Conclusiones y perspectivas de investigación futura

Bruno D'Amore

No cabe duda de que la semiótica, disciplina surgida de un género de estudio del todo diverso (véase la *Introducción* de Luis Radford en esta misma revista), ha conquistado un lugar importante en los estudios de Didáctica de la Matemática.

Respecto a su ingreso en dicho campo, la visión semiótica inició solidificando sus diversos aspectos con trabajos que explicaban el pasaje del concepto a sus representaciones, para después abrir su camino en direcciones diferentes, como lo demuestra la amplia colección de estudios que en esta publicación aparecen. Ahora, el desafío consiste en tratar de entender hacia qué tendencia se moverá la investigación en el futuro. Para poder plantear algunas hipótesis, considero útil un ulterior análisis de la historia reciente y de las mismas bases culturales.

Una problemática importante –y todavía central– es la tocante a la representación de los objetos matemáticos. Por lo general, en Didáctica de la Matemática decimos "pasar de un concepto a sus representaciones"; sin embargo, ¿qué es un *concepto*? La pregunta aún continúa siendo fundamental. En D'Amore, 2006 (pp. 205-220) intenté plantear las bases para responder a dicha cuestión, aparentemente ingenua; empero, lo que se llega a constatar, con certeza absoluta, es que la *definición* revela, por muchos motivos, una complejidad inmensa.

Entre las dificultades que presenta la definición, está que en la idea de *concepto* intervienen muchos factores y causas. Para decirlo brevemente (y, por tanto, en modo incompleto), no parece correcto afirmar que *un concepto matemático es aquel que se halla en la mente de los científicos que a este tema han dedicado su vida de estudio y reflexión*. Parece más correcto señalar que hay una fuerte componente *antropológica*.

Así, en la *construcción de un concepto* participarían tanto la parte institucional (el Saber) como la personal (de quien tiene acceso a tal Saber, que implica no sólo el científico). Esta propuesta la han expuesto diferentes autores; yo me limito a sugerir el trabajo de Godino y Batanero, 1994, porque hace hincapié en la importancia del debate en el cual estoy tratando de inserirme, al tratar las relaciones entre significados institucionales y personales de los objetos matemáticos.

Distinguir el *concepto* de su construcción no es fácil y, quizá, no es ni posible ni deseable, ya que un concepto se halla continuamente en fase de construcción; aquí estriba su parte más problemática, pero también la más rica de su significado. Podríamos llamar a tal construcción *conceptualización*, y reflexionar sobre qué es y cómo se da. En el intento por clarificar dicho argumento, muchos investigadores han propuesto hipótesis y teorías que no detallaré; basta recordar las contribuciones –muchas veces en franca oposición–

de Vygotski, Piaget, Gal'perin, Bruner o Gagné. Para una rápida recapitulación, puede consultarse D'Amore, 2006.

Adentrarse en esta aventura nos conduce, por lo menos, a darnos cuenta de un hecho: la segunda pregunta, *¿qué es* o *cómo se llega a la conceptualización*?, es un misterio. La cuestión pasa a través de un recorrido por los famosos *triángulos* (hay bibliografía específica en D'Amore, 2006):

- El de Charles Sanders Peirce (1839-1914), publicado en 1883: *intérprete*, *representante*, *objeto*
- El de Gotlob Frege (1848-1925), publicado en 1892: *Sinn* [sentido], *Zeichen* [expresión], *Bedeutung* [indicación]
- El de C. K. Ogden e I. A. Richards, que quería ser un compendio de los otros dos, y apareció en 1923: *referencia*, *símbolo*, *referente*
- El de G. Vergnaud (1990), por el cual un concepto C es la terna (S, I, *S*), donde S es el referente, I el significado y *S* el significante

Queda claro que *apropiarse* de un concepto, independientemente de lo que esto signifique, necesita siempre de algo más que *nombrarlo* (la cuestión se originó por lo menos en la Edad Media, apunta D'Amore, 2006) y *representarlo*, lo cual nos lleva a la famosa *paradoja* de Duval, 1993 (p. 38).

