Los Niños y las Variables

Resumen

En este artículo se revisan los resultados de algunas investigaciones que estudian las dificultades que tienen los alumnos que se inician en el estudio del álgebra, con los diferentes usos de la variable.

La variable y sus distintos usos

¿Qué son estas cosas llamadas variables? De esta manera Wagner (1983) titula uno de sus artículos en el que enfatiza la complejidad de este concepto y las dificultades que tienen los estudiantes que inician el estudio del álgebra en trabajar con la variable. El concepto de variable no es fácil de definir, ya que su significado puede cambiar con el contexto en el cual aparece. Usiskin (1988), por ejemplo, destaca cuatro usos diferentes de la variable y los asocia a diferentes concepciones del álgebra.

CONCEPCIÓN DEL ÁLGEBRA	USO DE LA VARIABLE
Aritmética Generalizada	Generalizadores de patrones (traduce, generaliza)
Medio para resolver problemas	Incógnitas, constantes, (resuelve, simplifica)
Estudio de relaciones	Argumentos, parámetros (relaciona, grafica)
Estructura	Marcas arbitrarias en papel (manipula, justifica).

(Usiskin, 1988, p.17)

Sonia Ursini Legovich
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV-IPN

Aunque puede ser que sólo uno de estos usos de la variable aparezca en una tarea específica, es muy común que los estudiantes tengan que resolver problemas en los que aparece más de uno de estos usos, como lo ilustra el problema siguiente:

> " Encuentra la ecuación de la línea que pasa por el punto (6, 2) y cuya pendiente es 11".
>
> (Usiskin, 1988, p.14)

Cuando, para resolver este problema, se parte de la relación general que existe entre los puntos de una recta y su pendiente, a saber: $Y = mX + b$, queda implícito que se espera que el estudiante sea capaz de concebir las variables como números generales. En efecto, esta expresión describe una línea general y las variables involucradas representan números generales que pueden, por lo tanto, asumir cualquier valor. Sin embargo, para una línea particular, m y b no representan números generales, sino constantes. Por ejemplo, en el ejemplo arriba mencionado el valor de la pendiente está dado y tiene que substituirse a m; b es una incógnita que puede determinarse usando los datos. X y Y son dos variables vinculadas por una relación funcional: X puede considerarse un argumento al que se le puede asignar cualquier valor mientras que los valores de Y cambian en correspondencia.

Es decir, para resolver este problema, los estudiantes deben ser capaces de trabajar con números generales, con constantes, con incógnitas, con variables en una relación funcional y poder pasar de una a otra interpretación, aun cuando estas diferentes caracterizaciones de la variable tengan la misma representación simbólica.

Un usuario competente del álgebra es capaz de interpretar la variable de modos distintos dependiendo del problema en el cual aparece. Reconoce, por ejemplo, cuando una expresión representa una ecuación (1), y la variable representa una incógnita específica cuyo valor puede determinarse con precisión; y cuando una expresión representa una tautología (2), y la variable representa un valor indeterminado. Es capaz de distinguir estas expresiones a pesar de que parezcan muy similares.

$$x + 5 = x + 1 \quad (1)$$
$$x + 5 = 5 + x \quad (2)$$

Un usuario competente es capaz de simplificar una expresión algebraica, de trabajar con la idea de variación cuando las variables están involucradas en una relación funcional y de discriminar entre las acciones a tomar en cada caso particular. Para él, las diferencias que caracterizan los distintos usos de la variable, pueden parecer triviales y hasta insignificantes, sin embargo, reconocerlas es crucial para los principiantes. El no reconocerlas se torna frecuentemente un obstáculo que bloquea el aprendizaje del álgebra (Matz, 1982).

En matemáticas se usan generalmente los símbolos literales para representar las variables. Los mismos símbolos son usados para denotar diferentes caracterizaciones de la variable, y diferentes símbolos son empleados para representar la misma caracterización de la variable. Este uso de los símbolos literales puede contribuir a opacar las diferencias entre las distintas caracterizaciones de la variable y ocultar las condiciones que determinan dónde y cómo puede variar su valor (Matz, 1982).

Argumentos de este tipo han llevado en distintas ocasiones a considerar que los símbolos comunmente usados para representar la variable no son los más adecuados y que, por lo tanto, contribuyen a crear cierta confusión en los estudiantes que inician el estudio del álgebra (Thorndike *et al.*, 1923; Van Engen, 1953; Wagner, 1981; Matz, 1982). Se llegó inclusive a sugerir (Menger, 1956) la conveniencia de usar símbolos que reflejen la variedad conceptual que subyace los diferentes usos de variables. Sin embargo, si bien puede parecer atractivo, hay que considerar que un acercamiento como el propuesto por Menger no liberaría a los estudiantes de la necesidad de interpretar la misma variable simbólica de diferentes formas. Tal y como se enfatizó anteriormente, es muy frecuente que para poder resolver un problema se requiera la capacidad de interpretar un mismo símbolo literal de maneras distintas.

Las consideraciones anteriores subrayan el caracter multifacético del concepto de variable y señalan que para poder trabajar exitosamente con la variable es necesario poder interpretar de distintas maneras los símbolos que se usan para representarla, así como poder pasar de una interpretación a otra. Con el fin de elucidar de qué manera los alumnos interpretan los símbolos literales usados para representar las variables en un contexto algebraico escolar, Küchemann (1980) realizó un estudio con más de 3000 estudiantes cuyas edades oscilaban entre 13 y 15 años. Para ello aplicó un cuestionario escrito, en el cual se pedía a los alumnos que interpretaran y manipularan expresiones algebraicas, y que resolvieran problemas en los que las variables estaban representadas por símbolos literales.

