La Geometría del Desorden y un Nuevo Diseño Curricular

Introducción

El día 18 de julio de 1872, Weierstrass leyó –ante la Academia de Berlín– su trabajo sobre funciones continuas que carecían de derivada en todo su dominio. Nunca publicó este trabajo. Paul DuBois Reymond, uno de sus discípulos, lo difundió al mundo matemático hacia 1875. Este fue uno de los varios acontecimientos que eventualmente llevaron a imaginar la matemática como una disciplina separable, en esencia, de sus orígenes físicos. Otro hecho notable estuvo constituido por la creación de las geometrías no-euclidianas, que permitió afirmar a Poincaré que la geometría euclidiana no era una descripción fiel del espacio físico, sino un *modelo* conveniente del espacio. La geometría de Lobachevski fue otro.

Tanto el caso del análisis como el de la geometría no-euclidiana, son ejemplos de una transformación profunda que llevó a la matemática a buscar sus fundamentos en un terreno distinto al pensamiento y la experiencia físicas. Al no poder contar con la geometría como su fuente de sustentación –la geometría que, se consideraba describía el espacio con total precisión– los matemáticos volvieron sus ojos a la aritmética. El lapso que va de 1875 hasta 1925, aproximadamente, es un periodo de búsqueda de los nuevos fundamentos. Ésta consistió, dicho en pocas palabras, en la necesidad de buscar una fundamentación para una disciplina que ahora se imaginaba como "una pura creación del espíritu". La separación progresiva de la matemática de sus orígenes empíricos así lo requería.

El escenario que hemos descrito someramente en el párrafo anterior, condujo eventualmente a organizar la matemática de modo axiomático. En efecto, se pensaba que sólo el razonamiento deductivo era capaz de asegurar la *validez de las afirmaciones* que se hacían en el interior de la disciplina que pretendía cortar sus nexos con el dominio de la experimentación.

Luis E. Moreno Armella
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV-IPN

El método axiomático tiene, en la matemática euclidiana, un antecedente significativo. La deducción de una proposición a partir de otras que ya han sido demostradas, permitió a los griegos del periodo euclidiano la generación de colecciones sistematizadas de resultados, bajo el criterio de su dependencia lógica. Los *Elementos* de Euclides, constituyen el trabajo de sistematización global que mejor representa los intentos hechos en Grecia para organizar el conocimiento matemático. La lectura de este trabajo nos deja la impresión de que estamos ante un conocimiento *externo* al sujeto cognoscente, que es una realidad susceptible de ser *descubierta.*

A finales del siglo XIX, D. Hilbert produjo una obra que vendría a dar un nuevo soporte a la visión axiomática de la matemática : **Fundamentos de la Geometría**. Hay que hacer notar, empero, que la noción de "postulado" que presenta Hilbert, difiere sustancialmente de la presentada por Euclides. De acuerdo con Hilbert, el aspecto central de un sistema postulacional no consiste –como en Euclides– en la "autoevidencia" de tales postulados sino en las relaciones que ellos permiten establecer entre los términos indefinidos del sistema. En otras palabras, lo central es la *estructura.* Esta nueva versión de lo que era un sistema axiomático, llevó a la concepción matemática conocida como *el formalismo.*

Los párrafos anteriores muestran algunos rasgos de la matemática y de su proceso de transformación, que antecedieron a la llamada "matemática moderna", y que trajo a nuestras escuelas la tristemente célebre teoría de los conjuntos. Esta correspondencia entre un desarrollo matemático y su impacto en el curriculum no es un hecho aislado. Hay buenas razones para creer que siempre ocurre. Más adelante, utilizando la noción de *transposición didáctica* daremos otros ejemplos de este proceso. Antes, volvamos brevemente a la geometría. La concepción pedagógica asociada a la geometría axiomática ha enfatizado, en gran medida, una especie de juego deductivo como parte central de la actividad cognitiva del estudiante –en su camino hacia el conocimiento. Esto limita seriamente la actividad constructora de significados por parte del estudiante, no porque la actividad deductiva sea poco importante sino porque aparece de forma prematura. Esto, en muchas ocasiones, genera un conflicto cognitivo para el estudiante que viene dado en la forma de *exigencia de demostración* de hechos que al estudiante le resultan obvios. Cualquiera conoce ejemplos de esta situación. Habría que añadir, que los conflictos de carácter cognitivo presentes en esta situación son producidos, en gran medida, por la exigencia al apego a una forma de razonar que inhibe el desarrollo y la estructuración de sus intuiciones y conocimientos informales.

