

# La Enseñanza de la Demostración: Aspectos Teóricos y Prácticos<sup>1</sup>

Toutes les questions décisives se tranchent en définitive par un recours plus ou moins direct à l'évidence.

F. Gonseth: *Les mathématiques et la réalité*

Car notre esprit n'est point satisfait, s'il ne sait seulement que la chose est, mais pourquoi elle est; ce qui ne s'apprend point par une démonstration qui réduit à l'impossible.

Arnauld et Nicole: *La logique ou l'art de penser*

## Resumen

Este trabajo aborda el problema que representa para los estudiantes el aprendizaje de la demostración. La idea principal es que el concepto que tienen los alumnos acerca de la demostración, esta subentendida por la conceptualización que tienen de los objetos matemáticos, de manera que la enseñanza de la demostración debe ser acompañada de un cambio conceptual en los propios objetos matemáticos. Este cambio conceptual requiere, en particular, una transformación a nivel de las representaciones (especialmente de la figura, en el caso de la Geometría) y a nivel de la organización y la información (que toma la forma de un nuevo modo de organización lógico-deductivo). Es aquí donde la demostración por el ejemplo genérico (Balacheff, 1982) puede, desempeñar un papel didáctico importante en un contexto de "problema abierto". Al final de este trabajo se identifican dos papeles diferentes que puede desempeñar la figura en la etapa heurística asociada a un proceso de demostración.

**Luis Radford**

Université Laurentienne

Ontario, Canada

<sup>1</sup> Este artículo tiene origen en un curso taller que el autor dirigió en la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, que tuvo lugar en la Universidad de Panamá en agosto de 1993.

## 1. Introducción

Desde hace algunos años, investigaciones desarrolladas en el campo de la psicología y de la educación matemática se han interesado en comprender las dificultades que origina el aprendizaje de la demostración en los estudiantes de la escuela secundaria. Este interés resulta de la constatación de la insuficiencia de los modelos didácticos generalmente empleados en el aula. Sin duda, el modelo que todavía predomina es aquél en el que la demostración aparece como un instrumento esencialmente lógico,<sup>2</sup> en el que el aprendizaje de la demostración se realiza a través del estudio de elementos de lógica y la clasificación de demostraciones en función de la estructura formal subyacente (demostraciones por reducción al absurdo, por disyunción de casos, directas, etc.).

Para entender los problemas del aprendizaje y de la enseñanza de la demostración, los estudios recientes parten de un marco de análisis que rebasa el de la lógica sola. Muchos de esos estudios, influidos en particular, por el desarrollo de nuevas corrientes psicológicas, como la cognitivista o la socioconstructivista, y nuevas disciplinas, como la Inteligencia Artificial (cf. Leron, 1983), han planteado el problema de la adquisición de la demostración en términos ligados a fenómenos de validación, comunicación o ambos, que se encuentra fuera del paradigma lógico; específicamente, en muchos de esos casos, el aprendizaje de la demostración se concibe como un aprendizaje ligado a una situación de interacción social, en la que un alumno en busca de cierto conocimiento intenta convencerse a sí mismo o a un compañero de la validez de ese conocimiento. La pregunta que surge es la de saber si, en un entorno socioconstructivista, el eje "validez" es suficiente para provocar y desencadenar en los alumnos el modo de funcionamiento que caracteriza a la demostración matemática. Duval y Egret (1989) parecen más bien reticentes a la suficiencia de un sistema tal y afirman que la demostración es una actividad cognitiva específica, de naturaleza *privada*. En ese orden de ideas, Wheeler (1990) afirma que la modelización de la demostración en clase, como un proceso social de negociación, es terriblemente artificial, dado que ese proceso en el desarrollo de las matemáticas ha tenido lugar en épocas distintas, poniendo como protagonistas a personas diferentes que han tomado parte en el debate de validación sin estar necesariamente "frente a frente". La forma compleja y estructurada de la demostración deductiva –en la que Bell reconocía ya en uno de los primeros trabajos didácticos importantes sobre la demostración, hace muchos años, "el tercer sentido de la prueba" (Bell, 1976)– parece requerir una intervención didáctica externa, específica, susceptible de regular el sistema, a través de la explicitación de las expectativas científicas en juego.

<sup>2</sup> Las raíces de ese modelo se remontan, como se sabe, a la concepción de la enseñanza de las matemáticas que derivó de la introducción de la Matemática Moderna al currículo escolar.

## 2. Conceptualización de las matemáticas y la demostración

Planteado en sus términos más generales, el objeto de la *demostración* es el de *mostrar* ciertos "hechos", como lo sugiere la propia raíz etimológica (cf. Guichard, 1993). Ahora bien, ¿cuáles son los "hechos" sobre los que nuestra atención se va a enfocar? ¿Cómo vamos a mostrarlos? Las respuestas a esas preguntas van a depender de la conceptualización que se tenga de las matemáticas y pueden diferir de una conceptualización a otra. Así, mientras que para un alumno un dibujo puede ser tomado como la demostración irrefutable de una propiedad geométrica —demostración por *visualización*—, ese dibujo puede no ser considerado como demostración por otro alumno. La demostración por *visualización* resulta de la concepción (que podríamos llamar "ingenua") de un mundo matemático en el que los objetos se asimilan a sus representaciones y se estructuran en relaciones imposibles de cambiar de un dibujo a otro. El razonamiento deductivo —concebido como encadenamiento de proposiciones matemáticas— no tiene cabida en este tipo de demostración, en el que el aspecto perceptual desplaza *por completo* al cálculo de relaciones.<sup>3</sup> Por ejemplo, dentro de esta conceptualización, la tangente que *vemos* perpendicular al diámetro del círculo sobre un dibujo *será* a priori perpendicular, en otros círculos y diámetros. Dentro de esta conceptualización de las matemáticas, el "ejemplo único" adquiere, como se ve, rango de demostración. Otro alumno puede, por el contrario, preguntarse si la propiedad que muestra el dibujo es invariable o no. En este caso, la conceptualización de la matemática conlleva a otro tipo de funcionamiento de la demostración.

