben ser dominados progresivamente para lograr competencia en dicha resolución. La Figura 2 resume los principales elementos o componentes de la configuración epistémica empírica formada por el sistema de objetos y relaciones implicadas en la solución de los problemas aditivos[5] en el nivel de educación primaria (*significado institucional de referencia*). Por razones de espacio, los componentes de la configuración se muestran de manera tabular. Sin embargo, hay que tener en cuenta que dichos elementos están relacionados entre sí[6].

El lenguaje (verbal, gráfico, simbólico) describe las situaciones-problemas; representa a las entidades conceptuales, proposicionales (adición, sustracción, sumandos, commutativa, asociativa, …) y procedimentales (algoritmos). Las notaciones, disposiciones tabulares, diagramas, etc., sirven de herramientas para la realización de los algoritmos y la elaboración de argumentos justificativos. Las definiciones y proposiciones relacionan los conceptos entre sí y hacen posible el desarrollo de algoritmos de cálculo eficaces. Los argumentos justifican las propiedades y permiten la realización de las operaciones.

---

5 La clasificación de los problemas aditivos contextualizados ha sido objeto de numerosas investigaciones, ya que cada tipo comporta subconfiguraciones puntuales específicas que deben ser tenidas en cuenta en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Verschaffel y De Corte (1996) presentan una síntesis de estas investigaciones y mencionan los tres tipos básicos de problemas aditivos: cambio, combinación y comparación.

6 En la Figura 7 mostramos otro ejemplo de configuración puntual correspondiente a una página del libro que analizamos en las secciones 4 y 5 donde explicitamos dichas relaciones.

LENGUAJE

Verbal
- Juntar, añadir, sacar, suma, resta, "cuánto falta", más menos, adición, sustracción, sustraendo, minuendo, diferencia, paréntesis, operación, propiedad conmutativa, propiedad asociativa, etc.

Gráfico
- Dibujos en los que se presentan situaciones contextualizadas de adición y sustracción (se representan con objetos los cardinales de los dos conjuntos y en algunos casos también el cardinal del resultado)
- En la recta numérica se representan sumas y restas
- Etc.

Simbólico: $+$, $-$, $24 + 30$, $45 - 23$, $a + b$, $a - b$, $a - b = c$, "(" , ")" …

SITUACIONES

- Problemas contextualizados en los que: se añade, hay que seguir contando, se saca, se cuenta hacia atrás , se pide "cuánto falta" , se compara, etc.
- Problemas descontextualizados de sumas y resta

CONCEPTOS

Previos
- Sistema de numeración decimal
- Suma y resta

Emergentes
- Adición; Sustracción; Sumandos
- Sustraendo; Minuendo; Diferencia
- Sumas y restas equivalentes

PROCEDIMIENTOS

- Descontextualización del enunciado del problema;
- Contextualización de enunciados descontextualizados
- Aplicar los algoritmos de la suma y de la resta
- Comprobación de los resultados de una resta
- Cálculo mental de sumas y restas
- Utilización de las propiedades conmutativa y asociativa para realizar las operaciones más fácilmente
- Cálculo de sumas y resta con calculadora.
- Resolución de problemas de sumas y restas
- Etc.

PROPIEDADES

- La suma es una operación interna (la resta no)
- Elemento neutro
- Conmutativa (suma)
- Asociativa (suma)
- El total de una suma siempre es mayor que los sumandos (si estos son diferentes de cero)
- $(a + c) - (b + c) = a - b$
- La diferencia siempre es menor que el minuendo (si el sustraendo es diferente de cero)
- Relación entre diferencia, sustraendo y minuendo: $S - M = D$; $S = D + M$; $S - D = M$

ARGUMENTOS

- Comprobación de las propiedades en casos particulares (casi siempre extra matemáticos)
- Justificación de las propiedades, utilizando elementos genéricos
- Justificación de los algoritmos a partir de las características del Sistema de Numeración Decimal

Figura 2. Configuración epistémica "empírica" de la adición y de la sustracción

Se trata de una configuración epistémica en la que los conceptos y las propiedades que se introducen se intentan justificar por su acuerdo con una realidad extra matemática. Este intento topa con una dificultad que se convierte en el origen de importantes conflictos semióticos, que no es otra que el carácter convencional de algunas reglas matemáticas. No pretendemos entrar aquí en la discusión de si todas las reglas en matemáticas son convencionales, puesto que no se pueden justificar por su acuerdo con la experiencia; nos limitamos a señalar que, incluso en el supuesto de que la mayoría de las reglas matemáticas se pudieran justificar por su acuerdo con situaciones extra matemáticas, hay ciertas reglas, como por ejemplo, la prioridad de las operaciones, que indiscutiblemente son convencionales y que, por tanto, difícilmente se pueden justificar con base en su acuerdo con situaciones extra matemáticas.

4. Análisis global de la lección

El análisis ontosemiótico de una lección debe abordarse primero desde una perspectiva global que identifique su objetivo y estructura en configuraciones didácticas, para pasar después, en un segundo nivel, a un estudio detallado de cada una de ellas (en este trabajo nos centraremos, sobre todo, en las configuraciones epistémicas asociadas y en los conflictos semióticos potenciales). Este segundo análisis lo haremos en la sección 5, centrándonos sobre todo en las funciones semióticas (dualidad *expresión-contenido*) que relacionan objetos que pueden ser extensivos o intensivos (dualidad *extensivo-intensivo*).

A continuación comenzamos el análisis global de la lección de Ferrero y cols. (1999)[7]. La lección sobre la suma y la resta incluida en este libro de texto escolar se interpreta en el EOS como el significado pretendido en clases de 5º grado de educación primaria (alumnos españoles de 10 años de edad).