A manera de síntesis: hemos presentado hasta este momento, aspectos de algunos desarrollos centrales de la matemática y las circunstancias en que los hemos visto aparecer en los currícula. Enfatizamos que el estudio de los mecanismos que hacen posible esta "asimilación y acomodación" del conocimiento matemático, por parte de las estructuras curriculares, es clave para la investigación en didáctica. En la segunda parte del trabajo estudiaremos el problema generado por la presencia de la computadora en el ámbito de la investigación matemática y sobre todo, cómo esto incide o puede incidir en la educación matemática. Todo esto se puede estudiar en el marco del siguiente problema:

> *Describir y caracterizar los mecanismos de transformación de una estructura cognitiva en el concepto formal asociado.*

Una perspectiva constructivista

La mayoría de los profesores comparte, en la práctica, una posición que podríamos llamar una *pedagogía de la exposición.* Es decir, conciben la matemática como un producto que hay que *transmitir* al estudiante. Bajo está concepción hay que aceptar la separación explícita entre el sujeto cognoscente y su objeto de conocimiento. Se conoce esta postura como *realismo* o también como *objetivismo* (véase por ejemplo [8]). Se supone que el proceso de transmisión del conocimiento (es decir, *la enseñanza*) debe producir una asimilación, por parte del estudiante (es decir, *el aprendizaje*) de un conocimiento que es totalmente independiente de él. De allí el nombre de realismo u objetivismo que mencionamos hace un momento. Esta postura desconoce, empero, que las formas de "apropiación del conocimiento" consisten, mas bien, en la construcción de estructuras cognitivas. No puede ignorarse la participación de la componente social en este proceso constructivo. Como Piaget y García han observado . . . *las situaciones que el sujeto encuentra durante sus experiencias están generadas por su entorno social y los objetos aparecen en contextos que les otorgan significados específicos* (véase [1], pág. 228).

La Matemática como ciencia y como objeto de enseñanza

¿Cuáles son las relaciones entre una ciencia y su enseñanza?

Daremos una respuesta en términos de uno de los procesos centrales que se activan cuando una ciencia se hace objeto de enseñanza: el proceso de *transposición didáctica,* introducido por Chevallard (véase [2] para una introducción adecuada a estas ideas). Desde este marco de referencia, presentaremos luego ciertas reflexiones sobre los efectos posibles de la irrupción de la computadora en la enseñanza de la matemática.

El enfoque acumulativo ha sido adoptado tradicionalmente para la elaboración y diseño de los currícula. Supone que la formación del estudiante se va dando mediante una serie de cursos que toman el papel de "básicos". Este enfoque ha sido favorecido, en disciplinas altamente organizadas, por la relativa estabilidad de sus cuerpos conceptuales. Aún en estos dominios, donde las relaciones entre la ciencia objeto de una pedagogía y esta última han sido drásticamente simplificadas, ya no resulta tan inmediato seguir conservando este enfoque. La relativa estabilidad de un núcleo duro de conocimientos –en el currículum– se ha visto perturbada por la presencia de *nuevos acercamientos* a temas tradicionales y también por la de *nuevos temas* en las estructuras curriculares. Todo ello es resultado de los procesos (de transposición) mediante los cuales el conocimiento generado en una disciplina científica, en nuestro caso, la matemática, se traslada a las estructuras curriculares. Digamos de inmediato que este proceso no es ni mecánico ni automático.

Cuando el conocimiento matemático se hace objeto del discurso didáctico, es indispensable tomar en consideración la acción de los procesos de transposición, así como las diferentes dimensiones del conocimiento, propias de la disciplina. La educación matemática reconoce que el análisis histórico-crítico, las teorías cognitivas –el conocimiento en la perspectiva del sujeto–, la teoría de la información, suministran elementos sustanciales que deben ser incorporados como parte de la reflexión permanente sobre nuestro campo.

