Problemas de máximos y mínimos y algunas reflexiones sobre el automatismo en su resolución

RESUMEN

El motivo que nos ha llevado a escribir este artículo es el de reflexionar sobre una práctica frecuente en la enseñanza de las matemáticas: la utilización exclusiva del Cálculo Diferencial para la resolución de problemas de máximos y mínimos de funciones.

Con la intención de subsanar el efecto nocivo de rigidez mental que, a nuestro juicio, ello conlleva —situación extrapolable en la enseñanza de otros muchos capítulos de la Matemática, donde asimismo se propugna un excesivo automatismo en el empleo de reglas—, se sugieren otras vías alternas para resolver los problemas mencionados.

0. INTRODUCCIÓN

Aunque es innegable la importancia del *Cálculo Diferencial* como ayuda para resolver problemas de optimización de funciones, el presente trabajo invita a hacer una reflexión sobre la posibilidad de encontrar otros procedimientos de resolución. Junto a ello, se ofrecen numerosos ejemplos en que se llega a la solución por diferentes caminos al ya mencionado.

En la Sección 1 comenzamos con unas consideraciones generales de tipo metodológico, sobre los estragos que ocasiona en los alumnos la utilización indiscriminada de automatismos rígidos al enfrentarse a un problema. En la Sección 2, y como caso particular de ese planteamiento más amplio, se presenta ya el

Javier Peralta

Universidad Autónoma de Madrid

asunto del cálculo de máximos y mínimos de funciones por otros métodos. Dichos métodos son desarrollados y de alguna forma clasificados, en las secciones 3 y 4 (procedimientos algebraicos) y en la 5 (procedimientos geométricos).

Se concluye en la Sección 6 con dos problemas históricos de optimización, que se resuelven por diferentes métodos.

1. REFLEXIONES SOBRE EL AUTOMATISMO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1.1 En la referencia [2] pueden leerse los resultados de un test realizado con alumnos de la escuela elemental, en el que figuraba la siguiente pregunta: "En un barco hay 20 cabras y 15 vacas. ¿Cuál es la edad del capitán?". Sorprenderá al lector que el 74% de los alumnos respondió 35 años, sin experimentar dudas sobre la contestación.

¿A qué se debe esa respuesta? ¿Es previsible encontrarse con situaciones semejantes? O, por el contrario, ¿es éste un caso excepcional?.

Nuestra impresión personal es que, si bien la pregunta ha sido elegida con criterios de cierta espectacularidad, los resultados no son sin embargo anormales, sino que podrían esperarse otros similares a preguntas de esa índole. La razón estriba, a nuestro juicio, en uno de los defectos de la mala enseñanza de la Matemática: la creación de automatismos en los alumnos, que les induce en muchos casos a efectuar cálculos mecánicos sin preguntarse si tienen o no el menor sentido.

1.2 Nosotros, por nuestra parte, tenemos algunas experiencias sobre el particular de las que, como botón de muestra, entresacamos las dos siguientes.

1) Resolver la ecuación $(\pi - 4) \cdot (x - 1) = 0$, en Bachillerato. Aproximadamente la mitad de la clase contestó: $\pi = 4$ y $x = 1$.

2) A varios alumnos de magisterio de la especialidad de Ciencias, pocos meses antes de terminar su carrera, y mientras realizaban sus prácticas de enseñanza en distintos colegios con estudiantes de último curso de la Enseñanza Básica, se les propuso que resolvieran delante de ellos la ecuación

$$\frac{x}{2} - \frac{12x - 11x}{7} = \frac{1}{5}$$

Algo más de la mitad procedió en primer lugar a quitar denominadores, con lo que se llegaba a: $35x - 120x + 110x = 14$, etc. A nuestras preguntas sobre su actuación, se respondió que el primer paso para resolver una ecuación es, siempre, quitar denominadores.

Y tratando de situaciones más comunes, ¿quién no se ha encontrado que, para calcular el módulo del número complejo $z = 3$ se efectúe: $|z| = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$? ¿O la aplicación sistemática del método de igualación, despejando la x de cada ecuación de un sistema lineal, aunque salte a la vista otro método mejor de resolución? ¿O la utilización de la fórmula general para el cálculo de las raíces de una ecuación completa de segundo grado, aunque ésta sea incompleta?.

1.3 Creo que estaremos de acuerdo en afirmar que esa forma de proceder de los alumnos obedece al excesivo automatismo en la utilización de reglas, lo que puede producir en los mismos una buena dosis de rigidez mental. Como dijo Puig Adam acerca de ello ([5]) hace ya muchos años: "Ese proceder es tanto más peligroso cuanto que el alumno mismo, en su afán de acción, acoge con alegría las reglas que le permiten actuar rápidamente antes de asimilar las esencias metódicas". Y concluye aconsejando la utilización de la regla, cuando ésta es "posterior al dominio del procedimiento, (...), dominio que significa flexibilidad de adaptación a cada caso particular, y no rigidez de acción".

También Polya ([4]) analiza este fenómeno, y nos invita a excluir de nuestros métodos de enseñanza la "pedantería", o aplicación de una regla al pie de la letra en forma rígida; tratando de inculcar en su lugar lo que denomina "maestría": aplicación de una regla con cierta soltura, con juicio, sin dejar que la formulación oscurezca el fin de la acción o las oportunidades de la situación.

1.4 Aunque el problema que acabamos de presentar creemos que ha quedado suficientemente discutido y definitivamente resuelto con las opiniones de Puig Adam y Polya, nos parece conveniente añadir otra consideración que nos viene sugerida simplemente al contemplar cuál fue el origen del Álgebra.

El Álgebra nació entre los árabes en busca de una economía de pensamiento al intentar mecanizar la solución de múltiples problemas, muchos de los cuales se resolvían anteriormente por procedimientos aritméticos. Precisamente, su tratamiento con este enfoque, además de contribuir a evitar esa automatización rígida de la que hablábamos, podría en algunos casos lograr otros dos objetivos: simplificar la resolución del problema, y lograr un mayor adiestramiento en el cálculo mental, tan denostado hoy día por el uso masivo de las calculadoras.

