El Papel de la Resolución de Problemasen la Enseñanza de las Matemáticas

Resumen

En este trabajo se utiliza implícitamente la teoría de los momentos didácticos para describir, interpretar e incluso empezar a valorar comparativamente algunas formas ideales de entender la resolución de problemas y su función en la enseñanza de las matemáticas. Se pone en evidencia que cada una de estas formas ideales o "paradigmas" se sustenta necesariamente en un modelo tanto del saber matemático como del propio sistema de enseñanza. Aparece el análisis y la contrastación empírica de dichos modelos, así como uno de los objetivos fundamentales de la didáctica de las matemáticas, considerada como disciplina científico-experimental.

La convicción de que la **resolución de problemas** ha de jugar un papel fundamental en la enseñanza de las matemáticas, es ampliamente compartida en la comunidad matemática. Esta convicción, sin embargo, no responde a una idea tan clara ni descansa en una tesis de significado tan unívoco, como podría parecer a primera vista.

Es fácil constatar que bajo el mismo principio –cuya formulación concreta puede cambiar circunstancialmente– se propugnan, diseñan y realizan actividades docentes muy distintas e, incluso, contradictorias entre sí: no es lo mismo, por ejemplo, utilizar los problemas para motivar la introducción de los conceptos, que emplearlos como estrategia didáctica a

Josèp Gascón

Universitat Autònoma de Barcelona

Department de Matemàtiques

fin de que el alumno llegue a dominar determinados métodos de resolución, aunque en los dos casos se hable de enseñanza "basada en la resolución de problemas". Esta ambigüedad –que es compartida por la inmensa mayoría de ideas comunes relativas a la enseñanza de las matemáticas– no debería extrañarnos demasiado si tenemos en cuenta que la función que se asigna a la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas depende, por una parte, del modelo epistemológico implícito que sostiene la noción de "problema de matemáticas" y, por otra, de lo que en cada caso se crea que significa "enseñar" y "aprender matemáticas".

En lo que sigue me propongo describir e interpretar las principales formas de entender la resolución de problemas y su función en la enseñanza de las matemáticas. Dado que cada una de estas formas está fuertemente condicionada, como hemos dicho, por ciertos modelos epistemológicos implícitos (normalmente poco conscientes y menos estructurados), puede ser interesante sacar a la luz algunos aspectos de dichos modelos.

Me gustaría subrayar que las diversas formas de entender y utilizar la resolución de problemas que trataremos aquí, no corresponden necesariamente a formas que hayan existido o existan actualmente en estado puro; se trata sólo de formas ideales –que llamaré "paradigmas" haciendo un uso poco convencional de este término– que aparecen frecuentemente entremezcladas en la práctica docente real. No pretendo, por tanto, hacer ningún tipo de descripción empírica del papel que ha jugado la resolución de problemas en la historia reciente de la enseñanza de las matemáticas; mi propósito está más cerca de lo que Lakatos llama "reconstrucción racional" de esta historia [cf. Lakatos (1971)].

1. El paradigma "teoricista"

Agruparé bajo esta denominación las tendencias que, poniendo el acento en los conocimientos acabados y cristalizados en "teorías", **consideran la resolución de problemas como un aspecto secundario** dentro del proceso didáctico global. En este paradigma la actividad matemática se pone entre paréntesis, y sólo se toma en consideración el fruto final de esta actividad; en particular se ignoran las tareas dirigidas a elaborar estrategias de resolución de problemas y, por tanto, **los problemas tienden a ser trivializados y descompuestos en ejercicios rutinarios**. Esto significa que un problema como, por ejemplo:

> Demostrar que al unir los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero, se obtiene siempre un paralelogramo.

puede llegar a descomponerse en una cadena de simples ejercicios tales como:

i) Sobre el cuadrilátero *ABCD*, dibujar el cuadrilátero *QRSP*, donde *Q* es el punto medio del lado *AB*, *R* es el punto medio de *BC*, *S* de *CD* y *P* de *DA*.

ii) Dibujar las diagonales *BD* y *AC* del primer cuadrilátero.

iii) Aplicar el teorema de Tales para comprobar que $PQ \parallel BD$ y $RS \parallel BD$. Deducir que $PQ \parallel RS$.

iv) Demostrar, análogamente, que $QR \parallel PS$.

lo que comporta no sólo la eliminación de la dificultad principal del problema sino, incluso, la desaparición del propio problema (cf. Gascón (1989), p. 3 y ss.).