Mediante los acercamientos de naturaleza tanto epistemológica como didáctica, se ha detectado una importante veta de investigación en las relaciones entre la formación del conocimiento, en su perspectiva histórica y la construcción de ese conocimiento hecha por el estudiante. La comparación de estas dos construcciones arroja luz sobre la actividad cognitiva del estudiante. Desde luego, hay que destacar el carácter eminentemente social del proceso educativo. Como sostienen Piaget y García (véase [1], p. 228), *cuando el lenguaje se toma el medio principal de comunicación, la asimilación empieza a quedar cada vez más condicionada por el medio ambiente social. Entonces, qué es lo que el sujeto asimila, depende esencialmente de su entorno socio-cultural; cómo lo asimila, depende también de sus estructuras cognitivas.* ¿Por qué, en un momento dado, no puede el sujeto cognoscente asimilar–acomodar una estructura conceptual? Estas cuestiones se ven iluminadas por las consideraciones sobre los obstáculos epistemológicos que pue- den ser estudiados en el curso de la evolución histórica de la matemática (véase [2] para un tratamiento cuidadoso del concepto de obstáculo epistemológico y su tratamiento en el terreno de la didáctica. Véase también el capítulo 9 de [1]).

Los conceptos de transposición didáctica y de obstáculo epistemológico hacen su aparición tanto al nivel de la práctica de la enseñanza y de la construcción de significados por parte del estudiante (es decir, de su aprendizaje) como al nivel de las elaboraciones teóricas propias del campo. ¿Cuáles son las diferencias entre estos niveles? Veamos un ejemplo: las dificultades que nuestros estudiantes tienen para aprender la noción de derivada, pueden considerarse como parte de un obstáculo *al nivel de los procesos de enseñanza y de aprendizaje*; pero clasificar estas dificultades, ver en qué otros ámbitos incide, tratar de encontrar su filiación en el proceso histórico de su formación, y en consecuencia intentar una explicación de la dificultad, son acciones que forman parte de la actividad teórica del campo. Estas acciones, hay que decirlo, nos permitirán eventualmente, entender la naturaleza del obstáculo que hizo su aparición a nivel del proceso de enseñanza. Este es uno de los propósitos básicos del trabajo de campo en la investigación didáctica. Queda señalada pues, la necesidad de recurrir a los estudios de carácter cognitivo, a la naturaleza del lenguaje (matemático), a la historia de las ideas. Es de crucial importancia para el desarrollo de la disciplina, que podamos crear avenidas de doble circulación entre estos niveles de la práctica de la educación y de la elaboración de los marcos teóricos. Debemos explicitar que la idea de transposición didáctica la planteamos aquí aprovechando que el término es muy sugestivo; es una invitación a que cada uno de nosotros, aún antes de leer a Chevallard (véase la bibliografía) *construya su propia definición* de los términos y en consecuencia, una interpretación más razonada de lo que hemos expuesto aquí.

La computadora: ¿Qué significa su presencia?

En los últimos tiempos, hemos presenciado, a nivel internacional, múltiples intentos de respuesta a esta interrogante. Un ejemplo, es la importante publicación de la UNESCO, citada en la bibliografía, que recoge diferentes acercamientos al problema, reflejando con ello parte importante de los enfoques internacionales. Nuestras propias conclusiones han sido obtenidas tratando de identificar un campo de indagación *genuinamente computacional.* Es decir, un campo de la matemática escolar –presente ya o nuevo– en donde no se pueda (aclaremos: en términos y tiempos escolares) avanzar en el proceso de construcción del conocimiento, *en ausencia de la computadora.* Vale la pena llamar la atención sobre dos de los usos posibles de la computadora en el contexto educativo. Uno, la computadora como un instrumento de exploración de un conocimiento matemático ya construído. Otro, la computadora como un instrumento de búsqueda de relaciones estructurales dentro de cierta fenomenología, que requiere para ello, por ejemplo, de una intensa exploración numérica. Digámoslo metafóricamente: el primer tipo de uso es el de la computadora como "lupa", el segundo, la computadora como "microscopio". En el primer caso, la computadora nos permite ver mejor, *lo que ya podíamos ver;* en el segundo, nos permite ver *algo nuevo para nosotros,* un escenario que no es posible presenciar sin el instrumento aludido. Esto hace que el conocimiento que podamos construir a partir de tal escenario, esté vinculado orgánicamente al aparato.

Para ilustrar la discusión precedente y ubicarla en un terreno más concreto, vamos a discutir el siguiente ejemplo: estructuras geométricas construidas recursivamente, *fractales.*

No iremos más allá de lo estrictamente necesario, en lo que se refiere a cuestiones de orden técnico. (La bibliografía suministrada permitirá profundizar en estos temas a quien lo considere provechoso. Se recomienda hacerlo.)