Problemas del estilo ([5]): "Pedro tiene 10 pesetas más que Juan, y entre los dos reúnen 40 pesetas; ¿cuántas pesetas tiene cada uno?", cuya solución, la inmensa mayoría de los alumnos trataría de hallar mecánicamente a partir de un sistema de ecuaciones. Sería bueno, en cambio, que intentaran resolverse aritméticamente y mediante cálculo mental. Se conseguirían así los objetivos formulados anteriormente.

2. OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

2.1 Los ejemplos que hemos mostrado en el apartado anterior, y su posterior análisis, dan pie a exponer otro tema de naturaleza muy distinta, pero en el que caben consideraciones similares.

Nos referimos ahora al problema del cálculo de máximos y mínimos que se presenta en los últimos cursos de la Enseñanza Secundaria y que, indefectiblemente puede resolverse con el auxilio del Cálculo Diferencial, mediante la técnica de la anulación de la primera derivada y posterior estudio del signo de la segunda.

El profesor, frecuentemente apremiado por la amplitud de los programas, no suele ofrecer a sus alumnos otros métodos de abordar el problema que el ya indicado, con lo que el alumno suele quedarse con la falsa impresión de que el Cálculo Diferencial es el único medio para tratar estas cuestiones, sin percibir que, por un lado, no siempre es posible construir una función simple que pueda ser sometida al proceso de derivación y, por otro, que en no pocas ocasiones, el problema podría acometerse con otras técnicas, también asequibles al alumno. Basten citar problemas como el del transporte o el de la dieta, que deben ser tratados con la ayuda de la programación lineal, o numerosos ejemplos geométricos que podrían mencionarse, en los que es bastante complicado expresar aquello que debe ser optimizado en forma de función sencilla.

En justicia, sin embargo, no dejar de reconocer el gran avance que supuso la utilización de los métodos infinitesimales para abordar estos problemas, lo que además ha permitido una estandarización en la resolución de los mismos. Parece obvio señalar que no criticamos su uso, sino su exclusividad.

2.2 Hay además otras razones, fundamentalmente de tipo histórico, que aconsejan presentar la resolución del tema que nos ocupa por otros procedimientos.

Ya los griegos se plantearon el problema de hallar, entre todas las figuras planas de perímetro constante, la de área máxima: así, Zenodorus (siglo II a.C.) y Pappus (siglo IV d.C.) demostraron que el círculo tiene mayor área que cualquier polígono isoperimétrico. Aunque posiblemente fue Arquímedes (siglo III a.C.) el primer científico que estudió problemas de optimización: por ejemplo, en su escrito "De la esfera y del cilindro" ya aparece resuelto uno de este tipo relativo a los segmentos esféricos.

Tuvo que esperarse en cambio hasta finales del siglo XVI y principios del XVII, a que alguno de los precursores del Cálculo Infinitesimal, como Kepler y Fermat, volvieran a enfrentarse a los problemas de máximos y mínimos (de hecho, este último contribuyó incluso al inicio del Cálculo de Variaciones, enunciando probablemente por vez primera un principio variacional), que quedaron definitivamente resueltos con el desarrollo posterior del Análisis.

Por otro lado, en 1782, Lhuilier resumió en *De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum* todos los descubrimientos hechos sobre este tema desde los griegos hasta R. Simpson, corrigió los errores de los que le habían precedido, y ensanchó considerablemente esta teoría con sus propios decubrimientos. Más tarde, en 1842, Steiner en dos memorias (*Journal de Crelle*, tomo XXIV), obras maestras de Geometría Sintética, presentó cinco métodos para la investigación de máximos y mínimos de figuras planas.

Sin más preámbulos pasamos ya a presentar algunos problemas de optimización, según habíamos anunciado.

3. UN PROCEDIMIENTO ALGEBRAICO DE RESOLUCIÓN

3.1 Mediante consideraciones algebraicas elementales y sin necesidad de acudir al Cálculo Diferencial, es posible resolver numerosos ejercicios de máximos y mínimos.

Comenzamos estableciendo dos resultados muy sencillos que permiten resolver numerosos problemas de optimización.

1º) La función $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, presenta un mínimo (si $a > 0$) o un máximo (si $a < 0$) en $x = -b/2a$.

Para ello, basta realizar simples transformaciones algebraicas y llegar a: $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$, de donde fácilmente se deduce el resultado.

2º) Si $k > 0$, la función $y = x + k/x$ presenta un mínimo en $x = \sqrt{k}$.

Para probarlo, es suficiente con efectuar la descomposición:

$$x + \frac{k}{x} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{k}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{k}.$$

3.2 Ofrecemos a continuación algunos ejercicios típicos de máximos y mínimos que se resuelven como aplicación inmediata de los dos resultados anteriores, aunque habitualmente se proceda utilizando el Cálculo Diferencial.

Ejemplo 1. De entre todos los pares de números positivos de suma constante s, hallar el de producto máximo.

Resolución. Como $x + y = s$, el producto será $p = xy = x(s - x) = -x^2 + sx$, que presentará un máximo en $x = \frac{s}{2}$, $y = \frac{s}{2}$; es decir, cuando los números sean iguales.

Otra manera de resolver este problema, también con recursos puramente algebraicos, es el siguiente: llamemos s a la suma y d a la diferencia. Se deduce fácilmente que $x = \frac{s + d}{2}$, $y = \frac{s - d}{2}$, por lo que el producto es $p = \frac{s^2 - d^2}{4}$. Como s es constante, p será máximo cuando d^2 sea lo menor posible, lo que sucede si $d = 0$; esto es, si $x = y = \frac{s}{2}$

Ejemplo 2. De entre todos los rectángulos de área constante A, hallar el de perímetro mínimo.