El estudio comienza recordando el uso concreto de la suma y la resta:

> Sumamos cuando reunimos o juntamos varias cantidades en una sola. Restamos cuando separamos, quitamos una parte de otra o hallamos la diferencia entre dos cantidades. (p. 18)

Sigue con la presentación de una situación introductoria general donde se presenta una escena de clase con grupos de niños jugando diversos juegos mediante los cuales consiguen puntos. Se plantean problemas cuya solución requiere realizar una suma o una resta. El tipo de situación-problema que se presenta al inicio de la unidad tiene un objetivo que se puede describir del siguiente modo: *¿Cómo discriminar las situaciones de suma y resta y cómo resolverlas?* Esta pregunta general que guía el desarrollo de la lección se descompone en sub-preguntas que son abordadas en las distintas secciones en que se estructura. La Figura 3 muestra la estructura global de la lección, centrando la atención en la secuencia de configuraciones ligadas a los tipos de problemas planteados (figuras hexagonales); una de dichas configuraciones (config. 1) será analizada en la sección 5.1., teniendo en cuenta los instrumentos teóricos introducidos por el EOS.

---

7 El libro de texto de Ferrero y cols. (1999) es un ejemplar prototípico de los que en la actualidad se utilizan en el sistema educativo español (actualizados en euros como unidad monetaria) y, por lo tanto, el estudio que realizamos no sólo representa un modelo para el análisis de otros libros de texto, sino que determina una "pauta genérica" para la valoración de libros de texto del mismo grado y contexto.

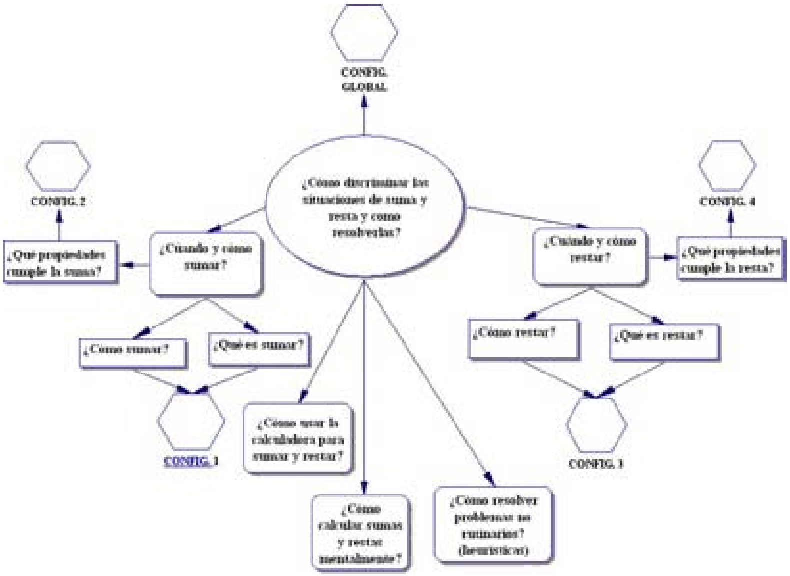

Figura 3. Estructura global de la lección

Las seis primeras secciones (sobre las que centraremos el análisis ontosemiótico) tienen una estructura similar:

- -Planteamiento de una situación-problema.
- -Un apartado titulado “Observa”, donde se describe la solución del problema, se presentan las definiciones y se explican las técnicas.
- -Una colección de 4 o 5 ejercicios y aplicaciones.

Las seis primeras secciones se titulan: (1) *La suma. Significados*, (2) *Las propiedades de la suma*, (3) *La resta. Significados*, (4) *Relaciones entre los términos de la resta*, (5) *Restas equivalentes* y (6) *Sumas y restas combinadas. Uso del paréntesis*. En ellas se desarrolla el tema y los algoritmos que aparecen son con lápiz y papel. En la sección siguiente, cuyo título es (7) *Conoce tu calculadora*, se introducen dos técnicas alternativas a los algoritmos con lápiz y papel: el cálculo estimado y el cálculo con calculadora. En la siguiente sección, cuyo título es (8) *Recuerda*, los autores presentan a los alumnos aquello que es esencial recordar de lo que se ha estudiado anteriormente. A continuación se propone una sección de autoevaluación, cuyo título es (9*) ¿Te lo has aprendido?* En la sección siguiente, cuyo título es (10) *Cálculo mental*, se introduce otra técnica alternativa a los algoritmos con lápiz y papel: el cálculo mental exacto. A continuación, en la sección titulada (11) *Arco iris* se propone un problema cuyo contexto es “la compra de comida para el hogar” en la que también se introducen los valores de igualdad entre el hombre y la mujer a la hora de participar en las tareas del cuidado de la casa. Como sección final se propone una sección de consolidación de conocimientos, cuyo título es (12) *Resolución de problemas* en la que además se introduce la estrategia heurística “descomposición del problema en partes”.

5. Análisis ontosemiótico de configuraciones parciales

En esta sección vamos a realizar un análisis detallado de la primera configuración didáctica dedicada al estudio de la suma.

5.1. Sección 1: La suma. Significados

Los autores de la lección han organizado un proceso de estudio puntual para explicar los significados de la adición, incluyendo los siguientes apartados:

A.Un problema introductorio (Figura 4).

Figura 4. Problema introductorio

B. La explicación de la solución del problema que sirve como sistematización de los significados de la suma y del algoritmo de sumar en columna (Figura 5).

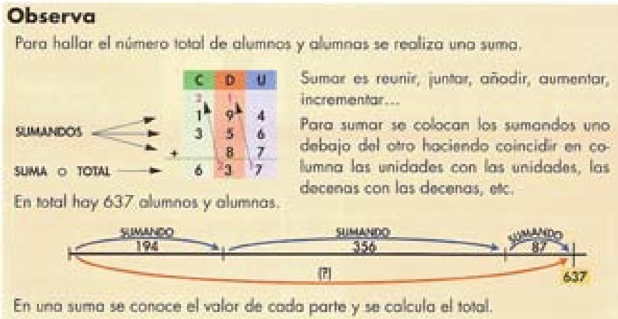

Figura 5. Explicación del problema introductorio

C. También incluyen cuatro actividades de ejercitación y aplicación (Figura 6).

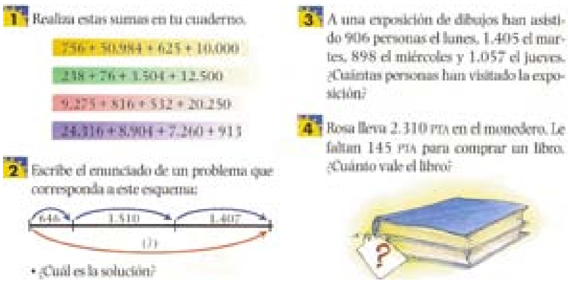

Figura 6. Ejercicios y aplicaciones

La Figura 7 describe la configuración epistémica asociada a esta sección.