Este breve ejemplo ilustra el hecho de que la enseñanza de la demostración no es simplemente un problema que involucra sólo la *idea* de demostración, sino que concierne a la actividad matemática misma.

Conviene recordar a ese propósito que, en un estudio de corte epistemológico, Arsac (1987) ha sugerido que la emergencia de la demostración en Grecia antigua está relacionada con la formulación de proposiciones generales y con una transformación de los objetos matemáticos de un rango empírico a una idealización de éstos.<sup>4</sup> Conviene igualmente mencionar aquí, que E. Barbin (1987), en un estudio sobre los indivisibles en el siglo XVII, ha mostrado la aparición de un tipo de demostración cuyo objetivo es clarificar y *explicar* a la vez, y que es opuesta o contrastada a las demostraciones euclidianas cuyo objetivo es, en esencia, la prueba lógica. En el mismo orden de ideas, en el siglo XVII, Arnauld y Nicole, en uno de los más notables tratados

<sup>3</sup> El *cálculo* de relaciones al que nos referimos aquí no designa necesariamente un cálculo proposicional o predicativo en el sentido de la lógica formal; éste puede ser un cálculo sobre relaciones con *significaciones* ligadas al contexto del problema. Es un cálculo subtendido por lo que hemos llamado un *razonamiento semiformal* (Radford, 1985).

<sup>4</sup> Un relato histórico de las "grandes etapas" de la demostración puede encontrarse en Lefebvre, 1991, 1992.

escritos sobre lógica, imputaban a Euclides y a los geómetras el defecto de tener más cuidado en la certeza o certitud que en la evidencia, y en ocuparse más en convencer al espíritu que en aclararlo, pues, decían, los geómetras no han tomado en cuenta que para alcanzar una ciencia perfecta no es suficiente estar convencido de que una cosa es cierta, sino que también es necesario saber por qué es cierta (cf. Arnauld y Nicole, 1683, pp. 398-99). Para estos autores, pues, la posesión de la verdad lógica no es suficiente: la ciencia —la Geometría, en este caso— debe a la vez *explicar* sus verdades, lo que no ocurre sobre todo en las demostraciones por reducción al absurdo. Es por ello que, más adelante, dichos autores dicen:

“Estas clases de demostraciones que muestran que una cosa es así, no por sus principios, sino por algo absurdo que resultaría si ella fuera de otra forma, son muy usuales en Euclides. Sin embargo, es claro que ellas pueden convencer al espíritu, pero no lo aclaran en absoluto, y esto último debe ser el principal fruto de la ciencia. Pues nuestro espíritu no está completamente satisfecho si sólo sabe que la cosa es sin saber por qué la cosa es”. (pp. 400-401. La traducción al español es nuestra.)

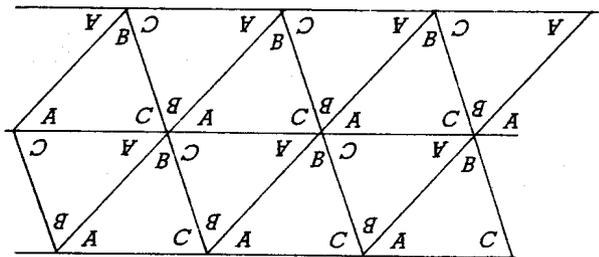
Demostración y conceptualización de las matemáticas son, pues, como lo sugiere la discusión anterior, dos cosas íntimamente ligadas. Sin embargo, la práctica escolar —descrita en términos generales— no toma en cuenta el cambio de conceptualización que se requiere para que el estudiante se implique en un proceso de aprendizaje de la demostración deductiva. La práctica escolar ofrece al estudiante solamente el “tiempo” para que la maduración matemática necesaria cristalice por sí misma, aplazando el aprendizaje de la demostración hacia la mitad de la enseñanza secundaria (esto es, cuando el estudiante alcanza más o menos los 15 años de edad). Y entonces, mientras que el profesor pasa a una conceptualización axiomática, de tipo euclideano, el alumno sigue viendo las figuras bajo la forma fenomenológica que se prestaba suficientemente bien para los cálculos de área, perímetro, etc. No es entonces de extrañar que el salón de aulas sea testigo de la presencia de dos discursos inconciliables. . . En la introducción a su libro *Sur la clarté des démonstrations mathématiques*, F. Rostand (1962), refiriéndose al hecho didáctico que estamos señalando, dice que “cuando los matemáticos estiman que un razonamiento *debería* parecer claro a toda persona que ha alcanzado un nivel suficiente de instrucción matemática, la experiencia pedagógica los contradice.”

### 3. Demostraciones no deductivas y demostraciones deductivas.

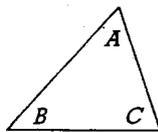
De acuerdo con lo dicho arriba, un cambio en la conceptualización de la demostración va a requerir un cambio en la conceptualización de los objetos matemáticos. Esto no significa que, a nivel del aprendizaje, las demos-

traciones pasan de demostraciones por visualización a demostraciones deductivas. En un libro reciente, Arsac *et al.* (1992), siguiendo una tipología de pruebas propuesta por Balacheff (1982), han estudiado con detenimiento ciertas formas de funcionamiento de la demostración, siendo la más interesante para nuestra discusión la del "ejemplo genérico". En este, el alumno toma un caso particular (un dibujo, verbigracia) y razona sobre él; pero —contrariamente a lo que sucede en la demostración por visualización— el "ejemplo genérico" se toma conscientemente como representante de una clase. El razonamiento es válido en tanto que él mismo se aplicaría a cualquier otro miembro de la clase en cuestión.

