Sobre un curso de análisis lógico

RESUMEN

Se propone la creación de un curso básico para la formación lógico-analítica de alumnos del nivel medio superior o de los primeros años de licenciaturas muy relacionadas con matemáticas.
Se desarollan brevemente los temas relacionados con el lenguaje de las matemáticas y las técnicas lógico-matemáticas como son: criterios de verdad, equivalencias lógicas, análisis de argumentos correctos y métodos de demostración. El objetivo principal es resolver el problema de comprender y usar correctamente el lenguaje analítico de las matemáticas, las técnicas lógico-matemáticas y el concepto de argumento correcto, antes de entender el contenido de la matemática misma.

Introducción

Este artículo trata sobre Lógica Matemática y Enseñanza, aunque **no** sobre la enseñanza de la lógica matemática propiamente dicha, sino sobre algunos elementos del análisis lógico necesario para comprender el lenguaje de la matemática y la estructura lógica de sus demostraciones.

Una inquietud muy natural en un alumno interesado en un curso de lógica matemática, es la de "aprender a demostrar en matemáticas". Esta inquietud proviene del hecho de que el alumno **no** tiene claro qué es demostrar, ni por qué hay que demostrar, ni tiene claro el concepto de verdad en matemáticas;

José Alfredo Amor
Universidad Nacional Autónoma de México

sólo tiene una regular preparación en la manipulación mecánica de algunos conceptos matemáticos, pero carece de espíritu analítico. Es afecto a desarrollos formalistas-mecanicistas y a la memorización; pero esa falta de espíritu analítico le provoca un rechazo al análisis de conceptos, principios y métodos básicos de la matemática como, por ejemplo, el concepto de límite, el principio de inducción matemática y el método de reducción al absurdo.

Lo primero que hay que aclarar ante esta inquietud, es que no es posible enseñar a demostrar en matemáticas, ya que no hay "recetas" para ello. Sin embargo, se pueden dar elementos suficientes para que uno mismo vaya aprendiéndolo.

Con el objeto de subsanar todas las deficiencias antes mencionadas, lo cual **no** se hace en ningún curso regular, sino que se efectúa autodidácticamente a base de aclarar confusiones y rectificar errores, proponemos un curso básico que se podría llamar "Análisis Lógico" o "Introducción a la Lógica" o "Lógica Básica", y el cual no es un curso de Lógica Matemática propiamente dicho, pero que pretende resolver este problema que tiene el alumno al enfrentarse al lenguaje y técnicas lógico-matemáticas, antes de poder entender la matemática misma.

Este curso podría ser un curso propedéutico para licenciaturas relacionadas con matemáticas, el cual podría no tener créditos, sino únicamente el requisito de ser aprobado antes o durante los primeros semestres de la licenciatura.

Para explicar más precisamente la intención de este curso, es conveniente presentar sus objetivos por temas. Así pues, los temas de este Curso de Análisis Lógico son los siguientes:

TEMAS DEL CURSO

1. El lenguaje de las matemáticas como lenguaje analítico.
2. Criterios de verdad.
3. Equivalencias lógicas.
4. Análisis de argumentos.
5. Métodos de demostración en matemáticas.
6. Heurística.

1. EL LENGUAJE DE LAS MATEMÁTICAS COMO LENGUAJE ANALÍTICO

Objetivo: Que el alumno aprenda a analizar el lenguaje matemático y lo pueda expresar en un lenguaje analítico, y se pueda expresar correctamente con él; que sepa traducir enunciados del lenguaje natural al lenguaje analítico y viceversa.

No se pretende formalizar todo el lenguaje coloquial, sino principalmente el lenguaje de contenido matemático, en especial las expresiones de la forma:

"todo S es P" y "algún S es P"

representadas como:

$$\forall x(Sx \longrightarrow Px) \quad y \quad \exists x(Sx \land Px).$$

respectivamente, donde Sx simboliza "x es S" y Px simboliza "x es P"; estos dos tipos de expresiones son las que el alumno tiene más dificultad para representar, ya que el uso de cuantificadores y variables no es común en el lenguaje coloquial.