Resolución. Sea $2p$ el perímetro. Como $xy = A > 0$, se tiene: $p = x + y = x + \frac{A}{x}$ y, según hemos visto, existe un mínimo en $x = \sqrt{A}$, con lo que $y = \sqrt{A}$; o sea, el rectángulo es un cuadrado.

Ejemplo 3. En una semicircunferencia se levantan dos perpendiculares a un diámetro en sus extremos. Trazar una tangente a la semicircunferencia tal que el trapecio rectángulo formado tenga superficie mínima.

Resolución. Sean las perpendiculares $\overline{AE} = x$, $\overline{BF} = y$ (Fig. 1). El área del trapecio será: $S = \frac{1}{2}(x + y)\,2R = (x + y)\,R$. Como los triángulos AEO y ECO son rectángulos y tienen la hipotenusa común y un cateto igual, se tiene: $\overline{EC} = \overline{AE} = x$; y análogamente, $\overline{CF} = \overline{BF} = y$.

Sea $\alpha = \angle COA$, entonces $\angle AEC = \angle COB = \pi - \alpha$ y $\angle CFB = \alpha$. Pero como, por otro lado, es obvio que EO es bisectriz de $\angle COA$ y $\angle AEC$, entonces $\overline{FO}$ es bisectriz de $\angle COB$ y $\angle CFB$, y $\angle AEC + \angle CFB = \pi$; se tiene: $\angle OEC + \angle CFO = \pi/2$, con lo que $\angle EOF = \pi/2$, y el triángulo EOF es rectángulo en O. Por tanto, $\overline{OC}^2 = \overline{EC}\;\overline{CF}$; esto es, $xy = R^2$.

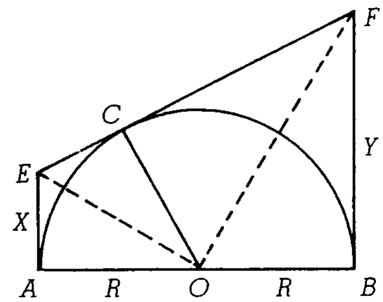

Figura 1

Así pues, $S = (x + \frac{R^2}{x})\,R$, por lo que S presenta un mínimo en $x = R$, $y = R$. En consecuencia, la tangente hay que trazarla paralela al diámetro dado.

Ejemplo 4. Hallar el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un cuadrado dado (se entiende que cada vértice del rectángulo debe estar sobre cada uno de los lados del cuadrado).

Resolución. Sea $ABCD$ el cuadrado de lado 2 (Fig. 2), en el que inscribimos el rectángulo $MNPQ$ y sean $\overline{AM} = x$, $\overline{MB} = 1 - x$. Evidentemente: $\overline{AM} = \overline{NA} = \overline{CQ} = \overline{PC}$.

Como los triángulos AMN y MBQ son rectángulos e isósceles, se tiene: $\overline{MN} = x\sqrt{2}$, $\overline{MQ} = (1 - x)\sqrt{2}$. Por tanto, el área del rectángulo es: $S = 2x\,(1 - x)$.

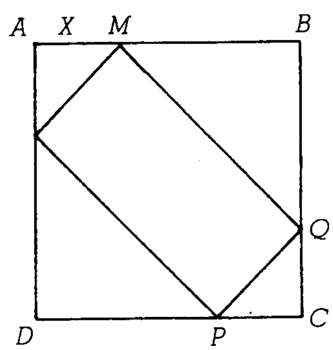

Figura 2

Obviando el factor 2, S es el producto de dos factores x y $1 - x$, de suma constante 1. Por tanto, el producto será máximo si los dos factores son iguales: $x = \frac{1}{2}$, $1 - x = \frac{1}{2}$. El área máxima se logra, pues, cuando el rectángulo es un cuadrado, de vértices los puntos medios del cuadrado dado.

Ejemplo 5. De entre todos los triángulos de igual perímetro y la misma base, hallar el de área máxima.

Resolución. Por la fórmula de Herón, el área del triángulo de lados a, b, c y perímetro $2p$ es: $S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$.

Por hipótesis, c y $2p$ son constantes.

Podemos escribir $p - b = p - (2p - (a + c)) = a + c - p$, luego $S = \sqrt{p(p-c)\,(p-a)\,(a+c-p)}$.

Evidentemente S será máximo si y sólo si lo es S^2, o si se prefiere, si y sólo si lo es $\frac{S^2}{p(p-c)}$ Se trata pues de hallar el máximo de la función $\frac{S^2}{p(p-c)} = (p-a)\,(a+c-p)$, que es producto de dos factores cuya suma es $(p-a) + (a+c-p) = c$, que es constante. Por el Ejemplo 1, esto se logrará cuando los dos factores son iguales: $p - a = a + c - p$, esto es cuando $2p = 2a + c$; pero $2p = a + b + c$, luego $a = b$. Así pues, el triángulo debe ser isósceles.

4. UN NUEVO PROCEDIMIENTO ALGEBRAICO

4.1 En el apartado anterior hemos hallado las coordenadas del vértice de una parábola como suele aparecer en los libros destinados a alumnos que aún no han estudiado Cálculo Diferencial, aunque hay otros métodos para ello. Así, vamos a exponer a continuación otro procedimiento, que nos dará pie a su generalización a otras situaciones (en el apartado siguiente indicaremos aún otro, de naturaleza geométrica).