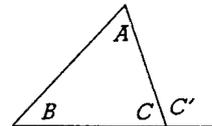
Para comprender mejor el papel que, desde nuestra óptica, puede desempeñar la demostración basada en el "ejemplo genérico" en el aprendizaje de la demostración como punto intermedio de itinerario o preámbulo a la demostración euclideana, veamos el siguiente mosaico.



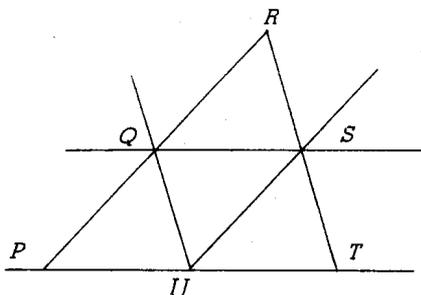
Dicho mosaico se obtiene a partir del siguiente triángulo:



Tomando al triángulo como un ejemplo genérico, el mosaico permite deducir cierto número de proposiciones de la geometría elemental: por ejemplo, se puede deducir que la suma de la medida de los ángulos (interiores) de un triángulo es  $180^\circ$ , y que la medida del ángulo exterior que se obtiene cuando se prolonga uno de los lados (ángulo  $C'$  en la figura) es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes.



También puede deducirse que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo está sobre una recta paralela a la que contiene el otro lado del triángulo, y que la longitud de ese segmento es la mitad de la longitud del tercer lado:



*U* y *S* son los puntos medios de los segmentos *PT* y *RT*, respectivamente. La recta *SU* es paralela a la recta *PR* y el segmento *US* tiene una longitud igual a la mitad de la del segundo segmento *PR*.

Evidentemente que las demostraciones anteriores no lo son en el sentido euclideo.<sup>5</sup> La comparación de la demostración de la primera proposición enunciada antes (esto es, la que afirma que la suma de la medida de los ángulos de un triángulo es  $180^\circ$ , y que el ángulo externo obtenido sobre la prolongación de un lado tiene por medida la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes), basada en el ejemplo genérico con la demostración de Euclides (Proposición 32 del Libro I, pp. 316-17 en la traducción de Heath, 1908), permite ver con todo detalle ciertas diferencias fundamentales entre los dos tipos de demostración. En primer lugar, en la deducción que subtiende la conclusión en el "ejemplo genérico", el razonamiento se hace a nivel de proposiciones que no son necesariamente justificadas (la representación geométrica de la situación permite partir de ciertas propiedades tomadas como *ciertas*). En segundo lugar –pero no menos importante– en la demostración por el ejemplo genérico la relación figura-razonamiento se establece como una relación *ad infinitum*, abierta, jamás acabada. Si en lugar de partir del triángulo que hemos escogido tomamos otro, el resultado será el mismo pues haremos sobre el nuevo mosaico el mismo razonamiento. Los razonamientos que intervienen en el ejemplo genérico no son generales sino generalizantes. En la demostración euclidea, por el contrario, la relación figura-razonamiento es atemporal, cerrada. En la demostración citada el pensamiento se desplaza sobre la figura a través de la dimensión causal.<sup>6</sup>

La diferencia anterior puede resumirse diciendo que los razonamientos utilizados en el ejemplo genérico desembocan en *argumentos deductivos*, y no en demostraciones euclideas propiamente dichas. Estos dos modos de funcionamiento de la demostración pueden distinguirse a través de

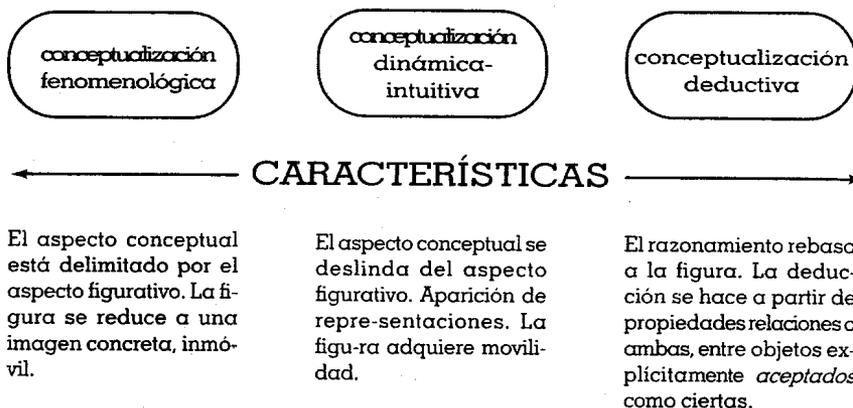
- (a) el papel que desempeña la figura en cada uno de ellos, y
- (b) el estatus (implícito versus explícito) de las proposiciones utilizadas.

<sup>5</sup> Otros "teoremas" que pueden ser deducidos del mosaico anterior pueden encontrarse en (Tvrdik and Blum, 1993).

<sup>6</sup> La causalidad a la que nos referimos aquí es aquélla que sobrepasa el plano factual (figurativo o factual-experiencial). Es la causalidad que se sitúa a nivel del *cálculo* de relaciones entre objetos. Es una causalidad que podemos designar por causalidad *semiformal* (ver nota 3).