Ejemplos de traducción de la forma anterior son las cuantificaciones acotadas, que son expresiones de la forma:

$$\forall x{\in}A\ P(x) \quad y \quad \exists x{\in}A\ P(x)$$

donde A es un conjunto y P(x) es una afirmación P acerca de x. Las expresiones anteriores, son abreviaturas usuales, respectivamente, de los enunciados:

$$\forall x\ (x{\in}A \rightarrow P(x)) \quad y \quad \exists x\ (x{\in}A \land P(x))$$

Hay que hacer notar que aunque el lenguaje analítico o formal es limitado por su carácter rigorista, tiene varias ventajas, como son: a) evitar la ambigüedad del lenguaje natural, b) ser conciso, c) inducir a la concentración en lo que es esencial, y d) economía de pensamiento; pero aun así, muchas nociones se pueden expresar de varias formas distintas entre sí, pero lógicamente equivalentes; es decir, que ambas significan exactamente lo mismo, para cualquier interpretación. Por ejemplo, expresemos "hay un único número primo par" de tres formas distintas pero lógicamente equivalentes, usando Px para simbolizar "x es número primo par":

i) $\exists x\ [Px \land \forall y\ (Py \longrightarrow x = y)]$
(Hay un individuo tal que: es primo par y todo primo par es él.)

ii) $\exists x\ Px \land \forall x\ \forall y\ [Px \land Py \longrightarrow x = y]$
(Hay un individuo que es primo par. Y cualesquiera dos primos pares son el mismo.)

iii) $\exists x\ \forall y\ [x = y \Leftrightarrow Py]$
(Hay un individuo tal que: es igual a todos los primos pares y sólo a esos.)

También hay que hacer notar que algunos enunciados no se pueden traducir con todo su significado por el contenido psicológico que tienen algunas palabras como, por ejemplo, la palabra "pero", cuya traducción aceptada es una conjunción; es decir, simplemente como una "y", pero que, sin embargo, significa algo más que "y"; algo como indeseado o no esperado o que se quiere remarcar. Esto **no** se recupera al traducirlo al lenguaje analítico. Por ejemplo, "6 es par pero no es múltiplo de 4", se traduce como "6 es par **y** 6 **no** es múltiplo de 4".

Otro ejemplo es la expresión "a menos que", la cual se traduce simplemente como una disyunción, o sea, como "o", aunque el contenido psicológico induce a muchas personas a traducirla como una disyunción excluyente: "uno u otro pero no ambos".

El lenguaje analítico es un valioso instrumento para analizar, aclarar y expresar en forma precisa, el significado de enunciados del lenguaje ordinario, ya sea del discurso común o de las ciencias. Esta notación permite enunciar lo que deseamos, más explícitamente que el lenguaje ordinario, y expresar ideas complejas evitando las ambigüedades que la estructura del lenguaje cotidiano no puede eliminar con facilidad. Pero estas ventajas tienen un precio: hay que aprender a hacer distinciones poco comunes. Hay que dominar un nuevo lenguaje, y las nuevas formulaciones de enunciados aparentemente simples, son resultado de un trabajo analítico cuidadoso.

A pesar de lo anterior, el uso del lenguaje lógico se ha revelado como útil no sólo en los campos prácticos del discurso, sino, ante todo, en la investigación de la lógica y la matemática puras y aplicadas. O sea en investigaciones en las cuales hay que registrar distinciones sutiles, y en las que vale la pena conseguir un máximo de explicitación y de rigor en los enunciados y en las demostraciones.

2. CRITERIOS DE VERDAD

Objetivo: Que el alumno conozca los criterios de verdad de los conectivos, los cuantificadores y la igualdad, y sepa analizar a partir de ellos, la verdad o falsedad de cualquier enunciado interpretado, especialmente el caso del condicional.

Es necesario conocer claramente los criterios de verdad para la negación, la disyunción, la conjunción, el condicional, el bicondicional, la cuantificación existencial, y la cuantificación universal.

Supongamos que P,Q denotan afirmaciones expresadas en lenguaje analítico y que en una interpretación dada son verdaderos o falsos. Los criterios de verdad son:

1. Una *negación* "**no** P" denotada ($\neg P$), es verdadera con la interpretación dada, si P es falsa con esa interpretación.

2. Una *disyunción* "P **o** Q" denotada ($P \vee Q$), es verdadera con la interpretación dada, si P es verdadera con esa interpretación o Q es verdadera con esa interpretación. Queda incluida aquí la posibilidad de que ambas, P y Q, sean verdaderas con esa interpretación.