Al analizar las respuestas dadas por los alumnos, Küchemann (1980) identificó seis diferentes maneras de interpretar los símbolos literales:

<u>Letra evaluada</u>: A la letra se le asigna un valor numérico;

<u>Letra no utilizada</u>: La letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningun significado;

<u>Letra como objeto</u>: Se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como a un objeto en sí;

<u>Letra como incógnita específica</u>: La letra representa un número particular pero desconocido y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella;

Letra como número generalizado: Se considera que la letra representa o es capaz de asumir distintos valores;

Letra como variable: Se considera que la letra representa un rango de valores no especificado y que existe una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

Estos resultados destacan el hecho de que los alumnos tienen diferentes maneras de interpretar las letras usadas para representar las variables. Esto indica que los que se inician en el estudio del álgebra consideran que los símbolos literales usados como variables pueden interpretarse de diferentes modos, y que su significado puede variar con el problema. Pero los resultados reportados por Küchemann muestran también que la interpretación dada por los niños no es siempre la apropiada, y frecuentemente es la fuente de respuestas erróneas.

Desde una perspectiva piagetiana, Küchemann considera que esta clasificación de la interpretación de los símbolos literales, refleja un grado de dificultad creciente. Considera que las primeras tres categorías indican un bajo nivel de respuesta, y argumenta que para que un niño tenga una comprensión de 'los inicios del álgebra', es necesario que sea capaz de trabajar, por lo menos, con problemas simples que requieran el uso de la "letra como incógnita especifica". Afirma que un niño habrá conprendido perfectamente el uso de los símbolos literales en álgebra, cuando sea capaz de trabajar con la "letra como variable". El orden que Küchemann propone sugiere que es más fácil para el niño trabajar con la "letra como incógnita específica" que con la "letra como número generalizado", y que es más fácil trabajar con la "letra como número generalizado" que con la "letra como variable".

Si bien puede ser válido considerar que los alumnos se acercan al álgebra cuando sus respuestas pertenecen a las últimas tres categorías, la visión jerárquica que refleja la clasificación de Küchemann podría estar insinuando un orden en el cual deberían enseñarse los distintos usos de las variables. En efecto, considerar que para los alumnos es más fácil trabajar con una interpretación del símbolo literal que con otra implica que es más facil trabajar con una caracterización de la variable que con otra. Sin embargo, hay que considerar que cada uno de los distintos usos de la variable puede ser enseñado a diferentes niveles de complejidad y, por lo tanto, una organización jerárquica, como la que se desprende de la clasificación de Küchemann, no parece ser apropiada para propósitos de enseñanza. Además, como lo muestran los resultados de las investigaciones que estudian el trabajo de los alumnos con distintas caracterizaciones de variables, a saber, variable como número general, variables en una relación funcional y variable como incógnita específica, éstos tienen dificultades con cada una de ellas. Esto es, los resultados de las investigaciones no arrojan evidencias que permitan considerar que es más fácil para los niños trabajar con una que con otra caracterización de la variable.

Los alumnos y la variable como número general

La habilidad para generalizar es una de las características más importantes de la inteligencia (Krutetskii, 1976). Es una habilidad general, esto es, se usa en diferentes campos y aparece desde edades muy tempranas. Sin embargo, Krutetskii y su grupo encontraron que la habilidad para generalizar en matemáticas es una habilidad específica: es la habilidad de generalizar relaciones numéricas y espaciales, expresadas a través de números o símbolos literales. Encontraron además que existe una relación muy estrecha entre la habilidad para generalizar material matemático y la habilidad para estudiar matemáticas. Argumentan, por ejemplo, que los alumnos que tenían facilidad para las matemáticas, podían detectar rápidamente cuales eran los rasgos generales que caracterizaban situaciones exteriormente distintas, mientras que los alumnos menos hábiles necesitaban mucho entrenamiento y práctica para poder generalizar.

Krutetskii sugiere que la capacidad para generalizar en matemáticas sigue un camino evolutivo: desde la habilidad para ver lo que es ya conocido y general en lo particular, a la habilidad de ver lo que es desconocido y general. Se evoluciona desde la necesidad de analizar muchos ejemplos particulares, como prerrequisito para una generalización, a la habilidad para generalizar a partir de un único ejemplo particular. Un punto enfatizado por Krutetskii es que la habilidad matemática, y en particular la habilidad para generalizar en matemáticas, no son habilidades innatas sino adquiridas. Este es un hecho crucial que hay que tomar en cuenta cuando se diseñan ambientes de enseñanza para ayudar a los alumnos a desarrollar la habilidad para generalizar en matemáticas.

La variable es un instrumento que se usa en matemáticas para expresar una generalización. Cuando se quiere expresar matemáticamente un patrón, una regularidad o un método general, se usan las variables para representar los números generales involucrados.

Distintos estudios que investigaron la capacidad que tienen los alumnos para trabajar con la variable como número general cuando aparece en tareas algebraicas tradicionales, encontraron que la gran mayoría tenía dificultades para trabajar con esta caracterización de la variable. Se encontró (Küchemann, 1980; Booth, 1984), por ejemplo, que los alumnos tienden a interpretarla de varios modos distintos dependiendo del problema: la ignoran; la interpretan como una incógnita específica asignándole un valor específico; la interpretan como un objeto. Resultados similares se obtuvieron en un estudio desarrollado en México con alumnos de secundaria (Ávila, *et al.*, 1990).

Estos resultados muestran que ante la necesidad de interpretar un símbolo literal usado para representar un número general los estudiantes están bastante desorientados. Booth (1984), por ejemplo, sugiere que los alumnos tienden de manera "natural" a interpretar las letras como números específicos. Tanto Booth (1984) como Küchemann (1980) sugieren que la dificultad para interpretar la letra como un número general puede depender del desarrollo cognitivo.

Sin embargo, los resultados de otras investigaciones desarrolladas en ambientes computacionales no sustentan esta hipótesis y muestran que en estos ambientes y con ayuda, los alumnos pueden desarrollar la capacidad de interpretar la letra como número general. Thomas y Tall (1986), por ejemplo, diseñaron materiales computacionales cuyo objetivo era ayudar a estudiantes de 12 años de edad sin experiencia algebraica, a que mejoraran su comprensión de los conceptos algebraicos generales, por medio de una exploración estructurada de ejemplos particulares. Se prestó atención especial al uso de letras como números generales y de letras como variables (adoptando la definición de Küchemann). Los resultados de una evaluación aplicada en seguida después de terminado el estudio y de una evaluación posterior, mostraron que las respuestas dadas por el grupo experimental eran significativamente mejores que las del grupo control, para preguntas que requerían una comprensión del uso de letras como incógnitas específicas, letras como números generales y letras como variables.