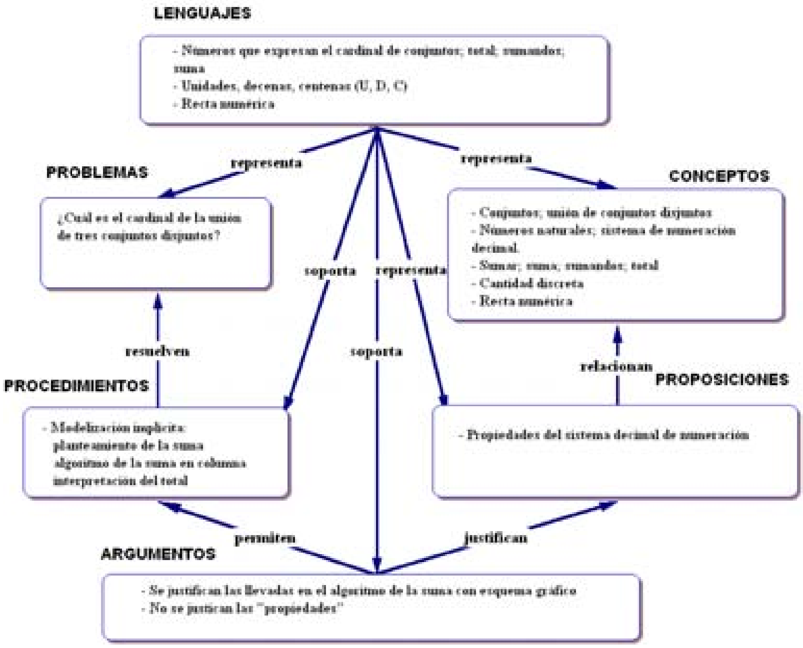

Figura 7. Configuración epistémica de la "La suma. Significados"

Realizamos a continuación un análisis detallado del texto, mostrando los conflictos semióticos que se pueden presentar para los lectores potenciales. Dividimos el fragmento del texto en tres partes correspondientes al enunciado del problema introductorio (A), la explicación de los significados y el algoritmo de sumar (B), y el enunciado de 4 ejercicios (C).

PARTE A: Situación introductoria

En esta parte se propone el enunciado de un problema, el cual se acompaña con un dibujo que no tiene ninguna relación con el texto. El objetivo de este problema contextualizado es que sirva de ejemplo para definir el concepto de "suma" y "recordar" el algoritmo de la suma (ambos conceptos se suponen conocidos de cursos anteriores). Los autores suponen que las consideraciones hechas sobre el ejemplo particular son suficientes para que los alumnos comprendan (o recuerden) el concepto de "suma" y su "algoritmo". Este ejemplo es utilizado implícitamente por los autores como un "elemento genérico" de los problemas que se resuelven mediante sumas, ya que implícitamente se supone que lo que se dice para este caso particular es válido para todos los problemas que se resuelven "sumando". Dicho de otra manera, el objetivo de este problema no es su resolución, sino activar la dualidad extensivo-intensivo en los párrafos posteriores.

Sin embargo, no parece que este problema sea un buen representante del tipo de problemas aditivos que se pretende abordar. La situación se describe de manera incompleta y ficticia. No se dice el nivel educativo a que corresponden los nuevos alumnos, por lo que se tiene una primera operación de unión de dos conjuntos de elementos disjuntos (niños de infantil y de primaria), y después otra operación de unión de elementos de otro conjunto cuya naturaleza no distingue el nivel escolar de los niños. Parece que la información del nivel escolar a que corresponden los niños introduce una distinción innecesaria que puede confundir a los alumnos. Otro elemento contextual que influye en la solución está el hecho de que no se informa sobre los alumnos del curso anterior que no continúan en el centro; de hecho, una respuesta razonable para el problema puede ser: No se puede saber.

Lo dicho no tiene que suponer necesariamente un "fracaso generalizado en la realización de la tarea". Es muy posible que los alumnos acepten el enunciado y realicen la suma requerida, pero por razones de "contrato didáctico" y por la observación de la palabra clave "total" que previamente habrán asociado a sumar los números que intervienen. En todo caso, la realización exitosa de la tarea por la mayor parte de la clase no es atribuible al problema, sino a reglas previamente establecidas y conocimientos culturales aceptados en la institución.

PARTE B: Observa

Se comienza diciendo que para hallar el número total de alumnos y alumnas se realiza una suma. A continuación, se define qué es sumar:*sumar es reunir, juntar, añadir, aumentar, incrementar*, … . Ahora bien, se trata de una definición incompleta ya que no se dice que la suma es el "número de elementos" (cardinal) del conjunto unión (dados dos conjuntos disjuntos). Si el alumno se guía sólo por esta definición puede considerar como situaciones de "suma" muchas que no lo son. Por ejemplo, "reunir" mis regalos con mis libros (cuando algún libro es un regalo); "juntar" dos bolas de plastilina da como resultado una bola de plastilina (¿1 + 1 =1?); al "juntar" todos los números de teléfono de mis amigos, en el mejor de los casos, obtengo una agenda, pero de ninguna manera una "suma"; …

De hecho, al tratarse de verbos de acción transitivos que se aplican sobre los elementos de dos o más conjuntos el reconocimiento de las situaciones en las que es pertinente sumar no estará exento de dificultades dada la generalidad de las acciones que se mencionan como equivalentes a sumar, las cuales además no agotan todas las posibilidades y circunstancias de uso. Asimismo, no se especifica de manera explícita o implícita la necesidad de que los conjuntos deben ser disjuntos.