3. Una *conjunción* "P **y** Q" denotada ($P \wedge Q$), es verdadera con la interpretación dada, si P es verdadera con esa interpretación, y Q es verdadera con esa interpretación.

4a. Una *condicional* "**si** P **entonces** Q" denotada ($P \rightarrow Q$), es falsa con la interpretación dada, si P es verdadera con esa interpretación y Q es falsa con esa interpretación.

4b. Una *condicional* "**si** P **entonces** Q" denotada ($P \rightarrow Q$), es verdadera con la interpretación dada, si **no es falsa** con esa interpretación; es decir si no sucede que P es verdadera y Q es falsa con esa interpretación.

5. Una *bicondicional* "P **si y sólo si** Q" denotada ($P \Leftrightarrow Q$), es verdadera con la interpretación dada, si ambas P y Q son verdaderas con esa interpretación, o bien ambas P y Q son falsas con tal interpretación.

6. Una *cuantificación existencial* ($\exists x \quad Q$) es verdadera con la interpretación dada, si **hay** un individuo **en el universo de esa interpretación**, tal que Q es verdadera con tal interpretación respecto a ese individuo.

7. Una *cuantificación universal* ($\forall x \quad Q$) es verdadera con la interpretación dada, si **para todos** los individuos **en el universo de esa interpretación**, Q es verdadera con esa interpretación respecto a cada uno de ellos.

Es importante tener claro que la verdad o falsedad de un enunciado en una interpretación depende de lo que signifiquen —con la interpretación dada— las relaciones, operaciones y objetos individuales acerca de los cuales "habla" el enunciado. Esto es, la verdad de un enunciado depende de la interpretación y no es en general absoluta, sino relativa a la interpretación:

Un mismo enunciado puede ser verdadero en una interpretación y falso en otra; por ejemplo el enunciado

$$\exists x \ \forall y \ (x < y \vee x = y)$$

(hay un individuo en la relación "<" con, o es igual a, cualquier individuo), es verdadero en la interpretación que consiste en $\mathbb{N}$ con su relación de orden usual, pero es falso en la interpretación consistente en $\mathbb{Z}$ con su orden usual. Es verdadero también en la interpretación que consiste en los conjuntos con la relación "c" de contención propia.

Un caso especial que es excepción de la relatividad de la verdad, explicada en los párrafos anteriores, es el caso de los enunciados universalmente verdaderos o universalmente válidos, que son verdaderos en cualquier interpretación, debido sólo a su forma, por lo cual se consideran vacios de contenido, pero muy útiles en las demostraciones, como se verá mas adelante.

Ejemplos de enunciados universalmente válidos son:

i) $P(c) \vee \neg P(c)$ — "c *cumple la propiedad* P *o no la cumple*"

ii) $(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$ — "*es el caso que* x *cumple* Q *si cumple* P, *si y sólo si es el caso que* x *no cumple* P *si no cumple* Q"

iii) $(P(c) \rightarrow Q(c)) \Leftrightarrow \neg (P(c) \wedge \neg Q(c))$ — "*es el caso que* c *cumple* Q *si cumple* P, *si y sólo si no es el caso que* c *cumpla* P *y no cumpla* Q"

iv) $\exists x \forall y \, P(x, y) \rightarrow \forall y \, \exists x \, P(x,y)$ — "*si hay alguien en la relación* P *con todos, entonces para todos hay alguien en la relación* P *con ellos*"

v) $P(c) \rightarrow \exists x\, P(x)$ "*si c cumple la propiedad* P, *entonces hay alguien que cumple la propiedad* P"

Un interesante ejemplo de enunciado universalmente válido es

$$\neg\, \exists x\ \forall y\ (Ryx \Leftrightarrow \neg Ryy)$$

"No hay en el universo de interpretación un individuo tal que estén en la relación **R** con él, todos los individuos (de ahí) que no están en la relación **R** consigo mismos, y sólo esos."

Este enunciado universalmente válido es la explicación lógica a la Paradoja de Russell, ya que interpretando Ryx como "$y \in x$" en el universo de los conjuntos, y traduciéndolo al lenguaje natural, tenemos la versión conjuntista de la paradoja: "no hay un conjunto cuyos elementos sean exactamente los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos y sólo esos".