Una característica importante de este punto de vista radica en el supuesto implícito de que **los problemas son algo ajeno a las teorías matemáticas** o, en todo caso, no juegan ningún papel importante en su constitución. Los problemas pueden utilizarse entonces para aplicar, ejemplificar o consolidar los conceptos teóricos e, incluso, para motivarlos, introducirlos o justificarlos pero, en cualquier caso, estas funciones de los problemas son consideradas como "meramente pedagógicas" en el sentido negativo de "no constitutivas del conocimiento matemático" propiamente dicho. Se trata de concesiones hechas con la única finalidad de que el alumno adquiera un cuerpo de conocimientos que forman una teoría determinada de antemano; el proceso de constitución de esta teoría no sólo no se cuestiona, sino que puede ignorarse por completo.

Lo anterior comporta, en particular, que tanto los problemas (o "ejercicios") que se utilizan como los procedimientos de resolución que el alumno ha de emplear, están absolutamente determinados *a priori* por la teoría a la que sirven. La característica esencial del paradigma teoricista la situaremos, por tanto, en que **ignora absolutamente los procesos de la actividad matemática** como tal y, en consecuencia, **no concede ninguna importancia –epistemológica ni didáctica– a la génesis y el desarrollo de los conocimientos matemáticos.** Esto explica la preeminencia que se da al momento del primer encuentro de los alumnos con los objetos matemáticos que les presenta el profesor, y la consiguiente concentración casi exclusiva de los esfuerzos de ciertos sistemas de enseñanza de las matemáticas en este momento del proceso didáctico –que llamaremos **"momento del primer encuentro"** y que tradicionalmente se ha identificado con el **"momento teórico"**–. La razón es sencilla: para el teoricismo que identifica "aprender matemáticas" con "aprender teorías acabadas", el proceso didáctico empieza, –y prácticamente acaba– en el instante en que el profesor "enseña" (en el sentido de "muestra") estas teorías a los alumnos.

2. El paradigma "tecnicista"

Una de las consecuencias más negativas del paradigma teoricista es el desprecio o, como mínimo, la poca importancia que otorga al dominio de las técnicas matemáticas. En efecto, dado que el teoricismo identifica "técnica matemática" con "técnica predeterminada por la teoría", no puede imaginar la posibilidad de que una técnica se desarrolle en manos del alumno y, por tanto, sólo toma en consideración aquellas técnicas que se pueden aplicar de la forma rutinaria que establecen las teorías preestablecidas; así menosprecia el dominio más o menos robusto de las técnicas matemáticas, ignorando las posibles funciones de este dominio en el proceso de aprendizaje.

Este punto de vista puede provocar una catástrofe didáctica que es muy visible cuando afecta a los niveles más básicos de la enseñanza de las matemáticas. En la enseñanza primaria, en efecto, el menosprecio del dominio de las técnicas puede provocar un "vacío" del contenido de la enseñanza hasta el punto de que al final del proceso didáctico los alumnos no puedan mostrar ningún aprendizaje efectivo, ni siquiera el dominio de las operaciones aritméticas básicas. En este punto parece natural el grito defensivo de **!volver a lo básico!** para no perderlo todo. Surge así un paradigma que **enfatiza los aspectos más rudimentarios del momento de la técnica y concentra en ellos los mayores esfuerzos.** La postura defensiva del tecnicismo no es, sin embargo, la más adecuada para situar las técnicas matemáticas en el lugar que les corresponde –dentro del proceso didáctico– con base en su función en el proceso de aprendizaje. La defensa que hace el tecnicismo del dominio de las técnicas es ingenua y didácticamente poco fundamentada; de hecho puede caerse en una **apología del dominio de las técnicas** –especialmente de las algorítmicas que son las más visibles– **como objetivo último del proceso didáctico**, lo que conduce a un "operacionismo" estéril. Paradójicamente el **paradigma tecnicista comparte con el teoricista la trivialización de los problemas;** en efecto, el énfasis tan exclusivo en las técnicas "simples" que lleva a considerarlas como principio y final de la actividad matemática, hace olvidar los "auténticos" problemas, que son aquellos cuya dificultad principal consiste en escoger las técnicas adecuadas para construir una "estrategia de resolución". El tecnicismo parte de ciertas técnicas (normalmente algorítmicas) y plantea solamente aquellos ejercicios que sirven para llegar a dominarlas; de esta forma excluye las estrategias de resolución complejas y no algorótmicas de su repertorio de técnicas. La trivialización de los problemas no proviene aquí de una descomposición abusiva sino, simplemente, de una fijación tan fuerte en las técnicas elementales que impide tomar en consideración problemas matemáticos no rutinarios.

Los paradigmas teoricista y tecnicista comparten además una concepción psicologista ingenua del proceso didáctico, que tiene en el conductismo su referencia más clara, y que considera al alumno como una caja vacía que debe llenarse a lo largo de un proceso gradual que parte de los conceptos lógicamente más simples hasta llegar, paso a paso, a los sistemas conceptuales más complejos, o bien como un autómata que mejora el dominio de las técnicas mediante la simple repetición. Por todas estas razones llamaré **"clásicos"** a ambos paradigmas, en contraposición al **paradigma "modernista"** que se describe a continuación.