Kant, en la *Crítica de la razón pura*, señala que el conocimiento es resultado de un contacto entre un sujeto que aprende y un objeto de conocimiento. Él recurre a una comparación: así como el líquido adopta la forma del recipiente que lo contiene, las impresiones sensoriales adoptan las formas que le imponen las estructuras cognitivas. Pero para que eso suceda (y es la bien conocida *hipótesis fuerte* de Kant) se requieren de formas innatas de sensibilidad, como espacio, tiempo, causalidad, permanencia del objeto y uso de experiencias precedentes.

El conocimiento no es una simple representación de la realidad externa, sino el resultado de la interacción entre el sujeto que aprende (sus estructuras cognitivas) y sus *experiencias sensoriales*. Además, el sujeto que aprende abandona la típica pasividad (cartesiana o lockiana), pues construye y estructura sus experiencias; de este modo, participa activamente en el proceso de aprendizaje y lo transforma en una verdadera y propia *construcción*. Un objeto de conocimiento, al entrar en contacto con un sujeto que aprende, se modifica y reconstruye por los instrumentos cognitivos del sujeto.

Pero, ¿de dónde provienen esos instrumentos cognitivos que sirven para transformar las experiencias del sujeto? La epistemología del aprendizaje de Kant, para usar una terminología moderna, se refiere a un aprendiz adulto, dotado de un lenguaje desarrollado, con capacidad de abstracción y de generalización. Aquí es pertinente la siguiente pregunta: ¿cómo cambia todo esto si hablamos de aprendizaje en ambiente escolar, de aprendices no adultos (niños, adolescentes o jóvenes) y a las primeras armas, con lenguajes aún en elaboración?

No es del todo absurdo pensar que la epistemología constructivista de Piaget, formulada en los años treinta[1], surgió por la necesidad de dar respuesta a este

1 Estoy pensando en Piaget (1937), por ejemplo.

problema. Por tanto, el *saber adquirido* puede verse como el producto de la elaboración de la experiencia con la que entra en contacto el sujeto que aprende. Y esta elaboración consiste no sólo en la interacción entre el individuo y su ambiente, sino también en el modo como aquél interioriza el mundo externo. Independientemente de las peculiaridades de tales *actividades*, el sujeto que aprende debe comprometerse en algo que necesariamente lo lleva a simbolizar. Esta es una necesidad típicamente humana, ya que es una elaboración (con características internas o sociales, e incluso ambas) organizada alrededor de o en los sistemas semióticos de representación.

Se puede agregar que el *conocimiento es la intervención y el uso de los signos*. Así, el mecanismo de producción y de uso, subjetivo e intersubjetivo, de estos signos, y el de la representación de los *objetos* de la adquisición conceptual, resulta crucial para el conocimiento.

Todo eso había sido ya previsto en el programa de la epistemología constructivista, enunciada por Piaget y Garcia (1982), particularmente en el capítulo IX. Al hablar sobre la experiencia del niño, indican que las situaciones que él encuentra son generadas por su entorno social y los objetos aparecen situados en contextos que les dan el significado específico. Por tanto, este niño no asimila objetos puros, sino las situaciones en las cuales los objetos tienen roles específicos; a medida que su sistema de comunicación se hace más complejo, la experiencia directa de los objetos queda subordinada al sistema de interpretaciones suministrado por el entorno social.

No hay duda de que el conocimiento en la escuela y su aprendizaje como construcción se hallan condicionados por situaciones específicas de la institución. Por ende, el aprender en la escuela *¡no es el aprender total!* Los problemas del aprendizaje matemático en la escuela, aún antes de ser de orden epistemológico, pertenecen a un ambiente sociocultural.