Escenario fractal: Los primeros ejemplos

Empezamos este ensayo refiriéndonos a un resultado ya clásico de la matemática del siglo XIX. La construcción de funciones continuas sin derivada fue parte importante en la elaboración del paradigma analítico de la matemática. Es decir de la forma de imaginar la naturaleza de la disciplina como predominantemente simbólica. Como acertadamente lo ha dicho P. Davis en su artículo (véase [4]), el ojo fue considerado, a partir de aquel momento, como *un gran mentiroso*. De allí que se creyera que la *verdad matemática* (que ya había sufrido una gran transformación con la creación de las geometrías no-euclidianas), no podía ser localizada en las imágenes de la geometría; sólo podría ser descubierta mediante las manipulaciones conceptuales en un medio ambiente simbólico. Todo este movimiento en favor de una matemática simbólica se transpuso a la didáctica. Nadie desconoce ahora todos aquellos artículos sobre razonamientos incorrectos hechos a partir de figuras geométricas. Había un mensaje (no tan) implícito en este tipo de actividad: debajo del propósito noble de alertar sobre posibles "riesgos" por el uso de figuras geométricas, se desvalorizaba la forma de representación visual en la matemática escolar. Claro, tales artículos, por ejemplo aquel que "demuestra" que todos los triángulos son isósceles, nunca se toman el trabajo de aclarar que la falacia está en haber dibujado mal la figura, no en razonar mal por culpa de ella (véase a este respecto el artículo de Davis ya mencionado).

En el periodo de la matemática que estamos considerando –que dio lugar a la versión axiomática de la matemática– *el objeto de estudio era la estructura*. El estudio de casos particulares empezó a quedar desplazado por el estudio de características de conjunto. Aun resultados como el de la existencia de una función continua no-derivable de Weierstrass, quedaron subordinados a resultados "más estructurales" como el *teorema de categoría* de Baire. Lo que nos interesa resaltar de esta historia, es el paulatino desplazamiento que sufrió la geometría a partir del paradigma analítico. Notemos que el desarrollo a lo largo de estas líneas, hizo inadecuado el enfoque geométrico, debido a la naturaleza misma de los problemas que se trataban. Vale la pena recordar el comentario de Mandelbrot a raíz del consejo que su tío le dio cuando Benoit (el Mandelbrot que conocemos) lo consultó con relación a un tema para sus estudios doctorales. El tío le dijo que no se interesara por temas de la geometría. Que en ese terreno, había un estancamiento. En cierta forma aquello era cierto. Los trabajos de Julia y Fatou sobre iteración de funciones racionales *estaba estancado por no poderse describir la geometría que los acompañaba.* El análisis era eso: análisis completamente simbólico. Muchos otros ejemplos pueden traerse a la memoria: la construcción del triángulo de Sierpinski, la curva de Von Koch, cuya motivación principal era dar una construcción geométrica de una función continua sin derivada. Esta "curva", aparece como una reacción a la presencia "excesiva" del punto de vista analítico. Sin embargo, tal punto de vista, simétrico en cierta forma al de Weierstrass, no tuvo mucha resonancia pues apareció en un momento en que el paradigma analítico estaba ya establecido como dominante. El punto de vista analítico usó estas construcciones para mostrar que la matemática podía verse como independiente del mundo físico, pues estos objetos conceptualizados dentro de ciertas estructuras formales, ¡*no reflejaban nada del mundo material*! Es interesante en este momento traer una cita en extenso de F. Dyson, tomada de su artículo "*Characterizing Irregularity*" (véase [10]):

> *Una gran revolución en ideas separa la matemática clásica del siglo XIX, de la matemática del siglo XX. La matemática clásica tuvo sus raíces en las estructuras regulares de Euclides y en la dinámica continua de Newton. La matemática moderna comienza con la teoría de conjuntos de Cantor y con la curva de Peano, que llena un cuadrado (añadimos nosotros: y con la curva de Weierstrass, la de Von Koch, con la construcción geométrica, en manos de Hilbert de la curva analítica de Peano)... estas estructuras fueron vistas al comienzo como "patológicas"... más cercanas a la música atonal y a la pintura cubista... estos ejemplos fueron importantes para mostrar que el mundo de la matemática poseía una riqueza de posibilidades que iba más allá de las simples estructuras que podían verse en la naturaleza. La matemática del siglo XX se desarrolló en la creencia de que había trascendido los límites impuestos por sus orígenes naturales. Ahora como Mandelbrot nos muestra ejemplo tras ejemplo, la naturaleza ha hecho una broma a los matemáticos. . . las mismas estructuras patológicas inventadas para romper los nexos con la naturaleza, resulta ahora que son inherentes a la descripción de los objetos naturales que nos rodean.*