Los resultados de los estudios longitudinales que Noss (1986) y Sutherland (1987) desarrollaron en ambientes LOGO, muestran que alumnos de 8 a 11, y de 12 a 13 años de edad, respectivamente, pueden acercarse en LOGO a la idea de número general. Por ejemplo, los niños eran capaces de considerar que el nombre de la variable usado para designar la entrada a un procedimiento general de LOGO representaba un rango de valores. Sutherland (1987) encontró también que después de tres años de trabajar en ambientes LOGO en los que los niños escribían y corrían procedimientos generales asignando distintos valores a las entradas, seis de los ocho alumnos de su estudio fueron capaces de usar en un contexto algebraico la experiencia adquirida en LOGO y considerar que una variable puede representar un rango de valores.

Los resultados obtenidos en ambientes computacionales sugieren que acercamientos no-tradicionales pueden ayudar a reducir las dificultades y ayudar a los alumnos a trabajar con la idea de número general y su representación simbólica. Además está también la sugerencia implícita de que la instrucción convencional no brinda suficientes oportunidades para que los alumnos construyan la idea de número general y desarrollen un significado para el símbolo usado para representarlo. De aquí se desprende la necesidad de buscar acercamientos alternativos a los tradicionales que ayuden a los alumnos a trabajar con la idea de número general y su simbolización.

Sugerencias como la anterior no son nuevas. Mason (1985), por ejemplo, estudió cómo se podría ayudar a los alumnos a trabajar con aritmética generalizada. Analizando el proceso de generalización identificó cuatro pasos, a saber: "observación", percepción mental de un patrón o de una regularidad; "verbalización", articulación de lo observado en palabras; "notación", uso de símbolos para formular la generalización; "evaluación", verificación de la validez de la formulación. En consecuencia Mason enfatiza la importancia de ofrecer a los alumnos la oportunidad de percibir patrones o relaciones y de estimular la necesidad de expresarlos antes de apresurarlos para que trabajen con los símbolos literales.

Estos argumentos sugieren la conveniencia de trabajar con la idea de número general antes de la introducción del lenguaje algebraico formal. Esto, implícitamente señala que algunas de las dificultades a las que se enfrentan los alumnos al trabajar con los símbolos literales que representan números generales, pueden reflejar un entendimiento pobre del concepto representado por el símbolo. El diseño de ambientes didácticos especiales podría ayudar a los alumnos con antecedentes aritméticos, a pasar del trabajo directo con números específicos a considerarlos como objetos que pueden ser incluidos en el concepto más amplio de número general. De este modo podría ayudarse a los alumnos a acercarse a la idea del número general y de su simbolización antes de introducirlos al álgebra formal.

Los alumnos y las variables en una relación funcional

Las variables pueden ser empleadas para expresar una relación funcional entre dos cantidades cuyos valores pueden estar cambiando. Lo que caracteriza este uso de las variables es, por un lado, su movimiento dentro de ciertos rangos de valores (aspecto dinámico) y, por el otro, el hecho de que el valor que se asigna a una de las variables afecta el valor de la otra variable (aspecto estático). El aspecto dinámico es enfatizado cuando se considera una relación funcional como una manera de expresar la variación. Por ejemplo, la definición que da Dirichlet de funciones continuas, refleja esta visión dinámica:

> "Sean a y b dos valores fijos y sea x una cantidad variable que asume gradualmente todos los valores entre a y b. Ahora bien, si a cada x le corresponde un único valor finito de y, de modo que mientras x pasa de manera continua de a a b, y $y = f(x)$ analogamente varía de modo gradual, entonces se dirá que y es una función continua de x para este intervalo"
>
> (citado en Hamley, 1934, p. 14)

Si bien anteriormente la definición para introducir la idea de función reflejaba una visión dinámica de la relación funcional, en los currícula actuales las funciones se suelen definir por medio de dos conjuntos y una regla de correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto exactamente un elemento del otro conjunto. En esta definición "moderna", que aparece en consecuencia del desarrollo de la teoría de conjuntos, se resalta el aspecto estático de una relación funcional, mientras que la idea de variación y la relación entre el movimiento de las variables, o sea, el aspecto dinámico, queda relegado.

Se encontró que cuando se usa la definición 'moderna' para introducir la idea de función, los alumnos tienen dificultades con las ideas de dominio y de rango de variación, tanto si se representa la función de forma gráfica como analítica (Markovits *et al.*, 1986; Sfard, 1989). También tienen dificultades con funciones constantes, funciones representadas por gráficas desconexas y con funciones definidas por partes (Markovits *et al.*, 1986).

Markovits y sus colegas (1986) sugieren que estas dificultades pueden ser una consecuencia de esta definición "moderna" de función, en la que la idea de variación ya no se enfatiza. Sin abogar por un regreso a un acercamiento más tradicional, estos investigadores sugieren que los alumnos deberían ser ayudados a relacionar la vieja y la nueva definición de función. Esto implica que para auxiliarlos a trabajar con las funciones y con las nociones subyacentes, como por ejemplo, las ideas de dominio, rango, monotonicidad, máximos y mínimos, habría que ayudarlos por un lado, a percibir las variables como entidades cuyos valores cambian bajo restricciones dadas, y por el otro, a fijarse en la regla de correspondencia que las une.

La necesidad de desarrollar estas visiones complementarias de las variables en una relación funcional, puede interpretarse como la necesidad de desarrollar lo que Tall y Thomas (1991) llaman "pensamiento versátil". El "pensamiento versátil", se refiere a la capacidad de moverse libre y fácilmente entre modos de pensamiento secuencial/analíticos y global/holístico (Tall y Thomas, 1991, p.3). En cuanto a las variables en una relación funcional, esto podría implicar por un lado, la capacidad de considerar las variables en una correspondencia estática, uno-a-uno, y calcular el valor de una de ellas en correspondencia al valor asignado a la otra; por otro lado, la capacidad de considerar las variables como entidades que se mueven de manera relacionada dentro de ciertos rangos de valores y, de este modo, trabajar con la idea de cambio o variación, o sea, con el aspecto dinámico.