Añadiré que uno de los defectos más graves de estos paradigmas clásicos es el de considerar los problemas como si fuesen **aislados y descontextualizados**. Esto significa, por una parte, que los problemas se tratan individualmente y nunca como representantes de ciertas clases de problemas (excepto el caso trivial de las clases algorótmicas del paradigma tecnicista) y, por otra, que se tiende a presentar los problemas separados de su contexto, sin ninguna conexión con el sistema (matemático o extramatemático) a partir del cual surgen de manera natural en el seno de una actividad matemática (excepto la contextualización trivial que se da en el paradigma teoricista cuando se utiliza un ejercicio para introducir o para aplicar un concepto). El aislamiento y la descontextualización de los problemas serán analizados con más detalle en las secciones 5 y 6, respectivamente.

3. El paradigma modernista

Las formas extremas de los paradigmas clásicos presentan incoherencias y limitaciones evidentes en su forma de considerar la resolución de problemas dentro del proceso didáctico. Por ejemplo, el engaño que consiste en "motivar" y "justificar" la introducción de nuevos conceptos mediante problemas que están destinados a desaparecer de la escena, la trivialización de los problemas y la consiguiente algoritmización de los conocimientos evaluables, junto al fracaso absoluto de los alumnos ante la dificultad de escoger el teorema adecuado o la técnica pertinente para resolver un problema, llegan a provocar una situación insostenible.

Esta circunstancia puede llevar a la necesidad de rescatar la actividad de resolución de problemas en sí misma, escandalosamente ignorada en los paradigmas clásicos, y a tomarla como eje y finalidad de todo el proceso didáctico. Esto es lo que hace el paradigma modernista que, por tanto, **tiende a identificar la actividad matemática con la exploración de problemas no triviales;** es decir, con las tareas que se realizan cuando todavía no se sabe gran cosa de la solución; luego se tantean algunas técnicas (o métodos) para comprobar adonde nos pueden llevar, se intenta aplicar éste o aquel resultado, se buscan problemas semejantes, etc. En otras palabras, el **paradigma modernista** (del que hemos tenido, y todavía tenemos, múltiples muestras) se caracteriza por **conceder una preeminencia absoluta al momento exploratorio. Ello quiere decir que identifica "enseñar" y "aprender matemáticas", con enseñar y aprender esta actividad exploratoria.**

El adjetivo "no trivial" aplicado a los problemas, pretende rescatar el sentido original de la noción de "problema" trivializada por los paradigmas clásicos contra los cuales el paradigma modernista es una reacción. Una definición muy precisa de lo que se entiende dentro de este paradigma por "exploración de problemas no triviales", se puede encontrar, por ejemplo, en Arsac (1988)[1] cuando define "problema abierto" y describe la "práctica del problema abierto". Se trata de problemas en cuyos enunciados no se sugiere el procedimiento de resolución (prohíbe explícitamente descomponer el problema en ejercicios) y que se encuentran en un dominio conceptual con el que los alumnos tienen cierta familiaridad. Así pueden tomar fácilmente "posesión" de la situación y empezar a hacer ensayos, conjeturas, proyectos de resolución y contraejemplos, que constituyen tareas típicas de la actividad exploratoria de resolución de problemas. Algunos de los problemas abiertos que propone son:

> Determinar el conjunto de todos los números naturales que pueden escribirse como suma de, por lo menos, dos naturales consecutivos.
>
> Se da una recta r y dos puntos A y B situados en el mismo semiplano respecto a r. ¿Existe un punto P de r tal que la trayectoria APB sea mínima?
>
> Buscar dos números naturales diferentes a y b tales que $1/a + 1/b = 1$
> Obtener tres naturales a, b y c, tales que $1/a + 1/b + 1/c = 1$
> Idem cuatro, a, b, c y d tales que $1/a + 1/b + 1/c + 1/d = 1$

La dispersión de los contenidos de estos problemas no es casual, es un indicio de que se evita explícitamente proponerlos demasiado ligados a una teoría determinada o a un conjunto concreto de técnicas. **Es esencial que la exploración sea realmente "libre" (también de las teorías y de las técnicas matemáticas) para que sea más "creativa".**

Con riesgo de simplificar abusivamente podría decirse que, aunque el paradigma modernista pretende superar al conductismo clásico, coloca en su lugar una especie de "activismo" que no deja de constituir otra modalidad de psicologismo ingenuo fundamentada, en este caso, en una interpretación muy superficial de la psicología genética. Por lo que respecta al aislamiento y la descontextualización de los problemas, que ya era preocupante en los paradigmas clásicos, podemos decir que no hace más que agravarse en el paradigma modernista.