Interpretando Ryx como "x rasura a y" en el universo de los hombres de Jonesville, tenemos la versión popular del barbero: "no hay un hombre en Jonesville que rasure exactamente a aquellos que no se rasuran a sí mismos y sólo a esos" Véase [1].

3. EQUIVALENCIAS LÓGICAS

Objetivo: Que el alumno tenga claro el concepto de equivalencia lógica y sepa negar correctamente cualquier proposición con las equivalencias de la negación, así como saber aplicar otras equivalencias lógicas, como la contrapositiva.

Dos enunciados P y Q son lógicamente equivalentes si y sólo si para cualquier interpretación, ambos P y Q significan exactamente lo mismo; es decir, para cualquier interpretación ambos P y Q son verdaderos o ambos son falsos. Así pues, sin importar cual sea la interpretación, si P es verdadero entonces Q es verdadero y si Q es verdadero entonces P es verdadero. Esto lo denotamos $P \equiv Q$ y se lee "P es lógicamente equivalente a Q", o bien "P y Q son lógicamente equivalentes".

Si P y Q son proposiciones cualesquiera, las siguientes son ejemplos de equivalencias lógicas:

$$\neg\neg P \equiv P$$
$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$$
$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$$
$$\neg(P \longrightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q)$$
$$\neg(P \Leftrightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$$
$$\neg\, \forall x\, P \equiv \exists x\, \neg P$$
$$\neg\, \exists x\, P \equiv \forall x\, \neg P$$

$$(P \longrightarrow Q) \equiv (\neg Q \longrightarrow \neg P)$$
$$(P \longrightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$$
$$(P \longrightarrow Q) \equiv \neg\,(P \wedge \neg Q)$$
$$\forall x\, P \equiv \neg\, \exists x\, \neg P$$
$$\exists x\, P \equiv \neg\, \forall x\, \neg P$$
$$\forall x\ (P \wedge Q) \equiv \forall x\, P \wedge \forall x\, Q$$
$$\exists x\ (P \vee Q) \equiv \exists x\, P \vee \exists x\, Q$$
$$\forall x\ (P \vee Q) \not\equiv \forall x\, P \vee \forall x\, Q$$
$$\exists x\ (P \wedge Q) \not\equiv \exists x\, P \wedge \exists x\, Q$$

Es muy común que se nieguen mal la condicional y las cuantificaciones porque no están claros sus criterios de verdad (véase 2). Asimismo, el alumno debe manejar la contrapositiva de una condicional, sin confundirla con la recíproca o inversa; así como otras equivalencias lógicas, sobre todo las que relacionan los cuantificadores con los conectivos, ya que en estos casos es muy común cometer errores que repercuten en la matemática. Por ejemplo, al simbolizar el axioma de extensionalidad en teoría de conjuntos. "dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos":

$$\forall x\ \forall y\ [\forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y]$$

Si el cuantificador $\forall z$ queda fuera del paréntesis, el sentido cambia: $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y]$ lo cual significa que "dos conjuntos son iguales, si tienen algún elemento en común o si carecen de algún elemento en común"; en esta situación con $x = \{a, b\}$, $a \neq b$, $y = \{a\}$, $z = a$, tengo $\{a, b\} = \{a\}$! De hecho la segunda fórmula es estrictamente más fuerte que el axioma de extensionalidad; es decir, lo implica lógicamente.

Otro ejemplo es el siguiente, al simbolizar:

i) f es continua en [a, b]:

$$\forall x \in [a,b]\ \forall \varepsilon > o\ \exists \delta > o\ \forall y \in [a,b]\ (|x-y| < \delta \longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon)$$

ii) f es uniformemente continua en [a, b]:

$$\forall \varepsilon > o\ \exists \delta > o\ \forall x \in [a,b]\ \forall y \in [a,b]\ (|x-y| < \delta \longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon)$$

La diferencia entre i) y ii) es sólo "un cambio en el lugar" del cuantificador acotado $\forall x \in [a, b]$. Sin embargo, (ii) implica lógicamente (i), pero no a la inversa, además el sentido intuitivo es muy distinto entre (i) y (ii).

Que un enunciado **A** implica lógicamente a un enunciado **B**, significa que para cualquier interpretación, en el caso de que el enunciado **A** sea verdadero, entonces el enunciado **B** tiene que ser necesariamente verdadero. Obsérvese que si **A** ≡ **B** entonces **A** implica lógicamente a **B** y **B** implica lógicamente a **A**.