Esto que tan elocuentemente describe Dyson, es parte del desarrollo de la matemática: de los cambios de paradigma o los cuestionamientos al mismo. Hace poco tiempo apareció en la revista Scientific American (véase [7]), un artículo titulado: "*The Death of Proof*" (La muerte de la demostración) en el cual el autor presenta las diversas posiciones de destacados matemáticos con respecto a las "demostraciones por computadora". Este instrumento está teniendo una presencia cada día mayor en la investigación matemática, según algunos de estos autores, y prácticamente ninguna presencia, según otros. Nos interesa ver y comprender *el mecanismo de transposición* que se está poniendo en marcha ya –quizá desde hace algún tiempo– para llevar estas inquietudes al terreno de la didáctica. El artículo de P. Davis que hemos mencionado antes, es una respuesta representativa de cómo estas preocupaciones que surgen inicialmente en el terreno exclusivamente matemático, van constituyéndose en problemas significativos para la didáctica, pues "es necesario actualizar el currículum" con temas que muestran su importancia: son temas que se ubican en el centro de la discusión sobre la naturaleza de una disciplina, en este caso la matemática. Por lo pronto, diremos que *la transposición obliga a "desestructurar" un conocimiento que fue desarrollado en cierto contexto con el propósito de llevarlo a una estructura distinta, como lo es un curriculum.* Muchas veces, ese conocimiento queda ubicado artificialmente entre antecedentes de él y consecuencias de él, sirviendo una función dentro de un diseño cuasi-formal.

Si la computadora es eventualmente aceptada como un instrumento de demostración en matemáticas, es claro entonces que estaríamos hablando de "otra" matemática, pues habríamos modificado la naturaleza de su normatividad. Es decir de las *formas legales de validación* de sus resultados que han ido evolucionando con la matemática misma. Desde luego, como lo ha mostrado inequívocamente la Epistemología Genética, las formas de validación de los resultados de una ciencia son consustanciales a su naturaleza. En efecto, las formas de validar no pueden ignorar la naturaleza de los "objetos" de la matemática, por ejemplo. Este es en gran medida el problema que se presenta cuando un estidiante tiene que *demostrar* proposiciones que le resultan obvias. Vemos reflejado así, el problema de la normatividad en la enseñanza.

Con el propósito de sustanciar nuestra interpretación de todas estas situaciones que vienen a incidir en la didáctica, vamos a presentar algunos ejemplos. El primero, tiene que ver, como mencionamos líneas arriba, con la "geometría fractal". Los objetos de estudio en esta geometría, ahora ya *objetos normales*, eran los que antaño se consideraban como "monstruos", como "casos patológicos", etc.

Construcción de Von Koch

Para la construcción se parte de una figura básica:

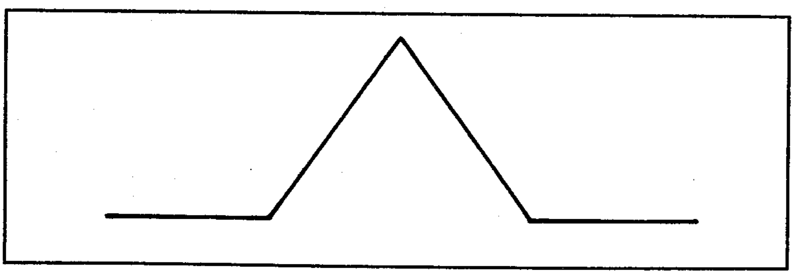

Figura 1.

Se trata a continuación, de colocar una copia de la figura básica sobre cada uno de los segmentos de los que está compuesta la figura. Como la figura original está compuesta de cuatro segmentos de igual longitud, las cuatro copias que vamos a colocar serán modelos a escala (¿cuál es la escala?) de la figura original. El resultado es el siguiente:

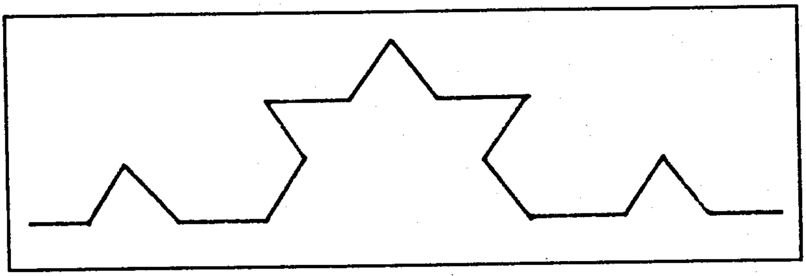

Figura 2

El procedimiento de ir colocando copias de la figura original en los segmentos de recta, continúa indefinidamente. La figura que resulta como límite de este procedimiento, es la "curva" de Von Koch. Desde luego, en la pantalla de una computadora, independientemente de su resolución, sólo podremos representar gráficamente algunas de las etapas del proceso infinito cuyo resultado es la curva. Aquí ocurre algo análogo a lo que se presenta cuando estudiamos sucesiones numéricas. Dado el término general de la sucesión, podemos usar una calculadora para darnos una idea de los valores numéricos de los términos sucesivos. Los términos de la sucesión pueden ser números irracionales, así que la calculadora nos dará valores aproximados, hasta cierta cifra decimal. Análogamente, las diferentes etapas que podamos graficar de la curva de Von Koch, nos van dando una idea del objeto límite. Hay algo, empero, que debe ser recalcado: la forma que tiene el término general de una sucesión nos permite no sólo ir produciendo con una calculadora aproximaciones a los valores numéricos sino que, además, nos permite saber si la sucesión es convergente, si es monótona etc; en el caso del código de computadora que nos permite graficar la curva de Von Koch, este nos permite adentrarnos en la estructura geométrica de ella. En efecto, el código empleado refleja que el objeto geométrico bajo estudio posee la propiedad de autosemejanza. Esto es lo que hemos indicado cuando decíamos que a partir de la figura original, íbamos *colocando copias a escala en los lados de la figura del nivel precedente*. De allí que la razón de la *complejidad geométrica* del objeto, se encuentre . . . ! *en el tiempo que ha estado corriendo el programa*! Es decir, la evolución temporal del programa es la responsable del grado de complejidad del objeto geométrico que vemos en la pantalla. La complejidad aumenta rápidamente, de allí que sólo podamos graficar las primeras etapas del proceso. Aquí podemos ver, por qué a nivel de lo escolar, este tipo de indagación se ubica en el terreno de lo computacional. Por ejemplo, la cuarta etapa en la graficación de la curva de Von Koch es:

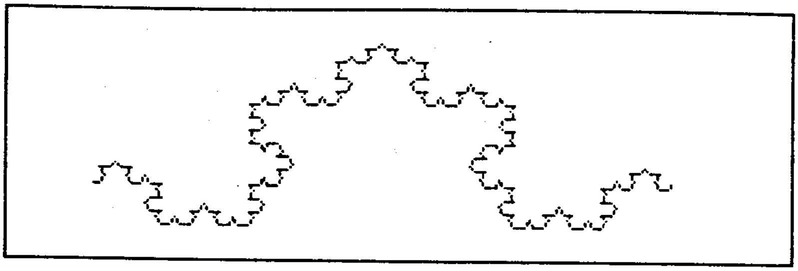

Figura 3.

Las características de una función continua sin derivada ya empiezan a ser claras en esta última gráfica. Hablando informalmente, una función continua sin derivada debe tener un "pico" en cada punto –por ello no es posible graficar tal función. La imposibilidad de graficar una función continua, que en términos escolares se describía como aquélla cuya gráfica podía trazarse "sin levantar el lápiz del papel", explica la conmoción creada por el ejemplo de Weierstrass. ¿Qué aporta la presencia de la computadora para el estudio de estos ejemplos? podemos contestar: un enfoque de la construcción de Von Koch desde la perspectiva de los procesos recursivos y de la complejidad del resultado en términos del tiempo y del nivel ejecutado vía el código computacional. Aunque no es el único camino, *una curva continua sin derivada puede obtenerse mediante un proceso recursivo que replica una forma básica.* Todo este pensamiento, más estructurado y organizado alrededor de la idea de proceso recursivo, ha sido posible llevarlo a la enseñanza –esto es, ha sido posible *transponerlo*– gracias a la disposición de las computadoras con buena capacidad de graficación y de lenguajes de programación que han suministrado las formas de representar externamente lo que sólo era posible imaginar. Sin embargo, los antecedentes curriculares de los estudiantes (se habla de antecedentes pues *el proceso de transposición linealiza el conjunto de ideas*) no siempre son los adecuados: es conveniente recalcar que la idea de complejidad subyacente a estos procesos recursivos, está ligada a la dinámica del proceso, a cómo "corre" el programa. Este modo de pensar no se ve favorecido por un curriculum en el cual el trabajo computacional representa una ruptura conceptual y no un desenlace natural.