En resumen, tanto los paradigmas clásicos como el modernista constituyen perspectivas **reduccionistas extremas** como consecuencia de **enfatizar uno de los momentos de la actividad matemática ignorando los**

[1] Esto no significa, en absoluto, que situemos al autor o autores de los trabajos que citemos en cada caso dentro de un paradigma determinado. Ya hemos dejado bien claro que pretendemos analizar e interpretar tendencias pero, en ningún caso, autores.

restantes. Por esta razón, todos ellos desconocen cualquier relación funcional entre dichos momentos y, por tanto, no pueden integrarlos en un único proceso en el que se interrelacionen y se den sentido mutuamente.

Consideraré a continuación otros paradigmas que son menos reduccionistas porque, implícitamente, relacionan –aunque sea parcialmente– dos momentos distintos de la actividad matemática. Se trata de tendencias que, además, dan gran importancia a la gestión del grupo-clase dentro de su forma de entender y utilizar la actividad de resolución de problemas.

4. El paradigma constructivista

Incluiré aquí todas aquellas tendencias que **utilizan la resolución de problemas con el objetivo de que los alumnos puedan "construir" nuevos conocimientos.**

Se trata de un paradigma muy complejo en el que se sitúan muchas maneras de entender la resolución de problemas. Este paradigma se fundamenta en una teoría del aprendizaje no muy explícita, pero que puede resumirse en un pequeño conjunto de hipótesis tomadas de la psicología genética y la psicología social (cf., por ejemplo, Arsac (1988), pp. 94-95); que le proporcionan una base mucho más sólida que la de los paradigmas clásicos.

Para simplificar, tomaremos la caracterización que hace Douady (1986) bajo la denominación de "situación problema" (ver la nota 1).

i) El alumno ha de poder introducirse en la resolución del problema y ha de poder considerar lo que es una solución posible.

ii) Los conocimientos del alumno han de ser, en pricipio, insuficientes para resolver el problema.

iii) La "situación problema" ha de permitir al alumno decidir si una solución determinada es correcta o no.

iv) El conocimiento que se desea que el alumno adquiera ("construya") ha de ser la herramienta más adecuada para resolver el problema al nivel de conocimientos del alumno.

v) El problema se ha de poder formular en diferentes "cuadros" (por ejemplo, cuadro físico, geométrico, algebraico) entre los que han de poderse establecer correspondencias.

Un ejemplo de situación problema[2] –mediante la cual se pretende que el alumno se construya una "imagen mental" de la mediatriz como recta que divide el plano en dos semiplanos– es el siguiente:

> Una curva *XY* es la trayectoria de una nave espacial que puede comunicar con las estaciones de radio situadas en los puntos *A* y *B*. La nave sólo recibe la señal de la estación más próxima.
>
> ¿Sobre qué parte de la trayectoria se comunicará con *A*? ¿Y con *B*? Se lanza una segunda nave espacial cuya trayectoria se puede trazar de manera arbitraria. Contestar a las mismas preguntas anteriores. Volver a empezar con una tercera nave espacial. Si ahora tenemos tres estaciones a la vez *A*, *B* y *C* (y la nave sólo se comunica con la más próxima), determinar la porción de la trayectoria sobre la cual se comunicará con *A*, con *B* y con *C*.

El avance fundamental de este paradigma consiste en que **relaciona funcionalmente el momento exploratorio con el momento teórico, dando gran importancia al papel de la actividad de resolución de problemas en la génesis de los conceptos.** Continúa ignorando, sin embargo, la función del trabajo de la técnica en la resolución de problemas en particular y en el aprendizaje de las matemáticas en general. Los problemas (o las "situaciones-problema") se eligen en función del concepto o sistema conceptual que se quiere que el alumno "construya". En este sentido el paradigma constructivista está más cerca del teoricista que del tecnicista, aunque se apoya no sólo en una base psicológica más sólida, como ya hemos dicho, sino también en un modelo epistemológico –de la génesis del conocimiento matemático– mucho más elaborado.

En comparación con el paradigma modernista, el constructivista no presenta los problemas tan descontextualizados –ya que el sistema conceptual representa un contexto matemático del problema y, a menudo, se hace referencia a otros contextos matemáticos o extramatemáticos– pero los sigue considerando igualmente aislados.