No obstante su carácter no euclideo, la demostración por el "ejemplo genérico" permite obtener ciertos "teoremas" en los que *la deducción empieza a tomar cabida*. De no ser así, ¿cómo, a partir del mosaico, dedujimos los "teoremas" mencionados, no evidentes *a priori*? Es por su incursión paulatina al ambiente de la deducción que dicho tipo de demostración nos parece contener un potencial didáctico importante. El problema para la enseñanza de las matemáticas se formularía entonces, a estas alturas, como el del tránsito de los argumentos deductivos al de las demostraciones euclidianas.<sup>7</sup>

El siguiente cuadro presenta tres conceptualizaciones que son frecuentes en los alumnos. La primera de ellas corresponde a lo que llamamos la *conceptualización fenomenológica*.<sup>8</sup> En el caso de la Geometría, que es el caso que nos interesa aquí, tal conceptualización se caracteriza por el hecho que el aspecto conceptual de los objetos geométricos existen sólo en términos del aspecto figurativo, el cual se restringe a la *imagen concreta*.



Estudiando el razonamiento matemático y los tipos de imágenes usados por estudiantes de primaria y secundaria, Brown y Presmeg (1993), han encontrado que "la característica más notable de las imágenes concretas es que éstas consisten en un dibujo inmóvil, pero bien detallado" y que aquéllas están asociadas a una escasa comprensión de relaciones entre objetos. Es dentro de esta conceptualización que encontramos la demostración por visualización o por el "ejemplo único".<sup>9</sup>

<sup>7</sup> Estoy en deuda con uno de los árbitros de este artículo, que me sugirió la pertinencia de introducir a este nivel de mi discusión, *la idea de argumento deductivo* (en contraposición a la demostración euclidea). Sin duda que el argumento deductivo entra en la categoría -muy general, por cierto-, de "pruebas matemáticas" introducida por Balacheff (1982). Creo, sin embargo, que por su carácter específico, la noción de argumento deductivo (tal como aparece en nuestra discusión, esto es, como preludeo a la demostración euclidea) puede resultar de interés para la enseñanza de las matemáticas.

<sup>8</sup> Tomamos aquí el adjetivo "fenomenológico" en su sentido más simple, esto es, como referente a los fenómenos observables por los sentidos.

<sup>9</sup> Explicaciones de carácter demostrativo basadas en el "ejemplo único" aparecen, por supuesto, en otras áreas de las matemáticas. Para el caso de la aritmética, véase Radford y Berges, 1988.

La segunda conceptualización corresponde a la que hemos llamado *dinámica intuitiva*. Ésta se caracteriza por el hecho que el aspecto conceptual del objeto geométrico se distancia de su aspecto figurativo, haciendo posible la aparición de *representaciones* del objeto. La figura se convierte en una representación simbólica del concepto. Una propiedad enunciada, como la perpendicularidad del diámetro y la tangente, no puede ser demostrada a la luz de un dibujo. Es aquí que caben las demostraciones que se basan no en un ejemplo sino en varios, o la demostración basada en la *experiencia crucial* (la que ocurre cuando el alumno intenta poner a prueba la validez de la proposición en estudio a través de un caso "extremo". Así, en nuestro caso de la tangente y el diámetro, esto podría hacerse dibujando un círculo extremadamente grande (o más pequeño) y viendo si aún en ese caso la propiedad de perpendicularidad sigue siendo cierta) (cf. Arsac *et al.* 1992, p. 145-146). Aquí caben también las demostraciones basadas en el "ejemplo genérico".

La tercera conceptualización a la que queremos referirnos es la abstracta-deductiva. En tal conceptualización, la organización deductiva se efectúa a partir de propiedades, relaciones o ambas entre objetos, que son explícitamente *aceptadas* como ciertas (lo que supone la toma de conciencia de cierto grado de arbitrariedad en la elección). Es aquí donde encontramos las demostraciones deductivas de tipo euclideo, así como las demostraciones de los sistemas deductivos formales (cf. Radford, 1993).

#### 4. «Problemas abiertos» y la enseñanza de la demostración

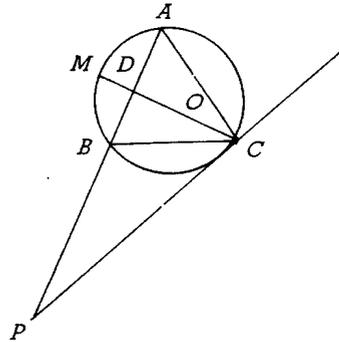
¿Cómo, dentro del marco de la enseñanza, el profesor puede promover un cambio en la conceptualización de la demostración en los alumnos? Balacheff (1982) ha sugerido que un elemento importante para desencadenar un proceso de prueba es la *duda en el resultado*. Esto significa que la demostración, sobre todo al inicio, debe ser abordada como un medio para tratar de *convencerse uno mismo* o *convencer a otros* de la categoría de verdad de una proposición. El profesor, como agente regulador externo, del sistema "sala de clase", debería enfatizar porque la demostración aparezca no como un *lujo* o un *ejercicio intelectual*, sino como una **necesidad** propia de la actividad matemática que los alumnos desarrollan en el aula, movilizandole la discusión entre los estratos social y privado del conocimiento.

Para lograr tal objetivo parece que la formulación del problema no debe contener la respuesta. El problema debería, en efecto, ser un "problema abierto".<sup>10</sup> Tomemos un ejemplo de un libro de geometría de nivel secundaria.<sup>11</sup>

<sup>10</sup> Entre las características que el enunciado de un problema debe satisfacer para ser «abierto», mencionemos la que requiere que el enunciado no debe inducir ni el método ni la solución. Un problema de enunciado del tipo "demostrar que" no puede considerarse como abierto, pues está indicando la respuesta. (cf. Charnay, 1992-1993)

<sup>11</sup> Tomado de *Mathématiques-Soleil 5*, p. 123. La traducción al español es nuestra.