Si aceptamos que todo conocimiento (matemático, en particular) refleja al mismo tiempo una dimensión social y una personal, la escuela no es una excepción; incluso, en ella queda institucionalizada esa doble naturaleza. Durante el aprendizaje de las matemáticas se introduce a los estudiantes en un mundo nuevo, tanto conceptual como simbólico –sobre todo, representativo–, que no es fruto de una construcción solitaria, sino de una verdadera y compleja interacción con los miembros de la microsociedad, de la cual forma parte el sujeto que aprende: los propios compañeros, los maestros y la *noosfera* (a veces borrosa, otras evidente).

Es mediante un continuo debate social que el sujeto que aprende toma conciencia del conflicto entre *conceptos espontáneos* y *conceptos científicos*. Así, enseñar no consiste sólo en el intento de generalizar, amplificar, volver más crítico el *sentido común* de los estudiantes, sino se trata de una acción más bien compleja, como nos ha enseñado Vygotski en *Pensamiento y lenguaje* (1962), cuando afirma que un concepto es algo más que la suma de ciertos vínculos asociativos formados por la memoria, pues consiste en un auténtico y complejo acto del pensamiento al que se puede llegar sólo cuando el desarrollo mental del niño ha alcanzado el nivel requerido. Sin embargo, el desarrollo de los conceptos presupone el de muchas funciones intelectuales (atención, memoria lógica, abstracción, capacidad de comparación y diferenciación); la experiencia ha demostrado que la enseñanza directa de los conceptos es imposible y estéril.

En matemáticas, la asimilación conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas (Chevallard, 1991; Duval, 1993, 1999; Godino y Batanero, 1994), lo cual nos obliga a aceptar la afirmación de Husserl, pero centrada por Duval hacia la Didáctica de la Matemática, que *no existe noética sin semiótica*.

Como sugiere Duval, la construcción de los conceptos matemáticos depende, estrechamente, de la capacidad de usar *más* registros de sus representaciones semióticas:

- De *representarlos* en un registro dado
- De *tratar* tales representaciones en un mismo registro
- De *convertir* tales representaciones de un registro dado a otro

El conjunto de estos tres elementos, al igual que las consideraciones de los párrafos anteriores, evidencian una profunda relación entre noética y constructivismo. Así, la *construcción del conocimiento en matemáticas* se puede pensar como la unión de tres *acciones* sobre los conceptos: la expresión misma de la capacidad de *representar* los conceptos, de *tratar* las representaciones obtenidas en un registro establecido y de *convertirlas* de un registro a otro.

Todo esto constituye, en mi opinión, sólo el punto de partida para especificar y explicar históricamente la importancia que la Didáctica de la Matemática reconoció a los estudios sobre la semiótica, en el momento en que ingresaron a su campo de investigación. Hoy se prefiere seguir una vía de carácter no nominalista, que podríamos llamar de pensamiento entendido como praxis reflexiva sensorial-intelectual, apoyada en sistemas semióticos de significado cultural. Según esta línea, trazada por Luis Radford, estos sistemas semióticos, construidos socialmente por los individuos a partir de su realidad concreta, transformados activamente de generación en generación, “naturalizan” la realidad de los individuos, enmarcan lo que se entiende por evidencia, argumentos convincentes, demostraciones, etc. y subtienden las reflexiones que los individuos hacen de su mundo.

Pero, volvamos a la pregunta inicial. ¿Qué dirección tomarán estos estudios en el futuro? Podemos ver ya importantes señales, que emergen en las páginas que aquí quisimos recoger. Quizás una gran influencia tendrán particularmente los estudios sobre la comunicación, sobre las acciones de las comunidades de práctica, las reflexiones sobre la dimensión ontogenética, así como la contribución de análisis críticos de temas que han fundado nuestra disciplina y que ya se delinean como evoluciones de un futuro próximo.

En este número especial de la revista *Relime*, reunimos a varios especialistas con el fin de presentar el estado del arte de las diversas tendencias que conforman, actualmente, el estudio de la semiótica en nuestro sector. Algunos de estos trabajos contribuyen a dar una respuesta adecuada a muchas de las preguntas precedentes.