El conflicto semiótico que se podría producir es que los alumnos identificasen como situaciones de suma algunas que no lo son. Ahora bien, es de suponer que dicho conflicto no se va a producir dados los conocimientos previos de los alumnos sobre la adición de números naturales (hay que recordar que esta unidad está pensada para alumnos de 10 años).

En el EOS se considera que cada definición se debe entender como una definición-regla que, de entrada, no parece que indique que haya algo que sea preciso hacer. A partir de las definiciones-reglas podemos atribuir valores veritativos (verdadero y falso) a ciertas proposiciones. Ahora bien, de una definición-regla también se puede deducir una regla práctica que nos da instrucciones para "realizar una práctica". Esta práctica se puede dar en diferentes situaciones, por lo que se puede afirmar que una definición genera un conjunto de prácticas. A su vez, otra definición equivalente generará otro subconjunto de prácticas. Por tanto, si la definición de suma fuese completa y especificara que la suma es el cardinal de la unión, de ella se podría deducir una práctica para hallar la suma (por ejemplo contar el número de elementos del conjunto unión) y a partir de la necesidad de buscar un método más ágil para hallar dicho cardinal aparecerían otras técnicas (tabla de sumas elementales, cálculo mental, algoritmo escrito, uso de la calculadora, etc.).

La situación que presenta el libro es que, por una parte, da una definición incompleta de la cual no se puede deducir una regla para calcular la suma y, por otra parte, a continuación pasa a explicar el algoritmo de la suma (con dos registros diferentes: enunciado y simbólico). El registro verbal es deliberadamente incompleto, ya que supone que el algoritmo es conocido por los alumnos. El registro simbólico no es el algoritmo habitual, sino que es un pre-algoritmo que se suele usar como paso previo al algoritmo habitual para facilitar su comprensión. Es al final de este algoritmo cuando la suma se identifica con el "total" (es decir, implícitamente como el cardinal del conjunto unión). Puesto que los autores consideran conocido este pre-algoritmo, es el lector quien tiene que interpretar el diagrama tabular y sagital de la izquierda. La descripción del algoritmo contiene diversos convenios que el lector debiera conocer previamente, ya que no se aporta información al respecto. Las letras C, D, U colocadas encima de los datos significan Centenas, Decenas y Unidades y evocan las reglas del sistema de numeración decimal. Los números escritos como superíndices y las flechas inclinadas resumen el algoritmo de sumar con "llevadas" de cifras de un orden al siguiente. El esquema incluye tres definiciones implícitas: *sumandos* (cada uno de los tres números que se suman), *suma* (resultado de la adición), *total* (que significa lo mismo que suma). Se evita, en esta parte del texto, distinguir entre la adición como operación aritmética y la suma como resultado de la adición.

Diagrama lineal

Se supone que el lector está familiarizado con los convenios de representación de los números en la recta numérica: elección de un origen y de un segmento que se usa como unidad de medida; lo que permite asignar a cada número natural un segmento de recta que será su medida con el segmento tomado como unidad (o una distancia desde el origen). En este caso, como los números son grandes no se puede mostrar la unidad por lo que se pierde el carácter discreto de los conjuntos representados (aunque hay que resaltar que, en este caso, el dibujante ha procurado que las longitudes de los segmentos mantengan aproximadamente la misma proporción entre ellas que los sumandos). El diagrama lineal se incluye aquí como medio de explicación de la operación de sumar tres sumandos. La definición de suma que se da de manera implícita se basa en el recuento: sumar a y b es "seguir contando b a partir de a". Se pone así en juego un significado parcial de suma distinto del dado anteriormente, basado en el cardinal de un conjunto.

La técnica de sumar sugerida por el diagrama lineal es difícil de poner en práctica, en el sentido de que no se puede aplicar efectivamente cuando los números son grandes. La faceta dual ostensivo-no ostensivo es aceptada implícitamente como transparente, no problemática. Se presupone que el diagrama lineal (*ostensivo*), como recurso didáctico, es una expresión gráfica de la adición que transmite “de forma automática” el significado de la adición (*no ostensivo*) basado en la aplicación sistemática (y por supuesto, implícita) de la *función siguiente* que se introduce en la axiomática de Peano.

La parte B concluye con una explicación que pretende dar a entender que “sumar es una operación que a partir de ciertos números (sumandos) obtiene otro número (suma)” para ello introduce los términos *valor* y *parte* (¿Por qué usar aquí una terminología de procedencia económica?):

> “En una suma se conoce el valor de cada parte y se calcula el total” (p.19).

En esta sección el alumno se encuentra con una gran complejidad semiótica, ya que en media página se le presentan mezcladas diferentes interpretaciones de la “suma”: como una acción (reunir, juntar, etc.), como el cardinal del conjunto unión, como “seguir contando” y como operación. Además, aparecen diferentes registros: verbal, simbólico y gráfico. Esta gran complejidad semiótica podría ser la causa potencial de numerosos conflictos semióticos que, en la mayoría de alumnos, no se producen gracias a sus conocimientos previos sobre la suma. El profesor que use este libro como apoyo de sus clases debe ser consciente de los conflictos semióticos potenciales que hemos descrito.

PARTE C (Ejercicios)

En el primer problema se proponen hacer cuatro sumas de cuatro sumandos de números hasta de 5 cifras. Se tratan de sumas descontextualizadas que, como principal novedad respecto del ejemplo resuelto, se presentan dispuestos en fila. Parece que el elevado número de cifras de los sumandos tienen por objetivo conseguir que los alumnos los dispongan en columnas y apliquen el algoritmo de la suma que se ha recordado anteriormente.