Se trata, pues, de hallar el máximo o el mínimo de la función $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Escribamos $ax^2 + bx + c - y = 0$, y resolvamos la ecuación en x:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4ay}}{2a}$$

Para que $x \in R$, debe ser $b^2 - 4ac + 4ay \geqslant 0$; esto es, $4ay \geqslant 4ac - b^2$. Si $a > 0$, se tiene: $y \geqslant \frac{4ac - b^2}{4a}$; y si $a < 0$, entonces $y \leqslant \frac{4ac - b^2}{4a}$. En el primer caso, se deduce que $\frac{4ac - b^2}{4a}$ es el valor *mínimo* de y; en el segundo, que $\frac{4ac - b^2}{4a}$ es el valor *máximo* de y. En ambos, el discriminante es cero, luego

$x = -b/2a$

4.2 El lector podrá comprobar sin dificultad que los ejemplos 1, 2, 3, 4 y 5 anteriores pueden ser resueltos por este procedimiento. Pero su importancia radica en que hay muchos otros, de naturaleza no necesariamente geométrica o algebraica, a los que también se pueden aplicar. Nos referimos al cálculo de máximos y mínimos de numerosas funciones.

Ejemplo 6. Hallar los máximos y mínimos de la funcion $y = x - 4$.

Resolución. Expresamos la función como una ecuación de segundo grado en x: $yx^2 - (3y + 1)x - (3y - 4) = 0$, cuyas soluciones son:

$$x = \frac{3y + 1 \pm \sqrt{(3y + 1)^2 + 4y(3y - 4)}}{2y} = \frac{3y + 1 \pm \sqrt{21y^2 - 10y + 1}}{2y}$$

Para que x sea real, debe ser: $21y^2 - 10y + 1 \geqslant 0$, inecuación cuyas soluciones $y \leqslant 1/7$, $y \geqslant 1/3$.

Se tiene, por tanto, que $y = 1/7$ es el valor del máximo, y que $y = 1/3$ es el valor del mínimo. Como en ambos casos el discriminante es cero, resulta $x = 3y + 1$; valor que para $y = 1/7$ nos da $x = 5$, y para $y = 1/3$, $x = 3$. Así pues, la función presenta un máximo en $(5, 1/7)$, y un mínimo en $(3, 1/3)$.

El lector tendrá dificultad en comprobar por este método que la función $y = \dfrac{-2x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1}$ presenta un máximo en $(1/2, 2)$ y un mínimo en $(-2, -3)$· que la función $y = \dfrac{x^2 + 3}{-x^2 + 2x - 1}$ tiene un máximo en $(-3, -3/4)$ y que no tiene mínimo; etc.

5. PROCEDIMIENTOS GEOMÉTRICOS

5.1 En numerosos casos los problemas de optimización son de índole geométrica y, en no pocos, razonamientos de este tipo simplifican su resolución. Como botón de muestra, proponemos los tres siguientes ejercicios.

Ejemplo 7. De entre todos los triángulos rectángulos inscritos en una circunferencia de radio R, hallar el de área máxima.

Resolución. Este es un problema típico de resolución mediante el cálculo de derivadas, pero su solución puede también obtenerse a partir de razonamientos geométricos elementales. En efecto, el área es (Fig. 3): $S = 1/2 \cdot 2R \cdot h = Rh$, y como R es constante, S será máxima cuando lo sea h. Ahora bien, h es una semicuerda de la circunferencia, que alcanzará su valor máximo cuando sea igual al radio, esto es, cuando el triángulo es isósceles.

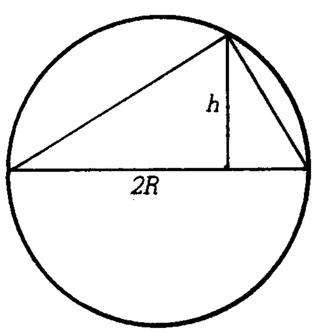

Figura 3

Ejemplo 8. ([2]) De entre todos los triángulos de base y ángulo opuesto a la misma dados, probar que el isósceles es el que tiene mayor la bisectriz de dicho ángulo.

Resolución. (Hablaremos de bisectriz para denominar la longitud del segmento de la misma interior al triángulo).

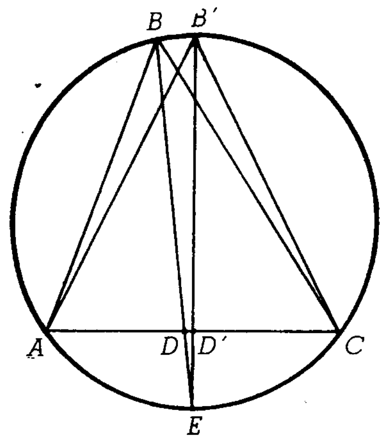

Figura 4

Sea ABC (Fig. 4) un triánulo cualquiera de base AC y ángulo B dados, y sea $\overline{BD}$ su bisectriz interior correspondiente. Si dibujamos la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, se observa que todos los triángulos que cumplen las condiciones exigidas se obtienen al unir los vértices A y C del lado $\overline{AC}$ con un punto cualquiera (distinto de A y C) de la circunferencia. En particular, el triángulo isósceles que cumple las condiciones exigidas es $AB'C$, donde la bisectriz de B', que es $\overline{B'D'}$, pasa por el centro de la circunferencia. Sea $\overline{B'E}$ el diámetro que se obtiene prolongando $\overline{B'D'}$, y se trata de probar que $\overline{BD} < \overline{B'D'}$

Evidentemente la bisectriz de B también corta a la circunferencia en E, ya que E es el punto medio del arco AC. Como $\overline{B'E}$ es un diámetro y $\overline{BE}$ una cuerda, se deduce que $\overline{BE} < DE$. Pero, por otro lado, en el triángulo rectángulo $DD'E$, se tiene: $\overline{D'E} < \overline{DE}$.

De las dos últimas desigualdades se llega a que $\overline{BE} - \overline{DE} < \overline{B'E} - \overline{D'E}$; esto es $\overline{BD} < \overline{B'D'}$, ℓ c.q.d.

En contraste con la sencillez con que ha sido resuelto este ejercicio, se muestra a continuación un camino netamente más complicado si se trata de abordar con las técnicas propias del Cálculo Diferencial:

Introducimos como variable auxiliar el ángulo x señalado en la Fig. 5. Se trata de optimizar la bisectriz y, que intentamos expresar en función de x y de los datos b y B.