La respuesta a la primera pregunta, *¿qué es un concepto?*, plantea problemas teóricos. Seguir profundizando en ellos parece ser un campo donde la semiótica puede dar importantes resultados en un futuro cercano. Varios textos aquí reunidos sugieren que las respuestas a esta pregunta, y a las que planteé en el curso de este artículo, deben incluir el aspecto institucional (Godino y colaboradores), pero también el contexto cultural (Radford, Cantoral y colaboradores) y cognitivo (Arzarello, Radford, Duval, Otte, Arzarello).

Es así como Godino y sus colaboradores presentan una actividad concreta del EOS en el análisis de textos escolares, en el cual utilizan los criterios de idoneidad tanto *epistémica* como *cognitiva*; un análisis de este tipo puede tener repercusiones profundas de carácter institucional.

Cantoral y sus colaboradores abordan la socioepistemología, mediante la cual la actividad matemática se sitúa en un contexto cultural de práctica social.

Radford basa su aporte en la idea de *praxis reflexiva* y expone una *teoría cultural de la objetivación*. Tal propuesta tiene una doble valencia: la cultural (de análisis crítico de posiciones, en algunos casos ampliamente compartidas) y la cognitiva.

Duval insiste en la importancia del análisis semiótico complejo en el ámbito matemático y cognitivo. Vuelve a los orígenes de la semiótica con el fin de sugerir motivaciones para el análisis de los signos, así como de las relaciones de semejanza, referencia, causalidad y oposición. Esta modalidad de afrontar la problemática es útil tanto para el desarrollo de las matemáticas como para el análisis de su aprendizaje.

Otte propone que la explicación es consubstancial de la exhibición de signos y sentido, ya que no hay diferencia entre idea y símbolo a pesar de lo que sostienen el idealismo filosófico y el mentalismo cognitivista, lo cual ejemplifica al tratar el tema de la demostración en matemáticas.

Arzarello muestra en primer lugar un análisis crítico e histórico sobre la idea misma de semiótica. Parte de su fundamento teórico y propone diversas interpretaciones y luego enfoca a la semiótica como aproximación modal, que también ofrece análisis de eventos sucedidos en el aula.

La semiótica que nos interesa, de manera específica, atañe al uso de signos y al desarrollo conceptual en el salón de clases. Muchos de los artículos aquí reunidos atienden este aspecto.

Así, Koukkoufis y Williams emplean la teoría de la objetivación para estudiar la manera en que generalizan jóvenes alumnos.

Adalira Sáenz-Ludlow enfoca su atención, fuertemente teórica, en una idea muy concreta, la de *riqueza matemática del alumno*, y en la influencia de los maestros en el discurso matemático.

Gagatsis y sus colaboradores dan a conocer estudios críticos sobre los cambios de representación de objetos relacionados con el concepto de función.

Bagni ofrece un estudio experimental hecho con alumnos de secundaria que intentan dar sentido a frases paradójicas.

D’Amore propone un ejemplo de aula donde se presenta un cambio de sentido frente a diferentes representaciones del mismo objeto, conseguidas por tratamiento semiótico.

Este número especial de *Relime* se inspira en las discusiones colectivas precedentes que menciona Luis Radford en su *Introducción*. Quiere ser una modesta contribución analítica y problemática al tema de la semiótica en el ámbito de la Educación Matemática.

Me agrego a los agradecimientos de Luis, extendiéndolos a nuestros autores y a todos los lectores.

Referencias

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá, Colombia: Magisterio. [Primera edición en italiano, 1999, Bologna: Pitagora].

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 5*, 37-65.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle. [Primera edición en francés 1995, Berne: Peter Lang].

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 3*, 325-355.

Piaget, J. (1937). *La construction du réel chez l'enfant.* Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. & Garcia, R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris, France: Flammarion.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19*, 133-169.

Vygotsky, L. (1962). *Thought and language*. Cambridge, USA: MIT Press.

Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla

- **Bruno D'Amore**
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna
Italia

E-mail: damore@dm.unibo.it