En el segundo, se espera que los alumnos realicen el planteamiento y resolución de un enunciado de problema a partir de sumandos expresados en un diagrama lineal. El objetivo es que los alumnos apliquen la dualidad extensivo-intensivo y confeccionen el enunciado de un problema cuya descontextualización se corresponda con el diagrama lineal.

El tercero es un problema contextualizado de sumar con tres sumandos sin que se indique ninguna palabra clave alusiva a las “acciones de sumar”. Incluso, admite como respuesta correcta repetir los datos de visitantes en cada día, o decir que no se puede saber ya que no se dicen los visitantes de los otros días en los que se podía visitar la exposición.

El cuarto es un problema concreto de dos sumandos. Tampoco se incluye términos alusivos a las acciones de sumar. La inferencia de hacer una suma se deriva de un conocimiento práctico de la situación. Es de destacar que mientras el enunciado hace referencia a un solo libro en el dibujo aparecen dos libros.

5.2. Algunos conflictos semióticos identificados en las secciones 2-6

Sección 2: Las propiedades de la suma

El problema introductorio (Figura 8) pretende motivar las propiedades conmutativa y asociativa de la suma.

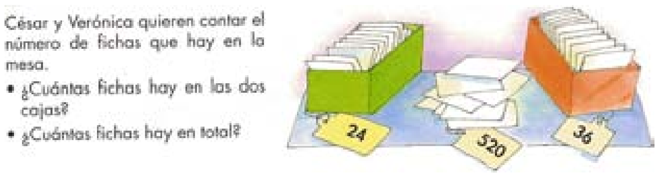

Figura 8. Situación introductoria. Propiedades de la suma

En primer lugar, la Figura 8 presenta un conflicto semiótico entre los códigos de transmisión: en el marco gráfico, el número de fichas es 30 (11 fichas en cada caja y 8 sobre la mesa); en el marco semántico, el número de fichas es 580 (24 y 36 en las cajas, respectivamente, y 520 sobre la mesa). Se supone, por lo tanto, transparente el código de comunicación que identifica el "número en una tarjeta" con el "número de fichas". ¿Por qué no interpretar que en la caja "24" hay 11 fichas?, máxime cuando sobre la mesa hay claramente menos fichas que en las cajas y, en todo caso, no parece admisible que haya 520 fichas. De esta forma, la tarea precisa de aclaraciones del tipo "el número 24 representa el número de fichas que hay en la caja de la izquierda".

En segundo lugar, la primera pregunta, "¿cuántas fichas hay en las dos cajas?", impide que los alumnos se planteen por sí mismos las distintas posibilidades de realizar la suma de los tres sumandos y comprobar que el resultado es el mismo. Una manera de conseguir este propósito sería suprimir la primera pregunta y plantear directamente "¿cuántas fichas hay en total?" De esta manera la situación queda más abierta a la exploración personal del lector. Asimismo, habrá que tener en cuenta que muchos potenciales lectores darían por finalizada la actividad, obtenida una respuesta. Una opción es planificar una sesión de interacción en aula, que conlleve responder a preguntas del tipo:

-*¿Cambia el resultado, si cambias el orden en que se hacen las sumas de los números?*

-*¿Ocurre igual si los números de fichas en cada caja y sobre la mesa son diferentes?*

-*¿Da igual que sumemos primero las fichas de las cajas y luego las de la mesa o, por ejemplo, primero las de una caja con las de la mesa y después las de la otra caja?*

En el apartado "Observa" que sigue al enunciado se ve con claridad que el objetivo del problema no es que los alumnos descubran por si mismo la propiedad asociativa. La primera pregunta está pensada para poder explicar con el ejemplo de las dos cajas la propiedad conmutativa y la segunda para explicar la asociativa. En efecto, en la sección "Observa" (Figura 9) se presenta la solución del problema y los enunciados generales de las propiedades conmutativa y asociativa. Nos parece una *generalización prematura*, basada en la comprobación de un solo ejemplo. Por otra parte, bajo el epígrafe "Propiedad asociativa" se da, en realidad, el enunciado de una técnica de cálculo para sumar tres números: "Para sumar tres números, sumamos dos cualesquiera de ellos y el resultado se suma con el tercero". De esta forma, se confunde el enunciado de una técnica, con el de una propiedad.

Además, la técnica de cálculo es en muchos casos interpretada como: *si se cambia el orden en que hacemos las sumas el resultado no varía*, donde la voz “orden” es polisémica: por un lado, “el orden en que se suman tres sumandos dados en una lista” (primero a más b y el resultado sumarlo a c o bien sumar primero b y c y al resultado agregarle a), por otro lado, “el orden en que se colocan los sumando dados, que supone una generalización de la propiedad conmutativa a tres números” ($a+b+c = a+c+b = b+a+c = b+c+a = c+a+b = c+b+a$).

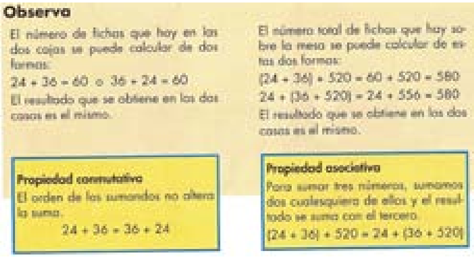

Figura 9. Propiedades de la suma

Sección 3: La resta. Significados

La presentación de la resta (Figura 10) se hace de manera similar a la de la suma. Primero se presenta un problema contextualizado en el que se pide cuánto falta para llegar a 9.450 puntos si tenemos 6.750. Contrariamente al caso de la suma, el problema escogido sí se puede considerar un buen representante de los problemas de resta.