Pero trabajar con la idea de cambio, no es fácil para los alumnos. Küchemann (1980), por ejemplo, en el estudio ya mencionado encontró que sólo algunos alumnos podían interpretar la "letra como variable" y considerar que los cambios en un conjunto de valores dependían de los cambios en otro conjunto de valores. Las maneras en que los niños representan situaciones que implican la idea de cambio sugieren que los procesos dinámicos son frecuentemente percibidos de manera estática (Bednarz y Dufour-Janvier, 1991). Cuando trabajan con procesos dinámicos, los alumnos parecen observar sólo algunas características esenciales que pueden describirse de manera puntual. Tienen también dificultades para percibir el cambio cuando este es representado por medio de gráficas u otros códigos empleados en matemáticas para ilustrar conceptos dinámicos. Hay una tendencia a interpretar estas representaciones de manera estática. Dificultades para trabajar con la idea de cambio fueron observadas tanto en niños de 1o. y 2o. grado (Bednarz y Dufour-Janvier, 1991), como en los alumnos que empezaban el estudio del álgebra elemental (Heid y Kunkle, 1988).

No obstante, se encontró (Heid y Kunkle, 1988) que el trabajar con tablas de valores variables sobre un cierto rango de números, generadas por computadora, puede ayudar a los alumnos a percibir cómo cambian los valores de ciertas expresiones algebraicas dadas. A través del análisis de las tablas los alumnos pudieron deducir los dominios en los que las funciones crecían o decrecían, y pudieron apreciar cómo los cambios afectaban las variables relacionadas.

Sin embargo, puede ser que la notación tabular no sea de gran ayuda cuando se trabaja con funciones no lineales. Kieran (1992), por ejemplo, encontró que alumnos de 9o. grado (15 años de edad) con cierta experiencia algebraica previa, tenían dificultad para deducir el comportamiento global de funciones no lineales, así como para identificar máximos y mínimos, con base en el análisis de tablas numéricas. En contraste, el trabajar con una representación gráfica ayudaba a los estudiantes a obtener una perspectiva global. Pero en otros estudios se encontró que alumnos jóvenes (Heid, 1989) o de bajo rendimiento (Dreyfus y Einsenberg, 1981) tenían dificultad para trabajar con gráficas, pero no para trabajar con tablas. Dreyfus y Einsenberg (1981) sugieren que las nociones que subyacen a la idea de relación funcional (p.ej. dominio, imagen) deberían introducirse a través de la notación gráfica cuando se trabaja con estudiantes considerados de nivel alto, y a través de tablas cuando se trabaja con alumnos de bajo rendimiento.

Los alumnos y la variable como incógnita específica

Durante la escuela primaria y antes de cualquier acercamiento al álgebra, los niños empiezan a trabajar con problemas simples en los que se les pide determinar el valor de una incógnita específica. Usualmente el valor de la incógnita no es representado por un símbolo literal, sino por otros signos (p. ej. un cuadrito, una línea, un espacio vacío). Cuando los niños inician el estudio del álgebra estos signos son sustituidos por un símbolo literal y los niños empiezan a trabajar con variables como incógnitas específicas.

Los niños que se inician en el estudio del álgebra son capaces de razonar con incógnitas y encontrar el valor correcto cuando éstas aparecen en problemas verbales simples. Karplus (1981), por ejemplo, encontró que alumnos entre 12 y 14 años de edad podían resolver problemas de acertijos del tipo: "Pienso un número, le agrego 12, multiplico el resultado por 6 y obtengo 90. ¿Cuál es el número que pensé?" (Karplus *et al.*, 1981, p. 148). Observó que el patrón de razonamiento que los niños usaban con más frecuencia para resolver este tipo de problemas, era el de trabajar hacia atrás a partir del resultado dado. La segunda estrategia más frecuente era el "ensayo y error".

Los que se inician en el estudio del álgebra son también capaces de trabajar con la variable como incógnita específica cuando ésta aparece en ecuaciones de un paso, esto es, en ecuaciones de la forma $ax = b$, $a + x = b$ y $x + a = b$ (Kieran, 1984). Para resolver este tipo de ecuaciones, los niños usan las operaciones inversas o substituyen distintos números al símbolo literal con el objeto de encontrar el valor que equilibre ambos lados de la ecuación. Estas observaciones muestran que frente a problemas verbales simples, o a ecuaciones algebraicas de un paso, los niños que inician el estudio del álgebra son capaces de conceptualizar una incógnita específica, y de determinar su valor, deshaciendo las operaciones, o empleando el "ensayo y error".

Sin embargo, cuando una incógnita específica aparece en ecuaciones con una estructura más complicada (p.ej. $a + x = b + c$, $ax + b + cx = d$, $ax + b = cx + d$) los niños tienen serias dificultades para trabajar con ellas. Estas ecuaciones no pueden ser resueltas de un solo paso. Para resolverlas es necesario realizar primero ciertas operaciones numéricas, operar con la incógnita o ambas cosas. Esto implica la capacidad de percibir la ecuación de manera global a fin de reordenar los términos, antes de intentar calcular el valor de la incógnita específica (Herscovics y Linchevski, 1991b). Cuando se enfrentan a este tipo de ecuaciones, los novatos usan diferentes estrategias a fin de evitar operar con los números y con las incógnitas. Por ejemplo, se encontró que una de las estrategias que los niños usan para tratar de resolver ecuaciones con una aparición de la incógnita pero con más de un término numérico después del signo de igualdad, consiste en cortar la ecuación después del primer término numérico, e ignorar los otros. (p. ej. resolver la ecuación $4 + x - 2 + 5 = 11 + 3 - 5$ como si fuera la ecuación $4 + x - 2 + 5 = 11$) (Kieran, 1984).

