Algebra geométrica mediante cubos

Uriel González Montoya
Gerente Mathema ltda
Coordinador de talleres para docentes
de matemáticas Grupo Ábaco
Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín
Asesor Pedagógico OIA
(Organización Indígena de Antioquia)

Resumen

Cuando se hace una visión retrospectiva de la forma en la cual fueron enseñados los conceptos entorno al algebra en bachillerato, se ve que tal vez, no fueron recibidos de la mejor forma, uno podría argumentar, sin necesidad de demeditar la labor docente, que existían otros caminos posibles para llegar a la fundamentación conceptual de un temas tan importantes como los productos notables y la factorización.

Algunos de estos caminos, desde distintas vertientes, ya han sido explorados y sugeridos por matemáticos de muchas épocas. Las exploraciones que se muestran en este taller se hacen desde la geometría, desde allí y usando las áreas de cuadriláteros y los volúmenes de prismas y pirámides se llegan a establecer áreas y volúmenes que al ser expresados geométricamente dan lugar a factorizaciones.

La representación visual del binomio de Newton propuesta por Jhon Wallis y las representaciones que se pueden extraer de Euclides y las sugerencias de Dienes, son las que permiten estructurar y hacer un recorrido por las representaciones planas y tridimensionales de las factorizaciones.

Fundamentación teórica

Sir Thomas Healt, muestra una traducción y una interpretación geométrica de uno de los teoremas de Euclides " si se bisecta una recta y se le añade una recta en línea recta, el rectángulo contenido por la entera con la recta añadida y la añadida, junto con el cuadrado sobre la mitad, es igual al cuadrado sobre la línea formada por la mitad y la recta añadida[9]" es esta tal vez la primera aproximación a lo que nosotros llamamos y conocemos como algebra geométrica.

Igualmente Carl Boyer en Historia de la matemática en el capítulo dedicado a la matemática árabe, muestra como Al-khowarizmi representaba geométricamente las soluciones a las a ecuaciones de tipo cuadrático, esta interpretación de alguna manera está muy emparentada con la propuesta desde la geometría trabajada por los griegos.

Pero es realmente la propuesta planteada por Jhon Wallis para la representación del binomio de Newton y la propuesta de Allan Gibb de usar modelos físicos para factorizar polinomios desde donde partimos, y mostramos interpretaciones que permiten entender geométricamente las factorizaciones de los casos cúbicos y los desarrollos cúbicos para la resta y la suma del binomio de Newton.

[9] Citado por ASGER ABBOE en matemáticas episodios históricos desde Babilonia hasta Tolomeo. Pag 86

Metodología

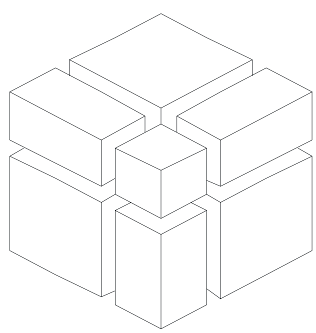
La metodología utilizada para el desarrollo del taller toma elementos del constructivismo, el trabajo se desarrolla por equipos desde los cuales las personas interactúan con la guía y con los materiales propuestos, se discute en el equipo sobre las alternativas de solución de cada una de las actividades y se llega a consensos.

Existe una comunicación horizontal entre el orientador del taller 'tallerista' y los asistentes al taller, por cuanto el tallerista está pendiente del desarrollo de la actividad y se la pasa continuamente interviniendo en los equipos, aclarando dudas y haciendo preguntas que orienten hacia la fundamentación de los conceptos o que permitan mostrar otras formas de interpretación de las temáticas planteadas.

Al finalizar el taller el orientador es el encargado de recoger y coordinar la presentación de los acuerdos y conclusiones a los que llegó cada uno de los equipos. Finalmente se sintetiza todo lo expuesto y se evalúa con el grupo asistente la pertinencia de lo tratado durante el taller.

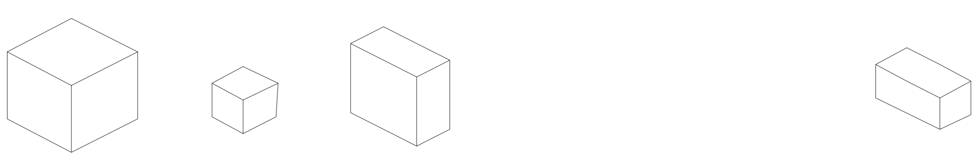
Actividades

Para el desarrollo del taller partiremos desde la expresión conocida como binomio de Newton $(a \pm b)^n$. Esta expresión debe su nombre a Isaac Newton (1642-1727), quien logró encontrar una fórmula que permitió el desarrollo del Binomio con cualquier exponente. Y lo representaremos mediante como la siguiente estructura.



La estructura de la ilustración está compuesta por 8 piezas, 6 prismas y 2 cubos.