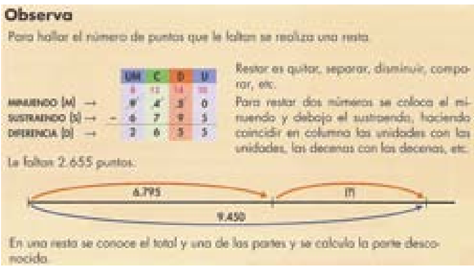

Figura 10. La resta. Significados

Se comienza diciendo que para hallar el número de puntos que falta se realiza una resta. A continuación se define qué es restar: *restar es quitar, separar, disminuir, comparar, etc*. Ahora bien, como en el caso de la suma, se trata también de una definición incompleta ya que no se dice, por ejemplo, que la resta es el número de elementos que quedan en el conjunto después de quitar algunos. Si el alumno se guía sólo por esta definición puede considerar como situaciones de “resta” muchas que no lo son. Al igual que en el caso de la suma de esta definición de resta no se puede inferir una regla para realizar la resta.

La situación que presenta el libro es que, por una parte, da una definición incompleta de la cual no se puede deducir una regla para calcular la resta y, por otra parte, a continuación pasa a explicar el algoritmo de la resta (con dos registros diferentes: enunciado y simbólico). El registro verbal es deliberadamente incompleto, ya que supone que el algoritmo es conocido por los alumnos. El registro simbólico que se presenta describe el pre-algoritmo previo al algoritmo de restar “tomando prestado”, que no es el que habitualmente se enseñan en España (que suele ser el algoritmo de “restar llevándose”). Puesto que los autores consideran conocido este pre-algoritmo, es el lector quien tiene que interpretar el diagrama tabular de la izquierda. La descripción del algoritmo contiene diversos convenios que el lector debiera conocer previamente, ya que no se aporta información al respecto. El esquema incluye tres definiciones implícitas: *minuendo, sustraendo y diferencia*. Se evita, en esta parte del texto, distinguir explícitamente entre la resta como operación aritmética y la resta como resultado de la sustracción (diferencia).

Es de resaltar la alta “densidad semiótica” del esquema de sustracción presentado.

A diferencia del caso de la suma, se introducen abreviaturas lingüísticas para las palabras *minuendo* (M), *sustraendo* (S) y *diferencia* (D) (la letra D también significa aquí *decena*, lo que produce un nuevo fenómeno de polisemia), que son referidas mediante flechas a los números correspondientes a la sustracción del problema propuesto. Estas abreviaturas notacionales serán usadas en el siguiente apartado para enunciar, de manera general, las relaciones entre los tres números que definen una sustracción. El algoritmo de restar "tomando prestado" se supone conocido y, por ello, sólo se describe tachando las cifras correspondientes del minuendo y anotando encima del mismo la nueva cifra con los incrementos de unidades correspondientes. Hay que resaltar que los autores seguramente han tenido en cuenta, aunque sea sólo de manera implícita, la complejidad semiótica del algoritmo de "restar llevándose" ya que han optado, en cursos anteriores, por explicar un algoritmo de menor complejidad semiótica: el algoritmo de restar "tomando prestado".

Se incluye también un diagrama lineal que pone en juego un significado parcial de resta distinto del dado anteriormente. Ahora la resta se entiende en términos de "sumando desconocido": 6.795 + (?) = 9.450. Se concluye con una explicación que pretende dar a entender que "restar es una operación que a partir de ciertos números (total y parte) obtiene otro número (otra parte)", pero se deja a cargo del alumno la identificación de "total" con "minuendo", de "parte" con "sustraendo" y de "otra parte" con "diferencia".

En esta sección el alumno se encuentra con una gran complejidad semiótica, ya que en media página se le presentan mezcladas diferentes interpretaciones de la "resta": como una acción (quitar, comparar, etc.), como "sumando desconocido" y como operación. Además, aparecen diferentes registros: verbal, simbólico y gráfico. Esta gran complejidad semiótica podría ser la causa potencial de numerosos conflictos semióticos que, en la mayoría de alumnos, no se producen, al igual que en el caso de la suma, gracias a sus conocimientos previos sobre la resta. Por otra parte, es de destacar que no se da a la resta el significado parcial de "contar hacia atrás".

Sección 4: Relaciones entre los términos de la resta

Esta sección comienza con el siguiente problema introductorio:

> "Para pagar la carpeta, Jaime entregó mil pesetas y le devolvieron 165 pesetas (en un dibujo se indica que la carpeta cuesta 835 pta). Comprueba si son correctas las vueltas" (Ferrero y cols, 1999, p. 22).

Puesto que se trata de relacionar la suma y la resta sería más conveniente formular la pregunta de manera más abierta.

Una consigna alternativa podría ser: *¿De cuántas maneras distintas podrías comprobar si la vuelta (es decir, el dinero devuelto) es correcta?"*

A continuación, en el apartado "Observa" (Figura 11) se explican tres maneras alternativas de resolver el problema. Cada una de ellas se simboliza mediante una expresión algebraica en forma de igualdad. De la segunda igualdad se deriva una técnica para comprobar si la resta está bien hecha: "Para comprobar si una resta está bien hecha se suma el sustraendo con la diferencia y el resultado debe ser el minuendo". (p. 22)

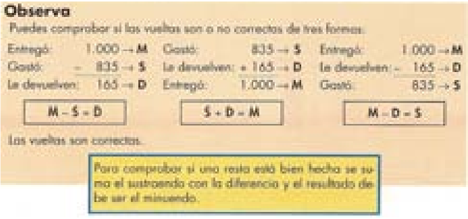

Figura 11. La prueba de la resta

En este apartado también se observa una complejidad semiótica importante, ya que los autores dejan a cargo de los alumnos la aplicación de las funciones semióticas que relacionan extensivos con intensivos (faceta extensivo-intensivo). Esperan que sean los alumnos quienes conviertan en intensivos los símbolos M, S y D. Consideran que la flecha será interpretada por los alumnos como el paso de un valor a una variable:

$$1.000 \rightarrow M \qquad 165 \rightarrow D \qquad 835 \rightarrow S$$

Y también esperan que sean los alumnos quienes establezcan la relación entre las tres igualdades obtenidas, ya que los autores evitan entrar en la explicación de propiedades de las expresiones algebraicas (por ejemplo, que sumando el mismo término a cada miembro de la igualdad ésta se mantiene, o bien que un término de uno de los miembros de la igualdad pasa al otro miembro con el signo cambiado). Ahora bien, sólo si el alumno relaciona M–S= D con S+D=M se puede entender que de la segunda igualdad se deriva una técnica general para comprobar el resultado de una resta (primera igualdad).