Resolver ecuaciones del tipo $ax + b + cx = d$, implica ser capaz de operar con incógnitas específicas. Esto es, este tipo de ecuaciones no pueden resolverse usando sólo operaciones aritméticas. Operar con la incógnita específica presenta dificultades para los que se inician en el estudio del álgebra. Se han observado distintas estrategias todas tendientes a evitar la operación con la incógnita. Por ejemplo, los niños pueden tratar de resolver este tipo de ecuaciones invirtiendo las operaciones antes de agrupar los términos similares (Kieran, 1984). Esto sugiere un intento de aplicar a la resolución de estas ecuaciones un procedimiento que resulta exitoso para resolver ecuaciones de un paso. Otro acercamiento observado es el de tratar de determinar la incógnita específica por medio de sustituciones sistemáticas (Herscovics y Linchevski, 1991a).

Los niños tienen también dificultades para determinar el valor de la incógnita específica cuando esta aparece en ambos lados del signo de igualdad (Kieran, 1984; Filloy y Rojano, 1984, 1989; Herscovics y Linchevski, 1991a). Filloy y Rojano (1984, 1989), por ejemplo, encontraron que el paso de la resolución de ecuaciones de la forma $x + a = b$ a la resolución de ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$, no es inmediato ni espontáneo. Para resolver este tipo de ecuaciones, es muy frecuente que los niños que inician el estudio del álgebra usen el ensayo y error y asignen diferentes valores a las diferentes apariciones de la incógnita específica en una misma expresión ('polisemia') (Filloy y Rojano, 1984). La "polisemia", sin embargo, puede evitarse cuando se aclara a los alumnos, de manera explícita, que todas las apariciones de la incógnita específica representan el mismo valor (Herscovics y Linchevski, 1991a). Las dificultades que los alumnos encuentran con este tipo de ecuaciones llevó a Filloy y Rojano a sugerir la existencia de un corte didáctico que se manifiesta cuando la incógnita específica aparece en ambos lados de la ecuación. Para enfrentar este tipo de ecuaciones, es necesario estar familiarizado con la sintaxis algebraica. Estos investigadores consideran que si bien la sintaxis algebraica tiene sus orígenes en la aritmética, para usarla correctamente es necesario poder romper con ciertas nociones aritméticas. De allí la presencia de un corte didáctico. Dadas las dificultades que los alumnos tienen para operar con la incógnita inclusive cuando esta aparece más de una vez del mismo lado del signo de igualdad Herscovics y Linchevski (1991a) consideran el corte didáctico en términos de un posible obstáculo cognitivo de los niños para operar sobre o con la incógnita específica.

Estos resultados ponen en evidencia las dificultades que los niños tienen para operar con o sobre la incógnita específica. La enseñanza tradicional que tiende a desarrollar y fortalecer las habilidades manipulativas no parece ser adecuada para ayudar los niños a superar estas dificultades. Además, parece ser que algunos de los acercamientos a las incógnitas específicas usados en la escuela primaria pueden ser los que originan algunas de las estrategias incorrectas que usan los niños para resolver ecuaciones. Por ejemplo, es muy frecuente que se enseñe a los niños que resolver una ecuación es equivalente a invertir las operaciones. Kieran (1988) sugiere que este acercamiento puede llevar a los alumnos a concebir la variable "como el resultado de un grupo de operaciones inversas –y a (considerar) la letra sin existencia propia en la ecuación dada" (Kieran, 1988, p. 95). Esta interpretación de la incógnita específica puede ser un obstáculo para otorgar sentido a una ecuación que no puede ser resuelta invirtiendo las operaciones así como para operar con o sobre la incógnita específica. No puede esperarse que los niños superen estas dificultades espontáneamente. Como ya lo enfatizaron Filloy y Rojano (1989), ayudar a los niños a superar las dificultades que tienen para operar sobre y con la incógnita específica, es una tarea educativa.

Distintos acercamientos se han usado para ayudar los niños a superar las dificultades mencionadas. Filloy y Rojano (1989), por ejemplo, usaron modelos concretos (el modelo geométrico; el modelo de la balanza) para ayudar a los niños a operar con la incógnita específica. Los resultados que obtuvieron muestran que si bien en esos ambientes los alumnos eran capaces de resolver ecuaciones con más de una aparición de la incógnita específica, el hecho de usar modelos puede ocultar lo que se pretende enseñar. Los modelos pueden anclar los niños a un contexto concreto y a progresar dentro de este contexto, demorando la construcción de la sintaxis algebraica. Se encontró que las intervenciones de enseñanza eran cruciales para ayudar a los niños a progresar desde el modelo a la construcción de nociones algebraicas.

También se encontró (Herscovics y Linchevski, 1991b) que la instrucción individualizada, diseñada especialmente para ayudar a los niños a superar la inhabilidad para operar sobre o con la incógnita específica, puede llevar a los niños a adquirir la capacidad de agrupar términos similares en una ecuación. Sin embargo, se observó que las dificultades persisten cuando los alumnos tienen que operar con incógnitas de coeficiente unitario y, por lo tanto, no explícitamente señalado.

Chalouh y Herscovics (1988) señalan otro aspecto que puede ser crucial tomar en cuenta para ayudar a los niños a trabajar con la incógnita específica, a saber: buscar en los antecedentes de los niños una base cognitiva sobre la cual construir el conocimiento nuevo. Estos investigadores diseñaron un experimento de enseñanza cuyo objetivo era ayudar a que niños, sin experiencia previa en álgebra formal, lograran dar un significado a expresiones con una incógnita y una operación, y a expresiones con más de una incógnita y más de una operación. Los resultados que obtuvieron muestran que los niños fueron capaces de pasar del uso de un signo para representar un espacio a llenar (*place holder*), al uso de símbolos literales; al uso de un símbolo literal para representar una cantidad oculta; al uso de un símbolo literal para representar una cantidad desconocida. Pudieron también trabajar con expresiones algebraicas con varios términos. Encontraron también que el hecho de indicar explícitamente el marco de referencia y pedir a los niños que respondieran "en álgebra" fue un elemento esencial que ayudó a los niños a pasar de un contexto aritmético a uno algebraico. Estos resultados indican que para los que se inician en el estudio del álgebra puede ser crucial saber con claridad el contexto matemático en el cual se espera que trabajen. Esto sugiere que algunos de los comportamientos erróneos pueden ser consecuencia directa de no tener claro el contexto en el cual se espera que un problema sea resuelto.