5. El paradigma procedimental

Ninguno de los paradigmas analizados hasta aquí se plantea los difíciles problemas de cómo guiar al alumno en la elección de la técnica adecuada, cómo crear las condiciones que le permitan construir una estrategia de resolución de un problema mediante una combinación adecuada de técnicas, o cómo hacer posible el desarrollo interno de una técnica en manos de los

[2] Tomado del libro de 6ème: EVARISTE ed. DELAGRAVE, citado por Arsac y otros (1988) p. 106. Esta situación-problema se propone a los alumnos antes de estudiar la simetría octagonal, pero después de manipular objetos geométricos, trazar rectas perpendiculares, rectas paralelas,etc.

alumnos. Llamaré **paradigma "procedimental"** a aquel que empieza a abordar esta problemática, **situando como principal objetivo del proceso didáctico,** no tanto la adquisición o construcción de sistemas conceptuales, sino **el dominio de sistemas estructurados de procedimientos.** En este sentido, el paradigma procedimental puede ser interpretado como otra reacción al teoricista y, en parte, al constructivista.

Desde el paradigma procedimental no se pretende analizar el papel del momento teórico (que se pone entre paréntesis) en el aprendizaje de las matemáticas ni, en particular, su relación con la actividad de resolución de problemas. Se parte de un alumno hipotético que, se supone, ha adquirido los conocimientos necesarios y domina las técnicas básicas para abordar los problemas de una cierta clase. En estas condiciones iniciales el **paradigma procedimental se centra en el problema epistemológico-didáctico de posibilitar el diseño, la utilización y el dominio de métodos de resolución de problemas** elaborados a partir de las técnicas básicas citadas.

Estamos, por tanto, ante un paradigma que **conecta funcionalmente el momento exploratorio con algunos aspectos del momento de la técnica.** Sus limitaciones más importantes provienen del olvido del momento teórico y se ponen de manifiesto en que únicamente trata con clases prefijadas de problemas; **no puede tomar en consideración el desarrollo de las técnicas en manos del alumno y la correspondiente ampliación de las clases de problemas exploradas.**

Dentro de este paradigma, la resolución de problemas se utiliza como una estrategia didáctica encaminada a que el alumno llegue a dominar sistemas estructurados de procedimientos (o técnicas) matemáticos que pueden cristalizar, o no, en un método de resolución. Este punto de vista comporta necesariamente trabajar con "clases de problemas" (noción dual, aunque relativamente secundaria, respecto de la de "método de resolución") y pone de relieve una cuestión central: ¿cómo determinar la amplitud más adecuada en cada caso de la clase de problemas que se tomará como base para enseñar un método de resolución?

> Si se quieren enseñar, por ejemplo, métodos de resolución de "problemas de contar", ¿qué clase de problemas es la más adecuada?, ¿la de los problemas de "variaciones"?, ¿la de problemas de contar "simples" (que la incluye) o, incluso, la de todos los problemas de contar "descomponibles"? ¿Cómo se relacionan entre sí los correspondientes métodos de resolución? (cf. Gascón (1989), pp. 59-65; ver nota 1).

El paradigma procedimental también se puede interpretar como una **completación del paradigma tecnicista** que sólo toma en consideración clases algorítmicas de problemas, excesivamente pequeñas, y como una

reacción al paradigma modernista que parece no querer poner ningún límite al universo de problemas potencialmente utilizables, en una exploración descontrolada que –en la práctica– equivale a considerar cada problema absolutamente aislado de los otros. En este sentido podemos decir que con el paradigma procedimental se **rompe definitivamente el aislamiento tradicional de los problemas.** Tanto el aislamiento clásico que encerraba los problemas en clases algorítmicas independientes, como el aislamiento modernista (y, en parte, constructivista) que evita considerar clases de problemas (con sus técnicas matemáticas asociadas) para asegurar que la exploración sea "libre" y "creativa".

6. El paradigma de la modelización

Por lo que respecta a la descontextualización de los problemas escolares (de la actividad matemática de la que surgen), podríamos trazar una línea de contextualización creciente que empieza en el paradigma teoricista, pasa por el constructivista y desemboca en el paradigma de la modelización. La separación entre los problemas de matemáticas y el sistema (matemático o extramatemático) a partir del cual los problemas se generan de una manera natural –a lo largo de una determinada actividad matemática– decrece hasta el punto de llegar a identificarse –en el paradigma de la modelización– el conocimiento del sistema modelizado con el objetivo de la resolución de los problemas resultantes del modelo.

En definitiva, llamaré **paradigma de la "modelización"** a aquel para el cual **los problemas sólo adquieren pleno sentido en el contexto de un sistema y, según el cual, la resolución de un problema pasa siempre por la construcción explícita de un modelo del sistema subyacente.** En este paradigma el objetivo de la actividad matemática –y por tanto, en gran parte, de la enseñanza de las matemáticas– es la obtención de conocimientos relativos a los sistemas modelizados que, en principio, pueden ser tanto extramatemáticos como matemáticos. Sin embargo, hay que reconocer que entre las múltiples muestras de este paradigma que nos ha brindado la historia reciente de la enseñanza de las matemáticas, predominan los que se centran, casi exclusivamente, en la modelización de sistemas extramatemáticos.