Esta sección del libro de texto termina con cinco ejercicios. En el primero, se proponen seis restas (por ejemplo, 2.500–865 =1.635) y se pide a los alumnos que comprueben si los resultados son correctos. En el segundo, se les presentan 9 igualdades en las que falta uno de los tres números (el minuendo, el sustraendo o bien la diferencia) y se les pide que hallen el término que falta. En el tercero, se les presenta una resta descontextualizada y se les pregunta que confeccionen un enunciado que se resuelva mediante dicha resta. En el cuarto y quinto, se les presentan dos de los tres términos por su nombre (el minuendo, el sustraendo o bien la diferencia) sin que en ellos aparezca la palabra resta o bien el signo de restar y se les pide que hallen el término que falta.

Sección 5: Restas equivalentes

Esta configuración se genera para estudiar una propiedad de la sustracción:

> "En una resta, la diferencia no varía cuando se suma o se resta un mismo número al minuendo y al sustraendo". (p. 23)

Para llegar a esta propiedad se comienza con un problema contextualizado sobre la diferencia de precio entre dos gafas (primero sin funda y después con funda). A continuación, en el apartado "Observa" (Figura 12) se explica la solución del problema. También se simbolizan mediante los símbolos M, S y D, aunque en este caso las letras intervienen como antecedentes y los números como consecuentes. Además, las letras M, S y D sólo se utilizan para el cálculo de la diferencia "sin funda". Si en el apartado anterior los alumnos tenían que ir del extensivo al intensivo, en este caso tienen que seguir el camino inverso, tienen que ir del intensivo (M, S y D) al extensivo (los números correspondientes). Los autores consideran que la flecha será interpretada por los alumnos como la asignación de valores a las variables M, S y D:

Por otra parte, la flecha se utiliza también para expresar la suma de un mismo número al minuendo y al sustraendo. Si antes la flecha relacionaba intensivos con extensivos, ahora relaciona extensivos con extensivos. También hay que destacar que el signo + se usa como operador (+1.000) y que el resultado se generaliza no sólo a la suma (el ejemplo utilizado) sino también a la resta (el caso más problemático)

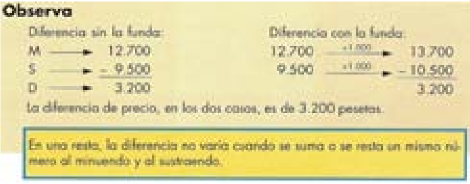

Figura 12. Restas equivalentes

Podemos observar que para obtener un resultado general: (M ± A) – (S ± A) = M–S, los autores comienzan con un caso general (sugerido por las letras, M, S y D) para después hacer intervenir un caso particular: (12.700 + 1.000) – (9.500 + 1.000) = 12.700 – 9.500 para concluir finalmente un resultado general que expresan mediante un enunciado: “En una resta, la diferencia no varía cuando se suma o se resta un mismo número al minuendo y al sustraendo” (p. 23). Se observa que los autores han tenido muy presente la complejidad semiótica asociada y han buscado (1) una explicación que la reduzca considerablemente y (2) una formulación de la propiedad que permita obviar el uso de paréntesis y el doble uso del signo menos (como símbolo de la resta y como símbolo del “opuesto de un número”). A pesar de ello, en este apartado también se observa una complejidad semiótica importante, ya que los autores vuelven a dejar a cargo de los alumnos la aplicación de las funciones semióticas que relacionan extensivos con intensivos (faceta extensivo-intensivo).

Esta sección del libro de texto termina con tres ejercicios. En el primero, se proponen dos casos en los que se suma el mismo número al minuendo y al sustraendo y dos casos en los que se resta el mismo número y se les pide que comprueben que el resultado no varía. En los otros dos problemas se les proponen dos situaciones contextualizadas en las que han de aplicar la propiedad explicada anteriormente.

Sección 6: Sumas y restas combinadas. Uso del paréntesis

La situación contextualizadora propuesta para motivar el uso de los paréntesis en la realización de las operaciones se puede resolver mediante la realización de dos restas sucesivas:

> “En el quiosco había 3.000 periódicos. Por la mañana se vendieron 1.948 y por la tarde, 896. ¿Cuántos periódicos quedaron sin vender? (p. 24)

La solución presentada (Figura 13) parece forzada, ya que no se pide como paso intermedio hallar la cantidad de periódicos vendidos. ¿Por qué no operar sin usar los paréntesis, primero 3.000 – 1.948 y después al resultado restarle 896?

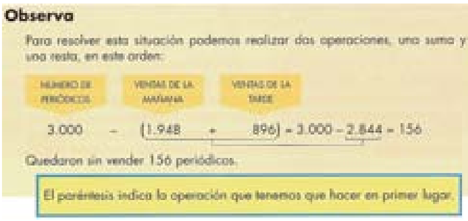

Figura 13. Uso de paréntesis

En este apartado, podemos observar un conflicto semiótico potencial ya que el alumno puede entender, implícitamente, que se hace lo mismo que en los otros apartados, es decir, que a partir de un ejemplo particular se obtiene un resultado general. Sin embargo, lo que se está haciendo es introducir una convención:

"el paréntesis indica la operación que tenemos que hacer en primer lugar" (p. 24). Además, esta convención, implícitamente, puede entrar en contradicción con lo que se ha dicho al explicar anteriormente la propiedad asociativa. Según dicha propiedad, si se ha de efectuar, por ejemplo, (30 + 50) + 25, no es necesario sumar primero 30 con 50, puesto que, si se quiere se puede sumar primero 50 con 25.