Un triángulo  $ABC$  inscrito en un círculo de centro  $O$ . La tangente en el punto  $C$  intersecta a la prolongación del lado  $AB$  en el punto  $P$ . Sea  $CM$  la bisectriz del ángulo  $ACB$ . Tal línea corta el lado  $AB$  en el punto  $D$ . Demostrar que el triángulo  $PCD$  es isósceles.



Formulado de la manera anterior, el problema no deja lugar a dudas. El enunciado prevé el resultado: el triángulo  $PCD$  es isósceles. El mismo problema podría ser reformulado como sigue:

«Trazar un círculo cualquiera. Sea  $O$  su centro. Inscribir un triángulo cualquiera en ese círculo. Sea  $ABC$  dicho triángulo. Trazar la tangente al círculo en el punto  $C$ . Sea  $P$  el punto de intersección de esa tangente y de la recta que pasa por  $A$  y  $B$ . Trazar la bisectriz del ángulo  $ACB$ . Sea  $D$  la intersección de la bisectriz y del segmento  $AB$ . ¿Qué puede decirse del triángulo  $PCD$ ?

Volver a comenzar con otro círculo y otro triángulo  $ABC$ . ¿Qué propiedad parece tener el triángulo  $PCD$ ? Enunciar una conjetura. ¿Puede proporcionar una demostración de su conjetura?»

El alumno está ahora invitado a tomar posesión de la situación. De observador, el alumno pasa a actor. La *etapa experimental* (que no es facilitada en la formulación inicial del problema) puede dar lugar a la formulación de una *conjetura*: parece que los segmentos  $PD$  y  $PC$  tienen igual longitud, por lo que el triángulo  $PCD$  podría ser isósceles.

Evidentemente que la etapa experimental no será en general suficiente para cambiar la conceptualización de la actividad matemática que tiene el alumno y el papel que en ella desempeña la demostración. Tal etapa puede, no obstante, abrir ciertas brechas para ese cambio: la figura deja de ser el objeto matemático, y el rompimiento entre el objeto y su representación puede desembocar en una conceptualización más profunda de las matemáticas. La experimentación permite, por lo menos, la generación de un espacio para plantear el problema de la validez universal de la proposición en estudio. En otras palabras, la experimentación puede permitir transitar a los alumnos de la conceptualización fenomenológica a la conceptualización dinámica intuitiva vistas en la sección 3.

## 5. El aprendizaje de la *forma de funcionamiento* de la demostración deductiva

La *forma de funcionamiento* de la demostración deductiva en matemática se apoya en un riguroso encadenamiento de proposiciones que hay que buscar, establecer o ambas cosas previamente. Duval y Egret (1989) distinguen dos etapas: la etapa del proceso heurístico y la etapa de redacción del texto de demostración.

En un trabajo que realizamos anteriormente (Radford, 1988), pudimos observar ciertas interacciones entre el proceso heurístico y la etapa de redacción; en particular, observamos que si bien el proceso heurístico proyecta en sus grandes líneas la etapa de redacción, la etapa de redacción puede solicitar ciertas informaciones que harán al estudiante regresar e, incluso verificar completamente el proceso heurístico. Sin embargo, dicho comportamiento tiene lugar sólo en estudiantes con una comprensión avanzada de la forma en que funciona una demostración. Dicho de otra manera, las etapas heurística y de redacción *suponen* el conocimiento *del funcionamiento deductivo* de la demostración. En un trabajo posterior al ya mencionado (Radford, 1990), llevamos a cabo una experimentación en la cual ahorrábamos al alumno la parte heurística, proporcionándole el enunciado de un teorema y la lista de las proposiciones que formaban parte de una demostración de dicho teorema; dicha lista estaba dada en desorden y pedíamos al estudiante ordenarla a modo de reconstruir la demostración. La mayoría de los 70 alumnos que se sometieron a esa experiencia, que habían comenzado una licenciatura de Ingeniería, tuvieron problemas en la reconstrucción de la demostración.

Nuestro *test* contaba con dos demostraciones. En la segunda de ellas, la mitad de los estudiantes realizaron cadenas deductivas inversas (partiendo del enunciado del teorema; esto es, de lo que se quería demostrar), mostrando así una incompreensión en el funcionamiento de la demostración. Dentro del otro 50% de la muestra, encontramos estudiantes con dificultades a nivel del razonamiento deductivo; lograban generar sólo pequeñas cadenas deductivas inconexas entre ellas. El estudio permitió detectar una dificultad que nos parece es una dificultad de fondo en lo que se refiere al buen funcionamiento del alumno en la demostración: en tanto que el alumno no haya desarrollado las habilidades lógicas que pueden asegurar el éxito del encadenamiento deductivo de las proposiciones, la heurística (que permite precisamente ir "a la caza" de las proposiciones) se ve rotundamente debilitada al punto de llegar a carecer de sentido.