La actividad de resolución de problemas se engloba, por tanto, en una actividad más amplia que podemos llamar actividad de "modelización matemática" y que esquematizaré en cuatro estadios, sin entrar en detalles ni querer prejuzgar una sucesión temporal lineal entre ellos.

(1) El punto de partida o primer estadio de esta actividad lo constituye una situación problemática en la que pueden formularse preguntas y conjeturas, normalmente con poca precisión, y en la que se pueden llegar a detectar y formular provisionalmente algunos problemas matemáticos.

> Por ejemplo, podemos considerar la situación problemática determinada por una esfera metálica parcialmente hundida en mercurio y sobre la que se derrama otro líquido (por ejemplo, agua) hasta que la esfera esté completamente recubierta. Se pueden formular preguntas –que involucran conjeturas– tales como: al derramar el agua, ¿la esfera se hundirá más, quedará igual o, por contra, disminuirá el volumen sumergido en el mercurio? (cf. Polya (1962-65), pp. 41-44; ver nota 1).

(2) El segundo estadio engloba la definición o delimitación del sistema subyacente a la situación problemática y la elaboración del modelo matemático correspondiente. El disponer del lenguaje y de las técnicas propias del modelo matemático, permite reformular los problemas enunciados provisionalmente en el estadio anterior.

> La *delimitación del sistema* se hace eligiendo las variables que consideraremos "relevantes". En nuestro ejemplo tomaremos como *variables del sistema*, las masas específicas respectivas del fluido superior a, fluido inferior b y sólido en inmersión c, además del volumen total del sólido v, y las partes de este volumen que se encuentran por encima, x, y por debajo, y, del nivel de separación de los dos fluidos. El modelo del sistema así delimitado viene dado por el par de ecuaciones: $y = v - x$; $ax + by = cv$
> Este modelo permite la siguiente *reformulación del problema*: "Calcular la fracción del volumen de la esfera que se encuentra por encima del nivel de separación de los dos fluidos antes y después de derramar el agua".

(3) El tercer estadio incluye, además del trabajo técnico dentro del modelo, la interpretación de este trabajo y de sus resultados dentro del sistema modelizado.

> Los resultados que se obtienen, suponiendo $a = b$ son:
>
> $x = [(b - c)/(b - a)]\ v$ $\qquad\qquad$ $y = [(c - a)/(b - a)]\ v$
>
> En el caso particular del aire ($a = 0.00$), el hierro ($c = 7.84$) y el mercurio ($b = 13.60$), resulta que $x = 0.423\ v$, y al cambiar el aire por el agua ($a = 1.00$), entonces se tiene $x = 0.457\,v$, lo que se interpreta diciendo que al añadir agua, disminuye la parte de la esfera sumergida en el mercurio.

(4) En este último estadio de la actividad de modelización matemática se pueden enunciar problemas nuevos, cuya resolución permitirá responder a cuestiones –relativas al sistema– cuya formulación era, cuanto menos, poco probable antes de la elaboración del modelo matemático.

> Algunas de dichas cuestiones, en nuestro ejemplo, podrían ser: ¿cuáles son las condiciones generales que han de satisfacer las densidades a, b y c para que el sistema tenga sentido?, ¿en qué casos la esfera

estará hundida más de la mitad de su volumen en el fluido inferior?, ¿cómo evolucionaría el sistema suponiendo que la densidad *a* del fluido superior creciese continuamente hasta llegar a la densidad *c* de la esfera?, ¿y si fuese la densidad *c* de la esfera la que creciese hasta llegar a ser igual o la densidad *b* del fluido inferior?, entre otras muchas.

El paradigma de la modelización engloba, en cierta forma, al constructivista, ya que, como éste, utiliza la actividad de resolución de problemas para que el alumno "construya" conocimientos nuevos. Pero el paradigma de la modelización profundiza en el significado de "construir conocimientos nuevos" al referirlos a sistemas concretos y operativizar esta construcción mediante la elaboración de un modelo matemático. Además, esta forma de entender la resolución de problemas lleva hasta sus últimas consecuencias la contextualización que era sólo incipiente en el paradigma constructivista.