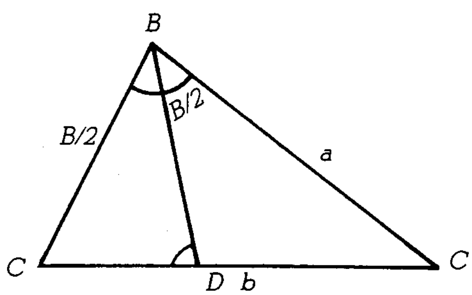

Figura 5

Por el téorema de los seños aplicado al triángulo ABC: $\dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} C}$, y como $C = \pi - \dfrac{B}{2} - (\pi - x) = x - \dfrac{B}{2}$, se tiene: $c = \dfrac{b \operatorname{sen}(x - B/2)}{}$.

Haciendo lo mismo con el triángulo ABD: $\dfrac{C}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{Y}{\operatorname{sen} A}$, $A = \pi - (x + \dfrac{B}{2})$, luego $C = \dfrac{y \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(x + B/2)}$.

Por tanto: $\dfrac{b \operatorname{sen}(x - \frac{B}{2})}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{y \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(x + B/2)}$, y luego $y = \dfrac{b \operatorname{sen}(x + 2) \cdot \operatorname{sen}(x - \overline{2})}{\operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} x}$.

Fácilmente se llega a que $\operatorname{sen}(x + B/2) \cdot \operatorname{sen}(x - B/2) = 1/2 (\cos B - \cos 2x)$; por tanto $y = \dfrac{b (\cos B - \cos 2x)}{2 \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} x}$.

Derivando: $y' = \dfrac{b}{2 \operatorname{sen} B} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x \cdot 2 \operatorname{sen} 2x - (\cos B - \cos 2x) \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$, y utilizando algunas fórmulas de trigonometría, se llega a que:

$$\operatorname{sen} x \cdot 2 \operatorname{sen} 2x - (\cos B - \cos 2x) \cdot \cos 2x = \cos x (2 \operatorname{sen}^2 B/2 + 2 \operatorname{sen}^2 x).$$

Por tanto, $y' = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \cdot \dfrac{\cos x (\operatorname{sen}^2 B/1 + \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x}$, que igualada a cero nos proporciona: $\cos x = 0$, o sea, $x = \pi/2$.

Se comprueba sin dificultad que y'' es siempre negativa, por lo que se trata de un máximo. Al ser $x = \pi/2$, se deduce que $\overline{BD}$ es perpendicular a $\overline{AC}$, luego el triángulo es isósceles.

Ejemplo 9. Un cubo es cortado por un plano que contiene a una de sus diagonales. ¿Cómo debe ser trazado dicho plano para que el área de la sección sea mínima?.

Resolución. Evidentemente la sección es un paralelogramo $MDNF$ (Fig. 6), cuya área es $S = \overline{FD} \cdot \overline{MP}$, siendo $\overline{MP}$ perpendicular a la diagonal $\overline{FD}$. Como el factor $\overline{FD}$ es constante, el área será mínima cuando lo sea el segundo factor, $\overline{MP}$. Pero en tre los posibles segmentos que unen un punto de la recta FD con otro de la recta AE (ambas rectas se cruzan), la menor longitud la tiene el segmento de la perpendicular común a dichas rectas; esto es, el segmento $\overline{M'O}$ que une el punto medio M' de la arista $\overline{AE}$ con el purlto medio O de la diagonal $\overline{FD}$. En efecto: El triángulo $FM'D$ es isósceles (pues $\overline{FM'}$ y $\overline{M'D}$ son dos diagonales de sendas caras del cubo) y, por tanto, $\overline{M'D}$ es perpendicular a $\overline{FD}$; y como también el triángulo EOA es isósceles (pues $\overline{EO}$ y $\overline{OA}$ son semidiagonales del cubo), $\overline{M'O}$ es asimismo perpendicular a $\overline{AE}$.

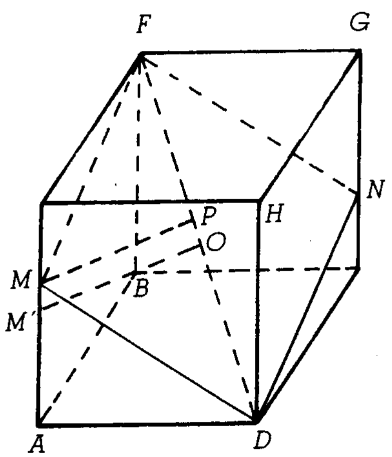

Figura 6

Por lo tanto, el plano pedido debe pasar por el punto medio M' de la arista $\overline{AE}$ (y el punto medio de la arista $\overline{CG}$). De esta forma, el área de la sección es $S = \overline{FD} \cdot \overline{M'O}$.

Si llamamos $\overline{BF} = a$, será $\overline{BD} = a\sqrt{2}$, luego $\overline{FD} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$. Por tanto, $\overline{FO} = a\sqrt{3}$, $\overline{M'F} = \sqrt{a^2 + (a/2)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, y $\overline{M'O} = \sqrt{\overline{M'F}^2 - \overline{FO}^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Se tiene, por último, $S = a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$ unidades de superficie.

Utilizando el Cálculo Diferencial puede asimismo resolverse el problema, aunque como en el ejemplo anterior, presente alguna mayor dificultad. Lo haremos a continuación suprimiendo ciertos cálculos intermedios algo farragosos.