Otra manera de caracterizar que **A** implica lógicamente a **B**, es afirmando que (**A** → **B**) es un enunciado universalmente válido.

4. ANÁLISIS DE ARGUMENTOS

Objetivo: Que el alumno sepa qué es un argumento y sepa analizar argumentos, para determinar si un argumento dado es correcto o no, **independientemente** de la verdad o falsedad de la conclusión y de las premisas; es decir, analizar el argumento por su forma lógica y **no** por su contenido.

Un *argumento* es un conjunto finito y ordenado de afirmaciones de las cuales se dice que la última, llamada *conclusión*, se sigue de las anteriores, llamadas *premisas*.

Un argumento es correcto si y sólo si la conclusión es consecuencia lógica de las premisas; es decir, para cada interpretación del lenguaje, la cual haga verdaderas a todas las premisas, hace necesariamente verdadera a la conclusión. Un argumento es correcto o incorrecto independientemente de su interpretación.

Dicho de otra manera, que **no** haya interpretación alguna para la cual las premisas fueran todas verdaderas y la conclusión falsa.

Esto es sumamente importante en matemáticas, ya que las pruebas en matemáticas son argumentos o sucesiones de argumentos, y deben ser argumentos correctos. Resulta pues obvia la importancia de saber si un argumento dado es correcto o no lo es. Hay ejemplos de argumentos: correctos con conclusión verdadera, incorrectos con conclusión verdadera, correctos con conclusión falsa, e incorrectos con conclusión falsa. (Aquí verdadera o falsa se refiere a la interpretación usual o intencional.)

Obsérvese que en un argumento correcto, si las premisas son verdaderas con alguna interpretación, la conclusión será necesariamente verdadera con **esa** interpretación. Por lo tanto, en un argumento correcto, si la conclusión es falsa de acuerdo con **alguna** interpretación, entonces al menos una de las premisas debe ser falsa con **esa** interpretación.

Si el argumento es incorrecto lo único que podemos decir es que **hay** una interpretación para la cual las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa, pero con **otras** interpretaciones puede suceder cualquiera otra posibilidad.

Ejemplos de lo anterior, con la interpretación intencional para verdadero o falso, son:

A) ARGUMENTO CORRECTO CON CONCLUSIÓN VERDADERA

Todo múltiplo de 6 **es** múltiplo de 3.
12 **es** múltiplo de 6.
∴ 12 **es** múltiplo de 3.

B) ARGUMENTO CORRECTO CON CONCLUSIÓN FALSA

Todo múltiplo de 4 **es** par.
5 **es** múltiplo de 4.
∴ 5 **es** par.

C) ARGUMENTO INCORRECTO CON CONCLUSIÓN VERDADERA

Todo número con **exactamente dos** divisores **es** primo.
4 **no** tiene **exactamente dos** divisores.
∴ 4 **no es** primo.

D) ARGUMENTO INCORRECTO CON CONCLUSIÓN FALSA

Todo múltiplo de 6 **es** par.
8 **no es** múltiplo de 6.
∴ 8 **no es** par.

Debe ser claro que los dos ejemplos de argumentos incorrectos C) y D) tienen la misma forma y que el hecho de que la conclusión pueda ser verdadera (con la interpretación intencional) es una contingencia; es decir, se debe a la casualidad si únicamente consideramos las premisas dadas.

Debe ser claro también que en el ejemplo B) de argumento correcto con conclusión falsa, por el hecho de ser un argumento correcto, necesariamente alguna de las premisas debe de ser falsa con la interpretación intencional, que en estos casos es la de la aritmética de los números naturales.

Ahora bien, ¿cómo podemos demostrar que un argumento incorrecto es efectivamente incorrecto?. La manera de hacerlo es dando una interpretación conveniente o adecuada a los términos y predicados involucrados, de modo que resulte (en esa interpretación) que las premisas sean todas verdaderas y la conclusión sea falsa. Esto ocurre en el argumento D) con la interpretación usual tal como está.