Teniendo estas formas lo primero que debes hacer es determinar el volumen de cada una de las piezas. Se hace necesario asumir una unidad de medida, pero esto no quiere decir que los valores preestablecidos tengan que permanecer fijos.



Pieza	Número de Piezas	Área de la Base	Altura	Volumen una Pieza	Volumen Total
1		a^2			a^3
2	1		b	b^3	
3					
4	3				$3(b^2 a)$

Suma y agrupa el volumen de cada una de las piezas. Debes llegar a una muy conocida fórmula matemática.

Usando los cubos sueltos construye, uno por uno, los cubos que se muestran en la siguiente tabla.

Para cada caso debes llenar la tabla y construir el cubo.

a	b	$(a + b)^3$	Volumen del cubo a^3	volumen de 3 prismas iguales de área de la base a^2 y altura b	volumen de 3 prismas iguales de área de la base b^2 y altura a	volumen del cubo b^3
1	1					
1	2					
2	1					
2	2					
3	1					
1	3					

Para esta actividad se hace el proceso contrario, si antes uniste los volúmenes, ahora se hace un proceso de extracción en el cual ordenadamente y de forma compacta, se vayan extrayendo cada una de las piezas listadas en la tabla.

Segunda actividad (a-b)3

Vamos ahora a explorar una interpretación geométrica de una diferencia de dos cantidades al cubo $(a – b)^3$

Lo primero que debemos tener en claro es que al final debemos obtener un cubo de lados (a – b).

Esta actividad permite comprobar visualmente el desarrollo de la fórmula $a^3-3a^2b+ 3ab^2- b^3 = (a-b)^3$, por tanto se partirá de ella y mediante procesos de resta y adición de volúmenes y llevando un registro sistemático de cada operación se podrá verificar el resultado.

Para este caso, se parte de un arreglo igual al anterior y se varían las dimensiones. El cubo inicial tendrá lado a, mientras que una de las piezas cúbicas tendrá como lado b. Es importante anotar que para efectos del material el volumen de a debe ser mayor que el volumen de b.

En la tabla se propone llevar un registro ordenado de cada una de las acciones que indica la fórmula $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Cada que se quite un prisma se entenderá como restado y cada que se adicione se entenderá como sumado. Además de lo anterior se busca que cada uno de los prismas extraídos sea compacto.

PASOS	volumen del cubo inicial a^3	volumen de 3 prismas iguales de área de la base a^2 y altura b restados	volumen de 3 prismas iguales de área de la base b^2 y altura a sumados	volumen del cubo b^3 restado	volumen del cubo final $(a-b)^3$
Paso 1					
Paso 2					
Paso 3					
paso 4					
paso 5					
paso 6					
paso 7					
paso 8					
Verificación de la fórmula					

Una vez que se ha comprobado la validez del desarrollo se propone hacer un ejercicio para estimular el pensamiento espacial. Recuerda que debes extraer cada uno de los prismas de forma compacta.

volumen final $(a-b)^3$	volumen del primer cubo a^3	volumen de 3 prismas iguales de área de la base a^2 y altura b	volumen de 3 prismas iguales de área de la base b^2 y altura a	volumen del segundo cubo b^3
8	27			1
	64			2
	125			3

Conclusiones

Siempre es posible fundamentar el algebra utilizando modelos físicos, que permiten hacer un recorrido si se quiere desde el reconocimiento de polinomios, pasando por los productos notables y llegando hasta la solución de ecuaciones de tipo cuadrático y cúbico.

Para enseñar conceptos matemáticos mediante materiales concretos no se requiere de alta tecnología, ni de inversiones onerosas, se puede hacer desde el uso de materiales sencillos como los cubos, los cuales como se muestra en el desarrollo del taller posibilitan una sencilla construcción conceptual.

La modelación física permite una mejor interacción y un aprendizaje más enriquecedor del concepto, por cuanto, al mismo tiempo, se ponen en juego muchos más sentidos, que en el proceso de aprendizaje tradicional.

Referencias bibliográficas

BOYER, Carl, Historia de la matemática, Alianza editorial 1986.

GIBB, Allan A. More on physical models for factoring polynomials. Mathematics teacher febreruary 1974. Vol 67 n.2

HENNING, Harley B. Geometric solutions to quadratic and cubic Equations. Mathematics Teacher febreruary 1972.

HOLZMULLER, Gustavo, Tratado metódico de de matemáticas elementales. Tomo primero, editorial Labor s.a. España 1950.

ASGER, Aaboe. Matemáticas episodios históricos desde Babilonia hasta Tolome. Editorial Norma Cali Colombia 1964.

LAURIC Boris. Picture Play Leads to algebraic patterns. The Mathematics Teacher Vol.86, No. 5. Mayo de 1993

Grupo Abaco Universidad Nacional de Colombia. Taller áreas mágicas

GONZALEZ , Uriel. Taller algebra geométrica