Si llamamos a la arista a (Fig. 7), e introducimos las variables x y α, el área de la sección $MDNF$, que es un paralelogramo, será:

$$S = \overline{FN} \cdot \overline{ND} \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

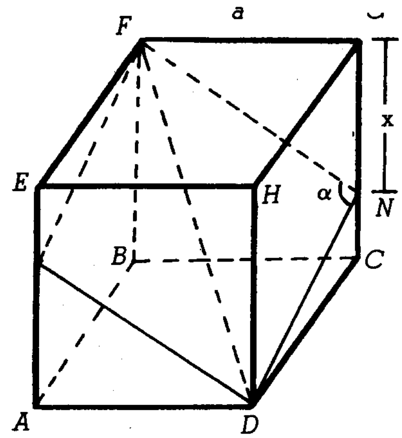

Figura 7

En el triángulo FGN, se tiene $\overline{FN} = \sqrt{a^2 + x^2}$ y, en el triángulo DNC: $\overline{ND} = \sqrt{a^2 + (a - x)^2}$. Aplicando el teorema del coseno al triángulo FDN: $\overline{FD}^2 = \overline{FN}^2 + \overline{ND}^2 - 2\overline{FN} \cdot \overline{ND} \cdot \cos \alpha$, y como $\overline{FD} = a\sqrt{3}$, se tiene:

$$3a^2 = a^2 + x^2 + a^2 + (a - x)^2 - 2\sqrt{a^2 + x^2}\sqrt{a^2 + (a - x)^2} \cos \alpha.$$

Luego $\cos \alpha = \dfrac{x^2 - \infty x}{\sqrt{a^2 + x^2}\sqrt{a^2 + (a - x)^2}}$, y operando, $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{a\sqrt{2a^2 - 2ax + 2x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}\sqrt{a^2 + (a - x)^2}}$.

Por tanto, $S = \overline{FN} \cdot \overline{ND} \cdot \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{a^2 + x^2}\sqrt{a^2 + (a - x)^2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2a^2 - 2ax + 2x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2} \cdot \sqrt{a^2 + (a - x)^2}} = a\sqrt{2a^2 - 2ax + 2x^2}$.

Derivndo: $S' = \dfrac{a(2x - a)}{\sqrt{2a^2 - 2ax + 2x^2}}$, e igualando a cero, se tiene que, $x = a/2$.

Se comprueba que S'' en $x = a/2$ es positiva; luego efectivamente se trata de un mínimo. Y al sustituir x por $a/2$ en S, se obtiene igualmente que $S = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$ unidades de superficie.

5.2 Hay otros muchos casos en los que resolver geométricamente problemas de optimización no presenta una especial ventaja, sino que ofrece una dificultad semejante al empleo de atros métodos. Como ejemplos de ello citaremos los dos siguientes.

En primer lugar, veamos que la determinación del vértice de una parábola, que ya ha sido obtenido por procedimientos puramente algebraicos, puede también hallarse teniendo en cuenta la propiedad geométrica de la parábola que se indica a continuación.

La parábola de ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene su eje en posición vertical. Si $V(p, q)$ son las coordenadas del vértice V, se cumplirá que $f(p + h) = f(p - h)$, $\forall h \in \mathbf{R}$. Tomando por ejemplo $h = 1$, se tiene:

$$a(p + 1)^2 + b(p + 1) + c = a(p - 1)^2 + b(p - 1) + c,$$

de donde se vuelve a llegar a que $p = -b/2a$.

Observemos también que el Ejemplo 3 puede ser resuelto por consideraciones de tipo geométrico. Veamos que la tangente a la circunferencia hay que trazarla paralela al diámetro inicial. En efecto:

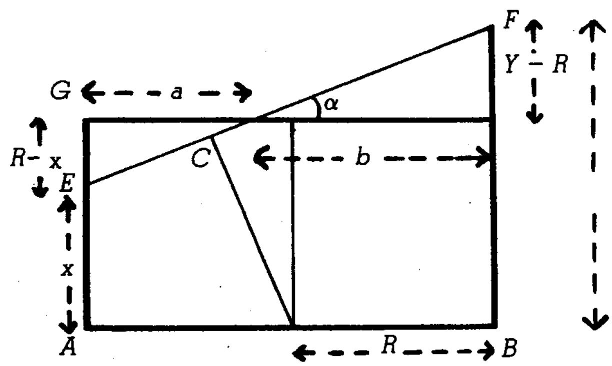

Figura 8

Supongamos que trazamos otra tangente EF en un punto C (Fig. 8). Se trata de probar que $S_{AGHB} < S_{AEFB}$.

Como $S_{AGHB} = 2R^2$, $S_{AEFB} = (x + y)R$, bastará con probar que $2R < x + y$.

Evidentemente, tan $\alpha = y - R = R - x$, pero $b > a$, luego $y - R > R - x$, esto es, $2R < x + y$, ℓ'. c.q.d.

5.3 Veamos por último que también en algunas ocasiones es peor la utilización de razonamientos geométricos que el empleo de otros métodos de resolución.

Tomemos para ello el Ejemplo 5, que ha sido resuelto por consideraciones puramente algebraicas (su resolución a partir del Cálculo Diferencial también es sencilla, pues bastaría con derivar la función que obtuvimos $S = \sqrt{p(p-c)(p-a)(a + C - p)}$, donde c y p son constantes, y posteriormente igualar a cero).

Vamos a probar de nuevo, con un razonamiento de tipo geométrico, que de entre todos los triángulos de igual perímetro y la misma base AB, el de mayor área es el isósceles.

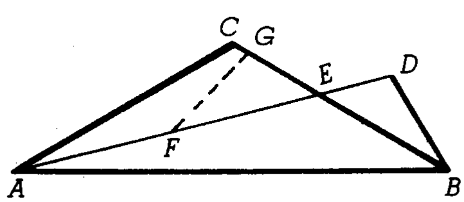

Figura 9

Sea ADB (Fig. 9) un triángulo no isósceles (por ejemplo, con $\overline{BD} < \overline{AD} < \overline{AB}$) construido sobre la base $\overline{AB}$, sea ACB un triángulo isósceles (de lado desigual $\overline{AB}$) con el mismo perímetro que el anterior: $\overline{AD} + \overline{BD} = \overline{AC} + \overline{CB}$, y sea E el punto de intersección de $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$. Se trata de probar que $S_{ADB} < S_{ACB}$, para lo que resulta suficiente demostrar que $S_{EDB} < S_{ACE}$.