Para demostrar que el argumento C) es incorrecto, daremos **otra** interpretación con la misma forma lógica con la cual las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa; una interpretación tal para C) es:

Todo polinomio con **exactamente**
dos raíces **es** cuadrático.
$x^2 - 4x + 4$ **no** tiene **exactamente dos**
raíces. (su única raíz (doble) es 2)
$\therefore$ $x^2 - 4x + 4$ **no es** cuadrático.

La manera directa de demostrar que un argumento es correcto consiste en **suponer** verdaderas a todas las premisas, sin tomar en cuenta la interpretación intencional ni ninguna interpretación particular, y a partir de eso, usando únicamente los criterios de verdad, hacer ver que la conclusión es necesariamente verdadera; independientemente de cual fuera la interpretación. En algunos casos la manera directa no es realizable, por lo que hay que hacerlo de modo indirecto, por reducción al absurdo.

Una última observación: si en un argumento, la conclusión es falsa con alguna interpretación, sólo podemos concluir que, o bien el argumento es incorrecto, o bien alguna de las premisas es falsa.

5. MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS

Objetivo: Que el alumno sepa qué es demostrar en matemáticas y conozca diferentes métodos de demostración: directo, por contrapositiva, por casos, por reducción al absurdo, y otros esquemas de demostración, que deben ser argumentos correctos.

En este punto es muy importante discutir acerca de ¿por qué es necesario demostrar en matemáticas? Esto lleva a establecer la distinción entre "mostrar" y "demostrar". Hay pruebas de afirmaciones que realmente son "mostraciones" en el sentido de sólo mostrar, para que se vea "con los ojos", que la afirmación es verdadera. Tal puede ser el caso de una mostración visual del Teorema de Pitágoras; pero hay razones que justifican la necesidad de demostrar, en el sentido de apartarse de la evidencia visual, en el caso de que ésta no sea posible o no sea clara, o bien pueda llevar a confusiones. Esto último se puede ejemplificar con "pruebas" falaces que usan la evidencia visual de una figura, de modo incorrecto.

Así pues, el alumno deberá tener conciencia de **lo que sí es** y de **lo que no es** demostrar, así como de cuándo una demostración está terminada. También es muy importante aclarar la diferencia entre el proceso de descubrimiento de una demostración (heurística) y la formalización y organización lógico-deductiva de ella, lo cual constituye la demostración propiamente dicha.

Entre los métodos de demostración indirectos, están los siguientes:

1) *Por contrapositiva*. Para afirmaciones de la forma "si A entonces B"; consiste en suponer "**no** B" y demostrar con esta suposición extra, que "**no** A". Así pues, lo que se hace es probar: "si no B entonces no A", que es lógicamente equivalente a la afirmación original; es decir, el enunciado $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ es universalmente válido.

2) *Por casos*. Para una afirmación A, cuando hay una serie de afirmaciones (casos) $C_1, C_2, \ldots, C_n$, con $n \geq 2$, tales que agotan todas las posibilidades, es decir que necesariamente se cumple una de ellas, y se prueba que:

si C_1 entonces A, si C_2 entonces A, ..., si C_n entonces A.

Puede entonces concluirse A, ya que se probó el enunciado:

$$(C_1 \vee \ldots \vee C_n) \wedge (C_1 \longrightarrow A) \wedge \ldots \wedge (C_n \longrightarrow A)$$

y el enunciado $[(C_1 \vee \ldots \vee C_n) \wedge (C_1 \rightarrow A) \wedge \ldots \wedge (C_n \rightarrow A)] \rightarrow A$, es universalmente válido.

3) Por reducción al absurdo. Para probar una afirmación A, si se supone que **no** A y con esta suposición extra se prueba una afirmación **no** B contradictoria con otra afirmación B ya demostrada; o bien con la suposición extra **no** A se prueba una afirmación B y se prueba otra afirmación **no** B. Entonces podemos concluir que A. Esto se debe a que las afirmaciones

$$[(\neg A \longrightarrow \neg B) \wedge B] \longrightarrow A$$

$$[(\neg A \longrightarrow B) \wedge (\neg A \longrightarrow \neg B)] \longrightarrow A$$

son universalmente válidas.

6. HEURÍSTICA

Objetivo: Que el alumno conozca algunas ideas acerca del proceso de descubrimiento o heurística.