Estos resultados muestran que se han hecho grandes esfuerzos con el fin de encontrar acercamientos que puedan ayudar a los niños a superar las dificultades que tienen en relación a las incógnitas específicas. Sin embargo, se requiere de más trabajo para ayudar a los alumnos a que se apropien de la idea de la variable como incógnita específica y que sean capaces de trabajar con esta caracterización de la variable para resolver problemas y resolver ecuaciones.

Comentario a modo de conclusión

Hasta aquí el énfasis ha sido sobre las dificultades que los niños tienen con las diferentes caracterizaciones de la variable cuando trabajan en álgebra. También se han señalado algunas propuestas hechas con el fin de ayudar a los niños a superar estas dificultades. Estas sugerencias provienen de los investigadores que estudian a los niños que se inician en el álgebra o que no han recibido aún instrucción formal del álgebra. Se señala, por ejemplo, la necesidad de abordar cada una de las diferentes caracterizaciones de la variable de maneras diferente a la tradicional. Se manifiesta la necesidad de diseñar ambientes en los cuales los alumnos puedan usar sus conocimientos matemáticos previos para acercarse a estos conceptos con sentido. Implícitamente estos argumentos sugieren la necesidad de desarrollar con los niños cierto trabajo preparatorio, previo a un acercamiento formal a las variables. Esto lleva a preguntarse acerca de la factibilidad de diseñar ambientes que propicien un acercamiento a diferentes caracterizaciones de las variables antes de la enseñanza formal del álgebra. Trabajar en ambientes de este tipo podría ayudar a los alumnos a desarrollar un potencial para trabajar con diferentes caracterizaciones de la variable y despertar, de esta manera, ciertos procesos evolutivos que podrían ayudar a los niños a comprender, más adelante, un tratamiento más formal de las variables.

La idea de ayudar a los alumnos a crear un potencial para trabajar con conceptos nuevos, está ligada a la idea de "zona de desarrollo próximo" de Vygotsky. En años recientes, la teoría del psicólogo soviético L.S. Vygotsky (1986-1934) ha sido un foco de interés para muchos psicólogos que estudian el desarrollo cognitivo de los niños y la formación de conceptos. En particular la noción de "zona de desarrollo próximo", desarrollada por Vygotsky, está despertando creciente interés entre los investigadores que estudian los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La noción de "zona de desarrollo próximo" surge, por un lado, de una crítica a las tendencias psicológicas que prevalecían en la primera mitad de este siglo y, por otro lado, de la búsqueda de una teoría marxista del desarrollo cognitivo. Vygotsky (1978) critica la relación que establecen las teorías más sobresalientes de su época entre desarrollo y aprendizaje. Enfatiza que ciertas teorías como, por ejemplo, la desarrollada por Piaget, consideran que el desarrollo es un prerrequisito para el aprendizaje. Señala que la teoría elaborada por James (1958), otra tendencia fuerte de su época, identifica el desarrollo con el aprendizaje. Discute el acercamiento de Koffka y la escuela Gestalt, señalando que en esta teoría se considera que el desarrollo y el aprendizaje se influencían mutuamente, abarcando, sin embargo, el desarrollo siempre un campo más amplio que el aprendizaje. Según Vygotsky el error más frecuente que cometen estas teorías es el de considerar sólo una etapa del proceso de desarrollo, a saber, la que se refiere al desarrollo actual del niño, esto es, al "nivel de desarrollo de las funciones mentales del niño establecidas en consecuencia de ciertos ciclos de desarrollo que habían sido ya completados" (Vygotsky, 1978, p. 85).

Sin negar la existencia de cierta relación entre el desarrollo cognitivo del niño y su capacidad de aprender ciertos temas, Vygotsky afirma que para poder establecer una relación entre el desarrollo y las habilidades para el aprendizaje, hay que considerar dos niveles de desarrollo: el desarrollo actual y el desarrollo potencial. El desarrollo actual está determinado por la capacidad del niño de resolver problemas por sí mismo. El desarrollo potencial está determinado por su capacidad de resolver problemas en colaboración con un compañero más capaz o bajo la guía de un adulto. Vygotsky define la "zona de desarrollo próximo" como "la distancia entre el nivel de desarrollo actual determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con compañeros más capaces" (Vygotsky, 1978, p. 86) y considera que "un aspecto esencial del aprendizaje es que éste crea la zona de desarrollo próximo, esto es, el aprendizaje despierta una variedad de procesos de desarrollo que son capaces de operar sólo cuando el niño interactúa con otras personas de su ambiente y en colaboración con sus compañeros" (Vygotsky, 1978, p. 90).

En este planteamiento se refleja la teoría de Vygotsky de los orígenes sociales de las funciones mentales superiores, tales como, por ejemplo, el pensamiento, la atención voluntaria, la memoria lógica, la formación de conceptos. Vygotsky considera que toda función aparece dos veces a lo largo del desarrollo cultural del niño. Aparece primero en el plano social, esto es, entre la personas como una categoría interpsicológica, y después, aparece en el niño como una categoría intrapsicológica (Vygotsky, 1981). Como señala Wertsch (1984) esto no significa simplmente que los procesos mentales individuales se desarrollan en un ambiente social, sino, que la organización de los procesos mentales refleja directamente la vida social en el cual estos se forman. Por lo tanto, el ambiente social en el cual el niño se acerca a conceptos nuevos, adquiere en esta teoría un rol crucial. Se considera que el dominio de un concepto nuevo es una consecuencia de la interacción con personas más competentes, y es precisamente esta interacción la que crea la "zona de desarrollo próximo". Esto es, la "zona de desarrollo próximo" no está en el niño esperando a que una persona más competente la despierte, sino que se crea, para un tema particular, en consecuencia a las negociaciones que se establecen entre el niño y el experto (McLane, 1987).