Añadiré, para acabar, que el **paradigma de la modelización, cuando toma en consideración la modelización de sistemas matemáticos** (y no sólo extramatemáticos), también **conecta funcionalmente el momento exploratorio con el momento teórico.** Sus limitaciones más importantes tienen relación de nuevo con **el olvido del momento de la técnica y del papel del desarrollo de las técnicas matemáticas en la actividad de resolución de problemas.** Así, los problemas vuelven a quedar aislados en vez de constituirse en clases de problemas relativas a los correspondientes métodos de resolución.

7. Hacia el paradigma de los "momentos didácticos"

A lo largo de la descripción presentada de algunas formas ideales de entender la resolución de problemas y su papel en la enseñanza de las matemáticas, he dado –como no podía ser de otra manera– una interpretación, e incluso un primer intento de valoración comparativa de los diversos paradigmas. En esta tarea me he ayudado de un conjunto de nociones básicas de cierto modelo epistemológico-didáctico que he dejado implícito y que he utilizado como una especie de **sistema de referencia conceptual.** No es posible describir aquí en detalle este modelo, llamado de **los momentos didácticos,** y cuya elaboración fue iniciada por Yves Chevallard.[3] Enunciaré sólo aquellas aportaciones del modelo que contribuyen directamente a conformar un nuevo modo de interpretar la resolución de problemas, y su papel en el proceso de enseñanza de las matemáticas.

[3] En el marco del Seminari de Didàctica de les Matemàtiques, del Department de Matemàtiques de la U.A.B. El desarrollo de este modelo constituye un gran programa de investigación en didáctica de las matemáticas en el que continuamos trabajando. Para más detalles respecto al estado actual del desarrollo de este modelo, véase: Chavallard (1991) y (1992), Gascón (1191), Bosch y Gascón (1991) y Gascón y Bosch (1192a) y (1992b).

En primer lugar se considera que todo problema de matemáticas es el punto de partida de un (virtual) campo de problemas. Los problemas se agrupan en función de las técnicas matemáticas que se pueden utilizar para estudiarlos. No son los problemas concretos, aislados, los que tienen sentido o interés matemático.

> Por ejemplo, resolver la ecuación $x^2 - 6x = 18$ sólo tiene sentido si se toma el problema en cuestión como *representante* de cierto campo de problemas (virtual) considerado como objeto de estudio. Unos cuantos representantes del campo de problemas no lo determinan absolutamente. En nuestro caso se podrían considerar el campo de problemas de las ecuaciones de segundo grado, el de las ecuaciones diofánticas cuadráticas, y otros muchos no determinados *a priori*.

En segundo lugar, se postula que este proceso de estudio de campos de problemas se lleva a cabo mediante la utilización y, sobre todo, la **producción de técnicas de estudio.** Esto presupone un **desarrollo interno de las técnicas** en manos del alumno que provoca nuevas necesidades teóricas, es decir, la necesidad de referirse a modelos matemáticos amplios en los que se interpreten y justifiquen las nuevas técnicas. Surge así una relación funcional entre dos momentos de la actividad matemática que es especialmente interesante porque va en la dirección más inesperada: del momento de la técnica al momento teórico.

Lo anterior pone de manifiesto que un campo de problemas no es nunca (salvo los casos triviales) un conjunto completamente definido; se va constituyendo a medida que se desarrollan las técnicas de estudio. Si a lo largo de este proceso cristalizan métodos de resolución (algorítmicos o no), entonces pueden estudiarse clases de problemas definidas con más precisión dentro del campo.

> Así, por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2 - 6x = 18$ podemos utilizar la técnica de completar cuadrados, una técnica gráfica o la técnica que consiste en aplicar una fórmula, entre otras. Cada una de estas técnicas acepta diferentes direcciones de desarrollo que pueden desembocar en técnicas para encontrar el número máximo de soluciones de ecuaciones polinómicas de grado superior, en técnicas para resolver ciertos tipos de inecuaciones o en técnicas para aproximar los ceros de una función, entre otras. En cada caso aparecen nuevas clases de problemas, que pueden ser inesperadas, dentro del campo virtual inicial.

La actividad de resolución de clases de problemas se enmarca, por tanto, en la actividad, más general, del **estudio de campos de problemas.** Así, **el nuevo paradigma contiene en cierta forma al paradigma procedimental** y lleva hasta sus últimas consecuencias el análisis de las funciones del momento de la técnica dentro del proceso didáctico. De hecho, el énfasis que pone en la **necesidad de crear dispositivos didácticos nuevos –como el "taller de prácticas matemáticas"– para poder integrar el trabajo de la técnica en los actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas,** ha constituido una de las primeras aportaciones importantes de este paradigma.