Muchas veces el proceso de descubrimiento de una demostración es exactamente al revés del proceso lógico deductivo para presentarla como una demostración organizada, terminada y rigurosa. Se recomienda, especialmente para la prueba directa de enunciados condicionales, o sea afirmaciones de la forma "si A entonces B", construir un "camino" lógico deductivo, de A hacia B, pero generalmente se construye desde B; así pues, los pasos del proceso serían:

1o. Suponer A, analizar su significado y contenido, y tenerlo presente para usarlo cuando sea conveniente.

2o. Analizar B, su significado y contenido. Es a lo que queremos llegar.

3o. Reducir el problema a tener alguna afirmación C_1, de modo que B sea consecuencia correcta y fácil de descubrir a partir de C_1.

4o. Posiblemente con A obtengo C_1, y entonces por 3o. obtengo B y termino. Si no:

5o. Reducir el problema a tener C_2 tal que C_1 sea consecuencia correcta de C_2.

6o. Posiblemente con A obtengo C_2 y entonces por 5o. obtengo C_1, y por 3o. obteng B y termino. Si no:

7o. Reducir ....., etc.

En algún paso, si el problema fue convenientemente reducido, con A obtengo C_n y entonces tengo el camino completo y se presenta la demostración en orden lógico-deductivo y no heurístico:

$A, C_n, C_{n-1}, \ldots, C_2, C_1, B.$

Otra idea para resolver problemas y que es muy útil en matemáticas, es la idea de representación de un área de conocimiento en otra: para un problema que en su área no es claro, el hecho de representarlo en otra área, con relaciones abstractas iguales, puede ser la llave de su solución. Así, en matemáticas muchos problemas revolucionarios han sido los no bien definidos en su área; aquellos que conviene representarlos en otra área.

Ejemplos históricos de este estilo son la creación de la Geometría Analítica, por Descartes, al representar la geometría en el álgebra; y el genial proceso de Gödel de representar la metateoría de la aritmética en la aritmética misma.

CONCLUSIONES

Creemos que estos objetivos, si se realizan, encauzarán al alumno por el camino analítico y le darán una disciplina y seguridad en su trabajo, que le permitirá a su vez tener una actitud analítica y crítica ante las matemáticas, lo cual le servirá en cualquier área de matemáticas puras, aplicadas o computación.

Esta presentación no ha pretendido explicar todo lo que sería un curso de "Análisis Lógico", sino dar sólo algunas ideas generales sobre el mismo. Una exposición complementaria que desarrolla más cada uno de los temas propuestos se encuentra en proceso en un proyecto de texto: **Un curso de Análisis Lógico**.

Creemos que este material es de suma importancia para la formación de los alumnos de matemáticas de nivel medio superior y de los primeros años de licenciatura de carreras que estén muy relacionadas con matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

Aunque la bibliografía sobre el tema tratado es relativamente escasa, y muchas obras tocan sólo parte de los temas, incluyo la siguiente:

Amor, José Alfredo. "Paradojas intuición y lógica", **Revista Ciencias**, No. 29, 1993.

DeLong, H. *A profile of mathematical logic*, Addison Wesley, 1970.

Easley, Jack A. "Lógica y heurística en la reforma curricular de las matemáticas", *Matemáticas y Enseñanza*, Nos. 7 y 8, SMM, noviembre 1976.

Lemmon, E.J. *Beginning Logic*, Chapman & Hall, 1971.

Martínez Gallardo, V. "Introducción al análisis lógico: Del lenguaje natural al lenguaje analítico", tesis UNAM, 1987.

National Council of Teachers of Mathematics. "Sugerencias para resolver problemas", *Temas de Matemáticas*, No.17, Editorial Trillas, 1970.

National Council of Teachers of Mathematics. "Lógica", *Temas de Matemáticas*, No. 12, Editorial Trillas, 1975.

Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas*, Editorial Trillas, 1965.

Solow, D. *Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas, Limusa, 1987.*

Tarski, Alfred. *"Truth and proof", Scientific American*, Jun. 1969.

Torres Torija, Manuel. *Planteo y resolución de problemas*, Editorial Trillas, 1976.

Zubieta, Gonzalo. *Lógica elemental*, ANUIES, 1973.

Zubieta, Gonzalo. *Manual de Lógica para Estudiantes de Matemáticas*, Editorial Trillas, 1977.

Zubieta, Gonzalo. *Taller de Lógica Matemática (Análisis Lógico)*, Mc Graw-Hill, 1993.