Para Vygotsky, la noción de "zona de desarrollo próximo" está directamente ligada a propósitos de instrucción. En contraste con los que consideraban que la instrucción que se puede impartir depende del nivel de desarrollo alcanzado, Vygotsky considera que "la instrucción es buena sólo cuando se adelanta al desarrollo. De este modo depierta y da vida a aquellas funciones que están en proceso de maduración, y que están en la zona de desarrollo próximo" (citado en Rogoff y Wertsch, 1984, p. 3). En esos momentos los niños pueden trabajar con funciones nuevas sólo con ayuda del adulto o de compañeros más capaces. Esto permite que los alumnos sean capaces de trabajar exitosamente con tópicos que antes estaban considerados fuera de su competencia.

Este acercamiento contrasta con la práctica educativa usual, que está organizada considerando el nivel de competencia que los alumnos pueden alcanzar sin ayuda. Al aplicar las ideas de Vygotsky a la enseñanza escolarizada, el papel del maestro cambia de ser un transmisor de un cuerpo de conocimientos, a ser un experto que, interactuando con los alumnos, les ayuda a desarrollar un potencial para resolver problemas nuevos y para construir conceptos nuevos. También la cooperación entre compañeros adquiere un rol sobresaliente, en contraste con el trabajo individual y competitivo. La organización del entorno social en el que se desarrollan las actividades de enseñanza igualmente se torna crucial.

El vehículo fundamental de la educación y de la creación de la "zona de desarrollo próximo" es, según Vygotsky, la interacción social. Por lo tanto, el habla y la evolución de su uso tienen un rol fundamental en la formación de las funciones mentales superiores. Vygotsky considera que la función primaria del habla, inclusive para los niños muy pequeños, es la comunicación social. El habla comunicativa de los niños evoluciona al habla egocéntrica, esto es, al habla para uno mismo, que aparece "cuando el niño transfiere formas sociales, colaborativas de comportamiento a la esfera de las funciones psíquicas interpersonales" (Vygotsky, 1989, p. 35). El habla egocéntrica es entonces usada por el niño para autodirigirse durante una actividad que desarrolla sin la ayuda de un experto. De esta manera, el habla cambia de tener una función interpersonal, a tener también una función intrapersonal (Vygotsky, 1978) y es usada como un herramienta para la resolución de problemas. En la teoría de Vygotsky, el habla egocéntrica lleva al habla interna, esto es, al pensamiento verbal individualizado. Esto es, el habla egocéntrica es considerada como el paso de transición entre el intercambio social caracterizado por la comunicación y las funciones mentales internas (Kozulin, 1989).

Si bien las ideas de Vygotsky y sus implicaciones para la educación han sido analizadas y discutidas por muchos psicólogos (e.g. Griffin y Cole, 1984; Campione, Brown, Ferrara y Bryant, 1984; McLane, 1987; Palacios, 1987), estas no han influenciado substancialmente la práctica pedagógica, en particular, la enseñanza de las matemáticas. Es aún muy común considerar que el aprendizaje es un asunto individual y no un problema social, si bien, ya empieza a haber resultados interesantes de estudios que analizan, por ejemplo, cómo influye en el aprendizaje la colaboración entre compañeros en el salón de clase y cual es el papel de las intervenciones del maestro (ver Hoyles y Sutherland, 1989). Sin embargo, este tipo de investigaciones están en sus inicios. Sería interesante, por ejemplo, usar las ideas de Vygotsky para diseñar ambientes de clase especiales que ayuden a crear en los alumnos el potencial para trabajar con diferentes conceptos matemáticos e investigar el impacto de un acercamiento de este tipo sobre el aprendizaje de estos conceptos.

Bibligrafía

Ávila A., García F. y Rojano T. (1990), "Algebraic Syntax Errors: A Study with Secondary School Children", *Proceedings of the Fourteenth PME Conference*, México, pp. 11-18.

Bednarz N. y Dufour-Janvier B. (1991), "A study of external representations of change developed by young children". *Proceedings of the Thirteenth PME-NA Conference*, Blacksburg, Virginia, pp. 140-146.

Booth L. (1984). 'Algebra: Children's Strategies and Errors', *NFER-NELSON*, Windsor.

Campione J.C., Brown A. L, Ferrara R. A. y Bryant N. R. (1984), "The Zone of Proximal Development: Implications for Individual Differences and Learning", en Rogoff B. y Wertsch J. V., (eds.), *Children's Learning in the "Zone of Proximal Development"*, Jossey-Bass Inc., Publishers, pp. 77-91.

Chalouh L. y Herscovics N. (1988), "Teaching Algebraic Expressions in a Meaningful Way", en Coxford A.F. y Shulte A.P. (eds.), *The Ideas of Algebra K-12*, pp. 33-42.

Dreyfus T., y Eisenberg T. (1981), "Function concepts: intuitive baseline", *Proceedings of the Fifth PME Conference*, Grenoble, Francia, pp. 183-188.

Filloy E. y Rojano T. (1989), "Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra", en *For the Learning of Mathematics* 9, 2, pp. 19-25.

Filloy E. y Rojano T. (1984), "From an arithmetical to an algebraic thought", *Proceedings of the Sixth PME-NA Conference*, Wisconsin, pp. 51-56.

Griffin P. y Cole M. (1984), "Current Activity for the Future: The Zo-Ped", en Rogoff B., y Wertsch J.V. (eds.) Children's Learning in the "Zone of Proximal Development", *New Directions for Child Development*, Number 23, March 1984, Jossey-Bass Inc., Publishers, pp.45-64.

Hamley H.R. (1934), Relational and Functional Thinking in Mathematics, *The National Council of Teachers of Mathematics*, The Ninth Yearbook, p. 14.