6. Consideraciones finales

Con relación a la idoneidad epistémica de la lección analizada, nuestra conclusión es que su grado de idoneidad es moderadamente elevado, si tomamos como referencia la configuración empírica descrita en el apartado 3.2.

En cambio, la idoneidad semiótica es bastante más discutible. Basándonos, sobre todo en dos de las cinco facetas duales (expresión-contenido y extensivo-intensivo), hemos mostrado una variedad de conflictos semióticos potenciales, algunos de los cuales se pueden resolver mediante ciertos cambios en las tareas y en las explicaciones proporcionadas. De hecho, la identificación de conflictos semióticos lleva consigo, en algunas ocasiones, la posibilidad de establecer condiciones de control de posibles procesos de estudio con relación a los objetos matemáticos que se ponen en funcionamiento en la lección.

Sin embargo, ciertos conflictos semióticos identificados tienen difícil solución (si nos atenemos a los conocimientos didáctico-matemáticos actuales). Un tipo de estos conflictos semióticos son aquellos originados por configuraciones didácticas que presuponen que las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones de la experiencia empírica. En este tipo de configuraciones los conceptos y las propiedades se intentan justificar por su acuerdo con una realidad extra matemática. Este intento topa con una dificultad que se convierte en el origen de importantes conflictos semióticos, que no es otra que el carácter convencional de algunas reglas matemáticas. Este tipo de conflictos han aparecido en la lección en el momento de introducir la regla "el paréntesis indica la operación que tenemos que hacer en primer lugar" a partir de una justificación basada en su acuerdo con situaciones extra matemáticas. Para solucionar este tipo de conflictos semióticos es necesario que los autores de los textos sean conscientes de las limitaciones que tiene la concepción que considera que "las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones de la experiencia empírica".

Otro tipo de conflictos semióticos potenciales de difícil solución son los relacionados con el intento de soslayar ciertas características del razonamiento algebraico. Los autores, por una parte, pretenden el inicio de una reflexión sobre la estructura algebraica de los conjuntos y operaciones con números; tal es el caso de los enunciados generales de las propiedades conmutativa, asociativa, o de la relación entre el minuendo, el sustraendo y la diferencia. Por otra parte, conscientes de la complejidad semiótica que ello representa intentan soslayar ciertas características del razonamiento algebraico, en especial la consideración de que los símbolos no están condicionados por la situación que inicialmente representaban y que, por tanto, son objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones. En la lección analizada, los símbolos substituyen a números y su función es representarlos,

los símbolos representan objetos, acciones sobre objetos o relaciones entre objetos, pero ellos mismos no se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones. Este tipo de conflictos semióticos han aparecido en la lección en el momento de introducir la relación entre los términos de una resta.

Un problema didáctico de mayor alcance, relacionado con el criterio de idoneidad "mediacional" expuesto en la introducción, se pone de manifiesto cuando relacionamos las situaciones introductorias de las distintas configuraciones y las prácticas operativas y discursivas asociadas. Se supone que tales situaciones deben permitir la contextualización de los conocimientos pretendidos y crear las condiciones para la exploración personal de los alumnos. Sin embargo, el texto presenta inmediatamente la solución y las generalizaciones pretendidas, lo que convierte de hecho al proceso de estudio en una presentación magistral. Se trata de un problema relativo a la gestión del tiempo didáctico (*cronogénesis*) y a la gestión de las responsabilidades del profesor y de los alumnos en el proceso de aprendizaje (*topogénesis*) (Chevallard, 1991).

Para terminar, queremos resaltar que el análisis de textos se revela como un componente importante del análisis didáctico de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Con frecuencia, los textos y documentos de estudio asumen una parte sustancial de la dirección del proceso de enseñanza y aprendizaje. Es cierto que en los niveles de educación primaria el alumno no afronta solo el estudio de los contenidos curriculares, usando el libro de manera personal y autónoma. El profesor desempeña un papel de mediador entre el libro y el alumno. Pero un libro de texto escolar que tenga una baja idoneidad epistémica y semiótica implicará una mayor carga para el profesor y menor autonomía para los alumnos.

La metodología de análisis descrita puede ser una herramienta útil para la preparación de profesores. El diseño y desarrollo de unidades didáctica debe tener en cuenta las experiencias e investigaciones previas realizadas, las cuales se concretan habitualmente en las lecciones elaboradas por equipos de expertos. Una pregunta clave para el profesor es: ¿cómo puedo adaptar a mi contexto y circunstancias la unidad didáctica que me ofrece este libro de texto y en la medida de lo posible optimizarla? Para responder esta pregunta es necesario adoptar unos criterios de mejora o idoneidad de un proceso de estudio matemático.

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco del proyecto MCYT – FEDER: SEJ2004-00789, Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica. Madrid.

Referencias

Brousseau, B. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Dordrecht: Kluwer.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Contreras A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(2), 151–186.

Ferrero, L. y cols. (1999). *Matemáticas 5. Serie Sol y Luna*. Anaya.

Font, V. y Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. *Revista de Educación*, *338*, 309-346.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématique, 22*(2/3), 237–284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 3–36.

Godino, J. D., Wilhelmi M. R. y Bencomo, D. (2005). "Suitability criteria for a mathematical instruction process. A teaching experience with the function notion". *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *4.2*, 1–26.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (aceptado).

Hiebert, J., Morris, A. K., y Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 66*, 201–222.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. En A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 99-137): Dorchecht: Kluwer A. P.

Vygotski, L.S. (1934). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, 2ª edición. Barcelona, ESP: Crítica-Grijalbo, 1989.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations.* N. York, Macmillan.

Juan D. Godino
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada
España

E-mail: jgodino@ugr.es

Vicenç Font
Departament de Didáctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica
Universitat de Barcelona
España

E-mail: vfont@ub.edu

Miguel R. Wilhelmi
Departamento de Matemáticas e Informática
Universidad Pública de Navarra
España

E-mail: miguel.wilhelmi@unavarra.es