En nuestro programa de formación de profesores, en donde muchos de nuestros alumnos-maestros tienen dificultades con la demostración, hemos incorporado, en la parte "funcionamiento de la demostración", actividades que tienen como propósito precisamente desarrollar las habilidades de tipo

deductivo que asegurarán la forma lógica del texto de la demostración. Tales actividades son presentadas luego de que la parte "finalidad de la demostración" ha sido desarrollada, parte que culmina con la convicción intelectual de que un dibujo o un ejemplo no puede constituirse en demostración, a través de un entorno experimental como el que sugerimos en el ejemplo anterior del círculo y del triángulo inscrito. Las actividades de nuestra parte "funcionamiento de la demostración" (que pretenden ser una ruta de acceso de la conceptualización dinámica-intuitiva a la conceptualización deductiva (véase sección 3), empiezan con teoremas en los que ocultamos una o dos proposiciones y que nuestros alumnos-maestros deben restituir. Las actividades se vuelven poco a poco más complejas, hasta caer en el caso en que las proposiciones están: (a) completas pero revueltas; (b) sobrecompletas (es decir, hay proposiciones superfluas o de más) y revueltas; (c) incompletas y revueltas. Siguiendo tal secuencia llegamos al caso final y más difícil en que el estudiante se encuentra únicamente con el enunciado del teorema; es decir, con el caso con el que, usualmente, empiezan los textos de matemáticas. Hemos podido observar que a medida que el estudiante-profesor se adentra en el "funcionamiento de la demostración" siguiendo esa secuencia, la heurística es mejor comprendida. Esto no significa –por supuesto– que con ello se solventa la problemática relativa a la maestría de la heurística, la cual, como se verá en en la sección 6, aparece como una actividad extremadamente compleja.

## 6. Dos papeles diferentes de la figura en la etapa heurística

La demostración de una proposición geométrica requerirá en general la *transformación* del problema inicial en otros subproblemas; en tal *transformación*, que es de hecho el resultado de un *proceso heurístico*, participan funciones cognitivas de varios tipos, moduladas en buena medida por razonamientos deductivos. Si designamos por  $\varepsilon_n$  la proposición que se quiere demostrar, a menudo centraremos la atención en la búsqueda de una proposición  $\varepsilon_{n-1}$  que cumpla con la propiedad de que  $\varepsilon_n$  puede ser deducida de  $\varepsilon_{n-1}$ , siendo el caso más sencillo aquel en el que se tiene que « $\varepsilon_{n-1} \Rightarrow \varepsilon_n$ » es verdadero. El mismo procedimiento se aplica a la proposición  $\varepsilon_{n-1}$  y a las siguientes; se trata, en efecto, de encontrar una sucesión de proposiciones  $\varepsilon_{n-2}, \varepsilon_{n-3}, \dots, \varepsilon_1$ , tal que « $(\varepsilon_{j_1} \text{ y } \varepsilon_{j_2} \text{ y } \dots \text{ y } \varepsilon_{j_i}) \Rightarrow \varepsilon_i$ » sea verdadero, para  $i = 2, 3, \dots, n-1, j_j < i$ . Este «razonamiento por suficiencia» (Glaeser, 1971), en el que el pensamiento va hacia atrás, requiere, –además de la componente lógica evidente– habilidades que permitan "reconocer" condiciones suficientes en el contexto del problema y que se enmarcan dentro de actividades más amplias de corte heurístico.

Desde hace algún tiempo, ciertas investigaciones han abordado el papel que la figura puede desempeñar en los procesos heurísticos que acompañan la resolución de problemas y la demostración en contextos geométricos. Así, A. Mesquita (1993) ha puesto de manifiesto que para que

la figura pueda ser "vista" por el alumno más allá de su papel *descriptivo*, y se convierta en un elemento desencadenador de procesos de búsqueda de soluciones, el alumno debe poder operar descomposiciones y recomposiciones de la figura dada, reconociendo, en particular, figuras elementales pertinentes en la resolución del problema. Esta forma de aprehensión de la figura —que Duval (1988b) define como la *appréhension opératoire*— requiere de formas de razonamiento específicas, todavía mal conocidas, que, interactuando con el pensamiento deductivo, hacen posible el "reconocimiento" de las condiciones suficientes a las que nos referíamos arriba.

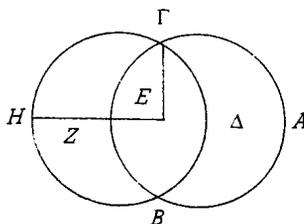
En el caso de la Geometría, nos parece posible atribuir a la figura por lo menos dos papeles heurísticos muy diferentes. En el primero de ellos, que se da en lo que llamaremos «*el caso de la figura estándar*», el croquis se hace con intención de reflejar la situación enunciada en el teorema que se quiere demostrar y permitir el análisis de los elementos que componen la figura. La representación geométrica obtenida, permite, —mediante una lectura no lineal que hace posible sólo el registro simbólico de la Geometría— conjeturar ciertas relaciones que luego pueden ser examinadas a través de un proceso en el que la figura es sobrepasada, esto es, por un proceso matemático-deductivo que conlleva una relectura *lineal* de los hechos. A la luz de la figura, dos ángulos pueden parecer tener igual medida; dos segmentos pueden parecer tener igual longitud, etc. Así, por ejemplo, en el problema del triángulo inscrito en el círculo, visto en la sección 4, la figura *sugiere* que los lados de igual longitud podrían ser *PD* y *PC*. Este dato desencadena toda una pista de investigación: ¿tienen los ángulos *PDC* y *PCD* igual medida?, etc.

El segundo de los papeles heurísticos que atribuimos a la figura, que llamaremos «*el caso de la figura imposible*», está ligado a razonamientos por reducción al absurdo. En este caso —contrario al primero, en el que lo que predomina son razonamientos directos— la figura, lejos de reflejar de manera normal los objetos geométricos y sus relaciones—, es *voluntariamente* distorsionada y permite al pensamiento movilizarse sobre los objetos, las relaciones o ambos para concluir que una situación de esa naturaleza es imposible desde el punto de vista lógico. La *incongruencia* entre los registros figurativo y deductivo (para utilizar un concepto acuñado por Duval, 1988a) confiere a la figura un papel particular, que puede ser difícil de manejar por los alumnos, como lo indican ciertas observaciones que hemos realizado en clase.