Ventanas y representaciones

En el contexto de la intervención del profesor, hemos explorado una actividad, que podríamos llamar "Pruebas Didácticas". La presencia de la computadora nos obliga a modificar las formas de intervención del profesor. La computadora puede servir para reforzar la estructura de control presente en una estructura cognitiva. Esto es parte importante para la construcción de un puente que va de una estructura cognitiva hasta la conceptualización formalizada de la noción involucrada. Un ejemplo de ello es el que se refiere a la toma de conciencia por parte de los estudiantes, de la diferencia entre lo muy grande y el infinito.

Veamos otro: la demostración del resultado de Weierstrass en el marco del contexto formal del análisis, dista mucho de ser sencilla. La presentación de este tipo de resultados es muy útil para que el estudiante construya una visión integral del dominio de problemas del análisis. ¿Hay alguna forma de discutirlo sin tener que entrar a los mecanismos validatorios del análisis? la respuesta, afortunadamente, es afirmativa. Después de describir la construcción de la curva en el pizarrón, puede presentarse el código logo:

```
TO KOCH :L :N
IF :N=0 [FD :L STOP]
KOCH :L/3 :N-1
LT 60
KOCH :L/3 :N-1
RT 120
KOCH :L/3 :N-1
LT 60
KOCH :L/3 :N-1
END
```

Hemos encontrado que es una verdadera recompensa para los estudiantes, para su comprensión del problema, que intenten dibujar al menos los primeros niveles de la curva de Koch. Es, además, un buen ejemplo para relacionar la estructura recursiva con la autosimilaridad de la curva. Al final no habremos presentado una prueba en el sentido clásico, pero sí una prueba sobre el modelo discreto constituido por la pantalla de la computadora. **El código es independiente del sustrato**: discreto o continuo, sobre el cual puede llevarse a cabo el proceso de dibujar la curva. De allí que la prueba sobre el modelo discreto sirva, y esto es lo más relevante desde nuestro punto de vista, como una prueba didáctica, es decir, como un argumento que muestra el contenido semántico del teorema.

Hay que enfatizar el papel que juegan las representaciones en la construcción del conocimiento. La naturaleza de la interacción entre las representaciones de carácter algebraico y de carácter geométrico es uno de los problemas básicos, que a nuestro juicio debe explorarse dentro de los estudios que tiendan a incorporar la computadora a la educación matemática. La interacción entre el código analítico y el resultado visual es particularmente interesante en el caso de los fractales debido a la presencia de la estructura recursiva. Como ya hemos observado, las estructuras recursivas son un centro nervioso donde se dan cita diferentes versiones del infinito. En el estudio sobre la curva de Koch, por ejemplo, se pidió a los estudiantes que calcularan la longitud de la curva. Cuando se dieron cuenta que el perímetro iba creciendo de manera no acotada, llegaron a la conclusión que el área encerrada por la figura debería crecer también sin cota. Resultó un verdadero conflicto cognitivo el tener que aceptar la existencia simultánea de un área finita encerrada por una curva cuyo perímetro era infinito.

Síntesis y conclusiones

Durante los siglos XVIII y XIX, los científicos desarrollaron el paradigma newtoniano de modelar la naturaleza mediante ecuaciones diferenciales. Los primeros modelos se dieron vía ecuaciones sencillas, cuyas soluciones podían hallarse explícitamente. Esta época corresponde al estudio de modelos lineales, como los derivados de las leyes fundamentales de la mecánica, que aún hoy día siguen ocupando un lugar central en los cursos de esta materia que se imparten en las facultades de ingeniería y ciencias naturales. Surgieron, empero, ejemplos de modelos diferenciales como el correspondiente a las ecuaciones de Navier-Stokes, hacia mediados del siglo XIX, cuyo objetivo era la explicación del comportamiento de fluidos en condiciones "no tan idealizadas". El modelo era no lineal, se proponía para el estudio de la turbulencia y en un principio, resultó inabordable con las técnicas de la época. (Así como la función continua de Weierstrass, era un ejemplo "patológico", por lo que estaba fuera del paradigma dominante). El estudio de los sistemas no lineales está íntimamente vinculado al estudio de los fractales. El advenimiento de las computadoras, y sobre todo, sus capacidades gráficas, ha dado a los investigadores un recurso experimental nuevo y novedoso para la investigación sobre estos sistemas no lineales. Las percepciones que se vayan desarrollando, serán una mezcla de analogías, intuiciones y reinterpretaciones de las experiencias tanto en el campo de las ciencias físicas como de la matemática.