Tomemos sobre $\overline{AE}$ un segmento $\overline{FE} = \overline{EB}$, y sobre $\overline{EC}$ el segmento $\overline{EG} = \overline{ED}$. Como los triángulos EFG y EDB son iguales, bastará con probar que el triángulo EFG está contenido en el ACE; es decir, que F cae entre A y E, y que G, lo hace E y C.

Es obvio que F está entre A y E, porque $\angle EBA = \angle CAB$, es mayor que $\angle EAB$, por lo que el lado opuesto $\overline{AE}$ es mayor que $\overline{EB}$, o que su igual $\overline{FE}$.

Para probar que G cae entre E y C, basta con demostrar que $\overline{FG} + \overline{GE} < \overline{FC} + \overline{CE}$ o bien, añadiendo a ambos miembros $\overline{AF} + \overline{FE}$, que $\overline{AF} + \overline{FE} + \overline{FG} + \overline{GE}$ es menor que $\overline{AF} + \overline{FC} + \overline{CE} + \overline{FE}$. Ahora bien, $\overline{GE} = \overline{ED}$, $\overline{FG} = \overline{BD}$, $\overline{FE} = \overline{EB}$, luego $\overline{AF} + \overline{FE} + \overline{FG} + \overline{GE} = \overline{AE} + \overline{BD} + \overline{ED} = \overline{AD} + \overline{BD} = \overline{AC} + \overline{CB}$; y $\overline{AF} + \overline{FC} + \overline{CE} + \overline{FE} = \overline{AF} + \overline{FC} + \overline{CE} + \overline{EB} = \overline{AF} + \overline{FC} + \overline{CB}$.

El problema ha quedado, pues, reducido a demostrar que $\overline{AC} + \overline{CB} < \overline{AF} + \overline{FC} + \overline{CB}$; esto es, que $\overline{AC} < \overline{AF} + \overline{FC}$, lo que es evidente.

6. ALGUNOS PROBLEMAS HISTÓRICOS DE OPTIMIZACIÓN

Concluimos este artículo presentando dos problemas de tipo histórico.

6.1 Problema de Van Schooten

Francis Van Schooten (1615-1660) propuso el siguiente problema: "Determinar el punto del suelo desde el cual se ve un segmento bajo un ángulo máximo (Fig. 10). Dicha cuestión surgió al intentar hallar el punto del suelo, desde el cual un paseante que se acerca en línea recta hacia una estatua colocada desde un pedestal, ve a dicha estatua bajo un ángulo máximo. Aunque posiblemente merezca la pena mostrar una versión más actual del mismo problema: Si un futbolista (de *soccer*) corre con el balón por la banda de un campo de futbol hacia la meta (o portería) contraria, averiguar desde que punto de la misma ve dicha portería con mayor ángulo; es decir, determinar cuál es la posición óptima para el disparo a puerta desde una banda de un campo de fútbol.

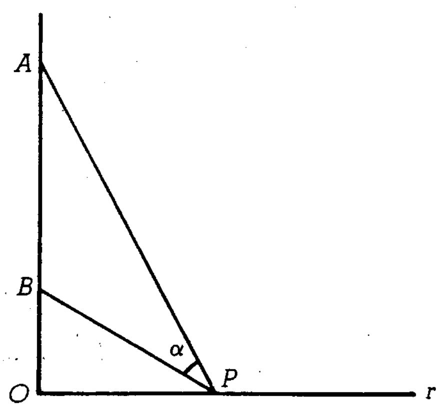

Figura 10

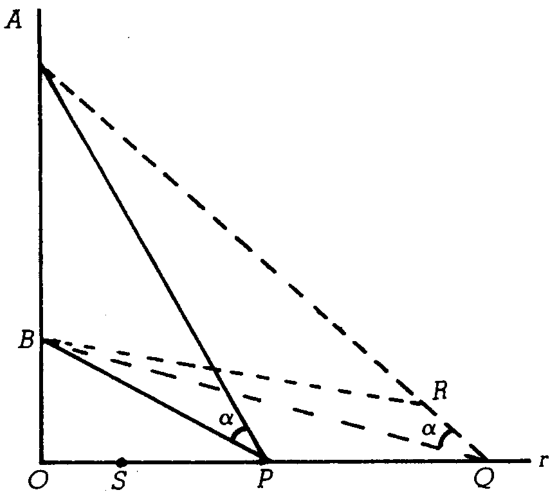

Figura 11

Como no se tenía el recurso de las derivadas Van Schooten lo resolvió geométricamente de la forma que se indica a continuación.

Su idea fundamental consistió en trazar circunferencias que pasaran por A y B, y conjeturar que el punto pedido P se obtendría en aquélla que además fuese tangente a la recta r. Probemos que en efecto, esa es la solución.

Habrá que demostrar que el ángulo $\varphi = \angle APB$ (Fig. 11) es mayor que cualquier otro obtenido uniendo A y B con otro punto cualquiera de la recta r.

Sea Q un punto cualquiera de r situado a la derecha de P. Se trata de ver que si $\alpha = AQB$, entonces $\alpha < \varphi$. En efecto:

Como α es un ángulo exterior a la circunferencia, se tiene: $\alpha = \angle ARB - \angle RQB$; pero ARB está inscrito en la circunferencia y abarca el mismo arco que φ; entonces $\angle ARB = \varphi$, y $\alpha = \varphi - RBQ$, luego $\alpha < \varphi$.

El razonamiento para un punto S cualquiera situado en r, a la derecha de P es análogo, y no lo repetiremos.