Para intentar mostrar cómo la figura desempeña un papel muy diferente cuando es considerada según su aspecto de «figura imposible», veamos la proposición V del Libro III de *Los Elementos* de Euclides, que escogemos por su brevedad:

«Si dos círculos se cortan, su centro no será el mismo.  
Que los dos círculos *ABΓ*, *ΓΔH* se corten en los puntos *B*, *Γ*; digo que su centro no será el mismo.

Si eso fuera posible, que su centro sea el punto  $E$ ; tracemos  $ET$  y tracemos  $EZH$  de cualquier manera.»



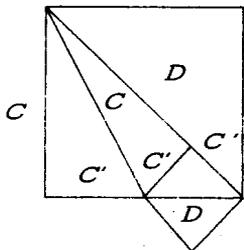
Dado que el punto  $E$  es el centro del círculo  $AB\Gamma$ , la recta  $ET$  es igual a  $EZ$  (def. 15.1). Además, como el punto  $E$  es el centro del círculo  $\Gamma\Delta H$ , la recta  $TE$  es igual a  $EZ$ ; entonces  $ZE$  es igual a  $EH$ , la más pequeña a la más grande, lo cual es imposible. Por tanto, el punto  $E$  no es el centro de los círculos  $AB\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta H$ . (Nuestra traducción al español está basada en la reimpresión de 1993 de la traducción francesa de Peyrard, 1819, p. 61).

La utilización de la figura en este caso es, como se ve, muy diferente a la utilización que se hace en el caso de razonamientos directos, y no puede ser llevada a cabo si el estudiante no ha efectuado la ruptura entre el objeto matemático y su representación. En este caso, el pensamiento se desplaza sobre una representación *errónea a priori*, que es construida sobre la hipótesis de un centro común a los dos círculos, centro que no existe en el universo figurativo correspondiente a la proposición inicial « $P$ » que se quiere demostrar. Tal representación permite deducir lógicamente –y por tanto más allá de la figura– un resultado imposible. El pensamiento se desplaza sobre esos objetos deformados que no alcanzan a perturbar la forma y la naturaleza de los *objetos matemáticos en cuestión*.

Observemos que la proposición « $P$ » que se quiere demostrar, y que es enunciada en el *registro proposicional*, es remplazada, –en el razonamiento por reducción al absurdo– por su negación «no  $P$ », que pertenece al mismo *registro proposicional*. Ese movimiento se traduce, en el *registro figurativo*, por un cambio en la figura: si « $F_p$ » es una figura que corresponde a la proposición « $P$ », entonces « $F_{no P}$ » es la figura que corresponde a la proposición «no  $P$ ». El proceso heurístico que desencadena « $F_{no P}$ » no puede funcionar igual que si estuviésemos razonando sobre « $F_p$ », por la sencilla razón de que las propiedades métricas han dejado de ser válidas. . .

Conviene aclarar aquí que no es cierto que todo razonamiento por reducción al absurdo en Geometría recurra a una *figura imposible*. En efecto, puede darse el caso de que tal razonamiento parta de una *figura a priori posible* (de forma más exacta: una figura en la que el registro geométrico represente coherentemente los objetos geométricos en cuestión: un círculo aparecerá con su redondez acostumbrada; un segmento de recta será representado en forma rectilínea, etc.). Tomemos la demostración del teorema

que afirma la irracionalidad de 2, basada en el método de "sustracciones sucesivas" (*anthyphairetic method*; cf. Fowler, p. 31 y siguientes.)



$D$  = diagonal del cuadrado.  
 $C$  = lado del cuadrado.  
 $C'$  = lado del nuevo cuadrado.  
 $D''$  = Diagonal del nuevo cuadrado.

Sea  $u$  una medida común a  $C$  y  $D$ . Si  $u$  mide a  $C$  y  $D$ , entonces medirá también a  $C' = D - C$ . Igualmente,  $u$  medirá a  $D' = C - C'$ .

$C'$  y  $D'$  son el lado y la diagonal de un nuevo cuadrado más pequeño. Aplicando el mismo razonamiento al nuevo cuadrado, podremos encontrar otro más pequeño cuyos lados y diagonal serán medidos por  $u$ . El razonamiento puede repetirse indefinidamente, lo cual es imposible, pues a partir de cierto momento la medida  $u$  será más pequeña que los segmentos que mide.

Como vemos, la contradicción no puede apreciarse *sobre* la figura. La contradicción "no se mira".

## 7. Observaciones finales

El epistemólogo suizo Ferdinand Gonseth, en su brillante obra *Les Mathématiques et la Réalité*, escrito en 1936, afirma que en matemáticas «todas las cuestiones decisivas se resuelven en definitiva recurriendo en forma más o menos directa a la *evidencia*».<sup>12</sup> Gonseth no reduce la evidencia a su única dimensión empírica; la evidencia, así como la normatividad (cf. Moreno y Waldegg, 1992) son consideradas consustanciales a la conceptualización en que el "hecho" es "visto". Lo que era evidencia en cierta conceptualización, deja de serlo en otra. En el tránsito de una conceptualización a la otra, el pensamiento deductivo se transforma, se afina, y —con él— nuevas formas de funcionamiento del aparato demostrativo son llamadas a participar. El problema de la enseñanza de la demostración podría entonces ser reformulado como el que consiste en ayudar al alumno a transitar a lo largo de conceptualizaciones que privilegian el desarrollo del pensamiento deductivo en las que participan procesos de demostración cada vez más complejos, que evolucionan no en forma independiente de los objetos geométricos —como la enseñanza postula a menudo en la sala de clase— sino *a través y a la par* de conceptos más y más ricos. En esas conceptualizaciones, una atención particular debería ser dada a la "evidencia" y su relación con la figura, vista ésta tanto como representación que como soporte del razonamiento. Figura y evidencia aparecen así como elementos claves de cualquier proyecto de enseñanza de la demostración. La gestión de esos

<sup>12</sup> Op. cit. p. 327; el subrayado y la traducción al español son nuestros.

elementos en clase, la forma de hacerlos evolucionar desde las figuras consideradas como "imágenes estáticas", hasta las "figuras imposibles" a que apelan a menudo los razonamientos por reducción al absurdo, aparecen como contenidos didácticos indispensables de poder encaminar para lograr una enseñanza eficaz de la demostración.