En tercer lugar, por fin, se considera que **toda actividad matemática puede ser interpretada como un proceso de estudio de campos de problemas** en el sentido explicado anteriormente. En particular, la actividad de producción de **teorías**[4] se puede analizar como un proceso de estudio de ciertos campos de problemas "teóricos" que, de nuevo, requiere técnicas de estudio específicas y, consiguientemente, teorías que den razón de estas técnicas. La actividad matemática se muestra así como esencialmente **recursiva,** y en la que no es posible hacer una distinción absoluta entre **práctica matemática** y **teoría matemática**; sólo puede hacerse una distinción relativa y hablar de la **teoría asociada a una cierta práctica matemática.**

En resumen, **el paradigma de los momentos didácticos pone de manifiesto una interrelación dialéctica entre el desarrollo de las técnicas matemáticas, la evolución de los campos de problemas y la construcción recursiva de las teorías matemáticas asociadas.** En particular, el hecho de que este paradigma considere las teorías matemáticas como modelos (matemáticos) del sistema subyacente a ciertos campos de problemas, permite afirmar que, potencialmente, **también engloba al paradigma de la modelización.** Desde esta perspectiva, enseñar matemáticas consistirá en hacer que el alumno sea capaz de estudiar ciertos campos de problemas de manera autónoma. Esto es, **posibilitar que el alumno llegue a dominar e incluso a producir –a su nivel– técnicas de estudio de ciertos campos de problemas.** Esto no significa que se propugne una concentración de los esfuerzos del sistema de enseñanza de las matemáticas en un aspecto parcial de la actividad matemática. Al contrario, el "estudio de campos de problemas" en el sentido que hemos explicado, contiene estrictamente e integra todas las actividades matemáticas que han destacado unilateralmente los diversos paradigmas y que están presentes hoy día en el aula. Aún más, el modelo de los momentos didácticos permite analizar las funciones de los diferentes momentos y su interrelación recíproca; en particular ha puesto de relieve las disfunciones originadas por la ausencia del momento de la técnica en los actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas. Estos análisis plantean problemas de ingeniería didáctica relativos a la construcción de nuevos dispositivos didácticos, como el "taller de prácticas matemáticas", que ya he citado anteriormente.

En definitiva, se vuelve a poner de manifiesto que cualquier cambio en la enseñanza de las matemáticas ha de estar fundamentado en una investigación didáctica a la vez "teórica" y "experimental", y que todo trabajo

---

[4] En el sentido de modelos matemáticos amplios en los que se interpretan y se interrelacionan diversos campos de problemas y las correspondientes técnicas de estudio.

de teorización o de ingeniería en didáctica de las matemáticas, presupone necesariamente un modelo tanto del saber matemático como del propio sistema de enseñanza. La explicitación de estos modelos permite su cuestionamiento y su reelaboración y debería constituir un punto de referencia en toda investigación en didáctica de las matemáticas.[5]

Bibliografía

Arsac, G., y otros (1988): *Problème ouvert et situation-problème*, IREM de Lyon.

Bosch, M., y Gascón, J. (1991): "Prácticas en matemáticas: el trabajo de la técnica", comunicación presentada al Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática, Valencia.

Chevallard, Y. (1991): Un problema de ingeniería didáctica de los sistemas de formación: "Las prácticas en matemáticas –Curso impartido en el Seminari de Didáctica de les Matemàtiques, Departament de Matemàtiques de la UAB. (Pendiente de publicación.)

Chavallard, Y. (1992): "Hacia una teoría de los momentos didácticos", –Curso de doctorado de Didáctica de las Matemàtiques impartido en la Universidad de Granada. (Pendiente de publicación).

Douady, R. (1986): "Raport enseignement-apprentissage: dialectique outil-objet, Jeux de cadre", *Cahier de didactique des mathèmatiques*, n. 3, IREM PARIS VII.

Gascón, J. (1989): "El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas". Tesis doctoral, UAB.

Gascón, J. (1991): "Anàlisi de les funcions de les pràctiques en els actuals sistemes d'estudi: el cas de la llicenciatura de matemàtiques, Curso impartido en el Seminari de Didóctica de les Matemàtiques, del Departament de Matemàtiques de la UAB. (Pendiente de publicación).

Gascón, J. y Bosch, M. (1992a): "Una nova activitat docent: les pràctiques a la llicenciatura de matemàtiques", –Comunicación presentada en las Jornades sobre Innovació en la docència universitària, ICE de la UAB.

Gascón, J. y Bosch, M. (1992b): "La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas", artículo aceptado para su publicación en *Enseñanza de las Ciencias*.

Lakatos, I. (1971): Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales, *Tecnos*, Madrid (1974).

Polya, G. (1962-65): *La découverte des mathématiques* (2 vols.), Dunod, París, 1967.

[5] Quiero dar las gracias a Marianna Bosch y Josep María Lamarca, porque han leído críticamente las versiones provisionales de este trabajo y han sugerido cambios para mejorarlo.