Por último, la potencia del punto O respecto a la circunferencia es: $\overline{OP}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$, luego P está situado a una distancia $\overline{OP}$ tal que $\overline{OP} = \sqrt{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}$.

Este problema puede también resolverse fácilmente con la ayuda del Cálculo Diferencial.

Sean $\overline{OB} = b$, $\overline{OA} = a$, $\overline{OP} = x$. Entonces, $\tan \varphi = \tan (\angle APO - BPO)$ $\dfrac{\frac{a}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{x}} = \dfrac{(a-b)x}{x^2 + ab}$. Se trata de hallar, por tanto, el máximo de la función:

$\varphi = \tan^{-1} \dfrac{(a-b)x}{x^2 + ab}$, con lo que basta con hallar φ', y luego estudiar el signo de φ''.

Aunque en realidad podría simplificarse, razonando que φ será máxima si y sólo si lo es $y = \tan \varphi$ (pues $0 < \varphi < \pi/2$), con lo que bastaría hallar el máximo de $y = \dfrac{(a-b)x}{x^2 + ab}$. O incluso, razonando que y será máxima si y sólo si su inversa $\dfrac{1}{y} = \dfrac{x^2 + ab}{(a-b)x}$ es mínima; esto es, si $z = \dfrac{x^2 + ab}{x} = x + abx^{-1}$ lo es. Como $z' = 1 - abx^{-2}$, se deduce que $x = \sqrt{ab}$ es el mínimo de la función z, ya que además, $z''(\sqrt{ab}) > 0$; o lo que es lo mismo, que $x = \sqrt{ab}$ es el máximo de la función φ, resultado al que se había llegado con el razonamiento geométrico inicial.

6.2 Problema de Fagnano

Fue propuesto por Toschi di Fagnano en 1775, y dice lo siguiente: Dado un triángulo acutángulo, inscribir en él el triángulo de perímetro mínimo.

Fagnano resolvió su problema por medio del Cálculo Infinitesimal, lo que no ofrece especial interés. Expondremos a continuación un método geométrico de resolución, debido a L. Fejér ([1]).

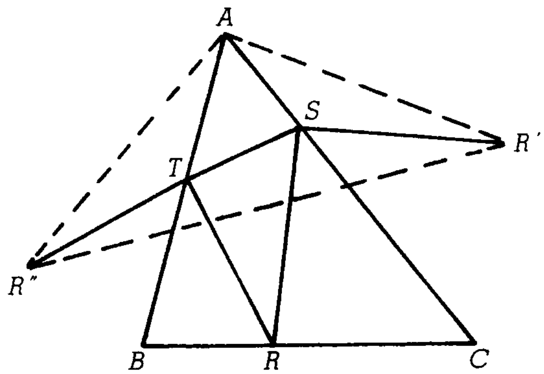

Figura 12

Sea ABC el triángulo dado (Fig. 12), y RST un triángulo cualquiera inscrito en él. Sea R' el punto simétrico de R respecto de $\overline{AC}$, y R'' el simétrico de R respecto de $\overline{AB}$.

Queremos que $P = \overline{RS} + \overline{ST} + \overline{TR}$ sea mínimo. Ahora bien, $\overline{RS} = \overline{R'S}$, $\overline{TR} = \overline{TR''}$, luego debe ser mínimo $P = \overline{R'S} + \overline{ST} + \overline{TR''}$; es decir, la longitud del camino de R' a R'' que, obviamente, será más corto cuando se vaya por una línea recta; esto es, cuando R'', T, S y R' estén alineados, y se tenga $P = \overline{R'R''}$.

El problema ha quedado, pues, planteado en los siguientes términos: de entre todas las posibles elecciones de R en $\overline{BC}$, hallar aquélla que haga mínima $\overline{R'R''}$.

Pero por otro lado, el triángulo $\overline{AR'R'}$ es isósceles, y la base será mínima cuando los lados iguales lo sean; esto es, cuando $\overline{AR}$ sea la menor distancia posible, o sea, cuando $\overline{AR}$ sea perpendicular a $\overline{BC}$; es decir, si $\overline{AR}$ es la altura sobre $\overline{BC}$.

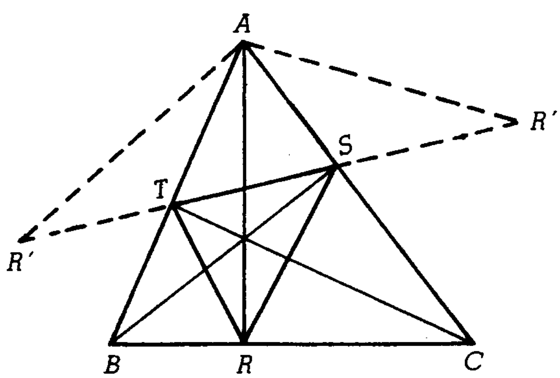

Figura 13

El razonamiento que hemos hecho sobre A podríamos haberlo realizado sobre B o sobre C, con lo que se llegaría a que $\overline{BS}$ y $\overline{CT}$ deben ser las alturas sobre $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. En consecuencia, el triángulo pedido debe tener por vértices los pies de las alturas del triángulo dado. De manera que, de entre todos los triángulos inscritos en ABC, el que tiene perímetro mínimo es el triángulo *órtico* o triángulo *podal* de ABC, que se tiene en la Fig. 13.

BIBLIOGRAFÍA

H.S.M. Coxeter. *Fundamentos de Geometría*. Ed. Limusa, México, 1988.

Equipe "Elémentaire". IREM de Grenoble, *Quel est l'age du Capitaine?*. Boletín 323, APMEP, 1980.

V. Gusev y otros. *Solving Problems in Geometry*. Ed. Mir, Moscú, 1988.

G. Polya. *Cómo plantear y resolver problemas*. Ed. Trillas, México, 1986.

P. Puig Adam. *La Matemática y su enseñanza actual*. Ministerio de Educación, Madrid, 1960.