## 8. Referencias

- Arnauld, A., Nicole, P.** (1683). *La logique ou l'art de penser*. Flammarion (1970).
- Arsac, G.** (1987) L'origine de la démonstration: essai d'épistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 8, No. 3, pp. 267-312.
- Arsac, G.; Chapiron, G.; Colonna, A.; Germain, G.; Guichard, Y.; Mante, M.** (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*. France: Presses Universitaires de Lyon.
- Balacheff, N.** (1982). "Preuves et démonstrations en mathématiques au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 3-3.
- Barbin, E.** (1987). "Heuristique et démonstration en mathématiques: la méthode des indivisibles au XVII<sup>e</sup> siècle. *Fragments d'Histoire des Mathématiques*. Vol. 2, APMEP. France. Brochure 65, pp. 125-159.
- Bell, A.** (1976). "A study of pupils' proof-explanations in mathematics situations". *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 7, pp. 23-40.
- Brown, D., Presmeg, N.** (1993). "Types of imagery used by Elementary and Secondary School students in Mathematical reasoning", *Proceedings of the XVII PME Conference, University of Tsukuba, Japan*, Vol 2, 137-144.
- Charnay, R.** (1992-1993). "Problème ouvert, problème pour chercher". *Grand N*, No. 51, pp. 77-83.
- Duval, R.** (1988a). "Ecartés sémantiques et cohérence mathématique", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 7-25.
- Duval, R.** (1988b). "Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 57-74.
- Duval, R., Egret, M.A.** (1989). "L'organisation déductive du discours: interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 2, 25-40.
- Fowler, D.H.** (1987). *The Mathematics of Plato's Academy. A new reconstruction*. Clarendon Press. Oxford Science Publications, 1990 edition.
- Glaeser, G.** (1971). *Mathématiques pour l'élève professeur*. Hermann. Deuxième édition, 1973.
- Gonseth, F.** (1936). *Les mathématiques et la réalité. Essai sur la méthode axiomatique*. Paris: Librairie scientifique et Technique Albert Blanchard. Reimpression 1974.
- Guichard, J.** (1993). *Statut et fonction de la démonstration en mathématiques: quelques repères*. IREM, Université de Poitiers, France, 66 pages.

- Heath, T. (1908). *The Thirteen Books of the Euclid's Elements*. Dover (reprint), 1956.
- Lefebvre, J. (1991). "La démonstration mathématique dans l'histoire. Première partie: Tout ou rien". *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec* (AMQ). Vol. V, No. 3, octobre 1991, pp. 15-18.
- Lefebvre, J. (1992). "La démonstration mathématique dans l'histoire. Deuxième partie: Tout? Évidemment!". *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec* (AMQ). Vol. XXXII, No. 3, octobre 1992, pp. 38-41.
- Leron, U. (1983). "Structuring mathematical proofs". *American Mathematical Monthly*. Vol. 90, No. 3, pp. 174-185.
- Mesquita, A. (1993). "La figure en Géométrie: une problématique ouverte". *Actes du Colloque Élève, École, Société. pour un approche interdisciplinaire de l'apprentissage*. CIRADE, Université du Québec à Montréal, pp.70-77.
- Moreno, L., Waldegg, G. (1992). "Constructivismo y Educación Matemática. Educación Matemática, Vol. 4, No.2, pp. 7-15.
- Peyrard, F. (1819). *Les oeuvres d'Euclide*. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, nouveau tirage, 1993.
- Radford, L. (1985). *Interprétation d'énoncés implicatifs et traitements logiques*. Thèse de 3ème cycle en Didactique des Mathématiques. IREM de Strasbourg, France.
- Radford, L., Berges, V. (1988). "Explicaciones y procesos de resolución de problemas de tipo lógico en un contexto aritmético en adolescentes". *Memorias de la Segunda reunión centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa*, Universidad de San Carlos, Guatemala, pp. 31-51.
- Radford, L. (1988). "Sobre la noción de demostración: Una experiencia con estudiantes de universidad". *Memorias de la Segunda reunión centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa*, Universidad de San Carlos, Guatemala, pp. 197-202.
- Radford, L. (1990). "Organización lógica de enunciados en una demostración. Educación Matemática. Vol. 2, No. 1, p. 21-29.
- Radford, L. (1993). "Reflexiones sobre la enseñanza de la demostración: del objeto matemático al objeto didáctico". *Memorias de la séptima reunión centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa*, Universidad de Panamá, Panamá.
- Rostand, F. (1962). *Sur la clarté des démonstrations mathématiques*. Paris: Librairie Philosophique Vrin. Coll. Problèmes et controverses.
- Tvrđik, D., Blum, D. (1993) "Ladders and Saws". *The Mathematics Teacher*, Vol. 86, No. 6, 510-513.
- Wheeler, D. (1990) "Aspects of mathematical Proof". *Interchange*. The Ontario Institute for Studies in Education, Vol. 21.1, 1-5.