Heid M.K., y Kunkle D. (1988), Computer-generated Tables: Tools for Concept Development in Elementary Algebra, en Coxford A.F. y Shulte A. P. (eds.), *The Ideas of Algebra K-12*, pp. 170-177.

Herscovics N., y Linchevski L. (1991a), "Pre-algebraic Thinking: Range of Equations and Informal Solution Processes Used by Seventh Graders Prior to any Instruction", *Proceedings of the Fifteenth PME Conference*, Assisi, Italia, pp. 173-180.

Herscovics N., y Linchevski L. (1991b), "Crossing the didactic cut in algebra: grouping like terms in an equation", *Proceedings of the Thirteenth PME-NA Conference*, Blacksburg, Virginia, pp. 196-202.

Hoyles C. y Sutherland R. (1989), *LOGO Mathematics in the Classroom*, Routledge, Londres y Nueva York.

James W. (1958), "Talks to Teachers", New York: Norton, pp. 36-37, in Vygotsky L. (1978), *Mind in Society*, Harvard University Press, pp. 80-81.

Karplus R., Pulos S. y Stage E.K. (1981), "Early Adolescents' Reasoning with Unknowns", *Proceedings of the Fifth PME Conference*, Grenoble, Francia, pp. 147-152.

Kieran C. (1984), "Cognitive Mechanisms Underlying the Equation-solving Errors of Algebra Novices", *Proceedings of the Eighth PME Conference*, pp. 70-77.

Kieran C. (1988), "Two Different Approaches among Algebra Learners", en Coxford A.F. y Shulte A.P. (eds.), *The Ideas of Algebra K-12*, pp. 90-96.

Kieran C. (1992), "Multiple Solutions to Problems: The Role of Non-Linear Functions and Graphical Representations as Catalysts in Changing Students' Beliefs", Seminario presentado en CINVESTAV, México.

Kozulin A. (1989), "Vygotsky in Context", in Vygotsky L. (1986), *Thought and Language*, MIT Press, pp. xi-lvi.

Krutetskii V. A. (1976), *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, The University of Chicago Press, Chicago y Londres.

Kuchemann D. (1980), "The Understanding of Generalised Arithmetic (Algebra) by Secondary School Children", PhD. Thesis, Universidad de Londres.

Markovits Z., Eylon B.S. y Bruckheimer M. (1986), "Functions Today and Yesterday", en *For the Learning of Mathematics* 6, 2, pp. 18-28.

Mason J., Graham A., Pimm D., y Gowar N. (1985), *Routes to Roots* *of Algebra*, The Open University Press, Gran Bretaña.

Matz M. (1982), "Towards a Process Model for High School Algebra Errors", en Sleeman,D. y Brown, J. S. (eds.) *Intelligent Tutoring Systems*, Londres, Academic Press.

Menger K. (1956), "What are *x* and *y*?, en *The Mathematical Gazette*, Vol.40, pp.246-255.

McLane J. B. (1987), "Interaction, Context and the Zone of Proximal Development", en Hickmann M. (ed.), *Social and Functional Approaches to Language and Thought*, Academic Press, pp. 267-285.

Noss R. (1986), "Constructing a Conceptual Framework for Elementary Algebra through LOGO Programming", en *Educational Studies in Mathematics*, No. 17, pp. 335-357.

Palacios J. (1987), "Reflexiones en torno a las implicaciones educativas de la obra de Vigotski", en Siguán M. (Coord.) *Actualidad de Lev S. Vigotski*, Anthropos-Editorial del Hombre, pp. 176-188.

Rogoff B. y Wertsch J. V., (1984), *Children's Learning in the "Zone of Proximal Development"*, Jossey-Bass Inc., Publishers, pp. 1-6.

Sfard A. (1989), "Transition from Operational to Structural Conception: The Notion of Function Revisited", *Proceedings of the Thirteenth PME Conference*, París, pp. 151-158.

Sutherland R. (1987), "A Longitudinal Study of the Development of Pupils' Algebraic Thinking in a Logo Environment", PhD. Thesis, University of London Institute of Education.

Tall D. y Thomas M. (1991), *Encouraging Versatile Thinking in Algebra Using the Computer*, Mathematics Education Research Center, University of Warwick, Coventry, U.K.

Thomas M. y Tall D. (1986), "The Value of the Computer in Learning Algebra Concepts", *Proceedings of the Tenth PME Conference*, London, pp. 313-318.

Thorndike E. L., Cobb M.V., Orleans J.S., Symonds P.M., Wald E. y Woodyard E. (1923), *The Psychology of Algebra*, The Macmillan Company, New York. Institute of Educational Research Teachers College, Columbia University.

Usiskin Z. (1988), "Conceptions of School Algebra and Uses of Variables", en Coxford A. F. y Shulte A. P. (eds.), *The Ideas of Algebra K-12*, pp. 8-19.

Van Engen H. (1953), "The Formation of Concepts, The Learning of Mathematics", en Febr H.F. (ed.) *The Learning of Mathematics: It's Theory and Practice*, (Twenty-first Yearbook), Washinton,D.C., National Council of Teachers of Mathematics, p. 69-98.

Vygotsky L. S. (1978), Mind in Society, *The Development of Higher Psychological Processes*, Harvard University Press.

Vygotsky L. S. (1981), "The Genesis of Higher Mental Functions", en Wertsch J. V. (ed.), *The Concept of Activity in Soviet Psychology*, M. E. Sharpe, Inc., Armonk, Nueva York, pp. 144-188.

Vygotsky L. S. (1989), *Thought and Language*, Kozulin A. (Ed.), The MIT Press.

Wagner S. (1981), "An Analytical Framework for Mathematical Variables", *Proceedings of the Fifth PME Conference*, Grenoble, France, pp. 165-170.

Wagner S. (1983), "What Are These Things Called Variables?", *Mathematics Teacher*, October 1983, pp. 474-479.

Wertsch J. V. (1984), "The Zone of Proximal Development: Some Conceptual Issues, en Rogoff B. y Wertsch J. V., (eds.), *Children's Learning in the "Zone of Proximal Development"*, Jossey-Bass Inc., Publishers, pp. 7-18.