¿Cómo afectan todos estos desarrollos a las estructuras curriculares y a la concepción misma de la matemática cuando se la ve como objeto de enseñanza? En otras palabras, ¿cómo podemos describir el proceso de transposición que está en marcha? A nuestro juicio, esta es una pregunta importante, pues en toda época, lo expresamos de nuevo, las estructuras curriculares han sido reflejo de los desarrollos de la matemática. Desde luego, no hablamos de un reflejo mecánico. Para terminar este escrito, queremos regresar a algunas ideas que hemos expuesto al principio. La visualización en matemática y en el terreno de la enseñanza ha sido puesta sobre un primer plano gracias a las posibilidades gráficas de la computadora, pero hay razones de peso para considerar su pertinencia en la educación matemática, al margen del ambiente computacional. El libro "*Visualisation in teaching and learning mathematics*" (véase [10]), nos da amplio testimonio de ello. El término *visualización* hay que entenderlo, a nuestro juicio, en el contexto de una Teoría de las Representaciones. El término describe todo lo concerniente al proceso de producción de una representación gráfica vinculada a un concepto matemático o a un problema. Dentro del campo operatorio propio de una representación, incluiremos las manipulaciones gráficas que puedan hacerse sobre dicha representación. Las formas de representación de una idea matemática están asociadas a la estructura cognitiva que le da origen al concepto formal posterior. Es trabajando desde la estructura cognitiva como se empieza a conformar el concepto. Las formas de representación, en particular las visuales, no pueden considerarse separadas de la construcción conceptual misma. Un concepto matemático (al menos en un nivel básico) puede representarse gráfica, numérica o algebraicamente. Pero, debe entenderse que el concepto mismo, como "objeto" de la matemática, no preexiste a tales formas de representación. Este problema está vinculado al que, en la introducción, hemos considerado como un problema central de la didáctica: la descripción de los mecanismos de transformación de una estructura cognitiva en una entidad formalizada.

La noción de demostración como *demostración a partir de hechos (axiomas) bien establecidos*, está en el corazón de la normatividad matemática. ¿Debe ser este mismo el status de la noción de prueba en la disciplina Educación Matemática? La posibilidad misma de la pregunta en el seno de la comunidad de didactas, refleja que la posición, importada de la matemática, y que durante mucho tiempo no fue cuestionada, empieza a ceder. Esta cesión no es un rasgo de claudicación sino, más bien, el resultado de la toma de conciencia de la especificidad de las dos disciplinas, distintas pero fuertemente vinculadas. Las nociones centrales de la geometría fractal y de la teoría del caos son resultado de la organización de campos de indagación sobre estructuras autosimilares, sobre la "exagerada dependencia" de las soluciones de una ecuación respecto sus condiciones iniciales, sobre la organización de un proceso caótico y la desorganización de un proceso determinista etc. Los códigos simbólicos y las representaciones gráficas asociadas, son los medios de introducir nuevas formas de pensar fenómenos naturales a través de la noción de modelo. De esta manera, lo simbólico y lo visual quedan asociados, abriendo la posibilidad, reiteramos, a la ruptura con el programa cartesiano de subordinar la imagen a su simbolización.

Bibliografía

1. **Piaget, J., García., R.** *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*, Siglo XXI, México, 1984.
2. **Joshua,S., Dupin,J.J.**, *Introduction à la Didactique des Sciences*, Presses Univ. de France, Paris 1993.
3. **UNESCO**, CornuRalston (eds.), *The Influence of Computers and informatics on Mathematics and itsTeaching*. Paris 1992.
4. **Davis, P.**, *Visual Theorems*, Educational Studies in Mathematics, vol. 24, 333-344, 1993.
5. **Gleick., J.**, *Chaos, Making a New Science*. Penguin Books, 1987.
6. **Peitgen-Jurgens-Saupe**, *Fractals for the Classroom* Springer-Verlag, New York, 1992.
7. **Horgan, J.**, "The Death of Proof", *Scientific American*, 74-82, October 1993.
8. **Sfard, A.**, "Reification as the birth of metaphor", for *The Learning of Mathematics*, vol. 14(1), 44-55, 1994.
9. **Dyson, F.**, *Science 200* (1978), 677-678.
10. **W. Zimmermann y S. Cunningham** (eds.), "Visualisation in Teaching and Learning Mathematics. *MAA Notes* 19,1991.