

La serie de Gregory-Leibniz y el Desarrollo en Serie de Potencias de la Función $\text{ang tan } x$

1. Introducción: Un resultado que no deja de llamar la atención por su belleza es la llamada serie de Gregory-Leibniz:

$$(1.1) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$$

que comúnmente se obtiene al sustituir el valor $x = 1$, en el desarrollo de Taylor de la función $y = \text{ang tan } x$:

$$(1.2) \quad \text{ang tan } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Es interesante que este desarrollo se conociese antes del Cálculo (es decir, antes de la introducción del concepto de derivada y de su relación con la determinación de áreas), siendo uno de los antecedentes que muestra cuáles fueron las ideas, argumentos y modos de pensar que finalmente condujeron a su creación. El objeto de estas páginas es presentar en forma sucinta y con la terminología de hoy —pero con las ideas de la época— una reconstrucción de la obtención original de esta fórmula.

Creemos que el presente trabajo permitirá al profesor ampliar su visión acerca de los orígenes del Cálculo y enriquecer su acervo de ejemplos.

2. Resultados previos: Los dos elementos principales que entran en juego en nuestra historia son el desarrollo en serie de potencias de algunas funciones simples y el cálculo de algunas áreas, en particular del área bajo la curva $y = x^n$.

Juan José Rivaud M.

CINVESTAV
México

El desarrollo:

$$(2.1) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (|x| < 1)$$

es la base de casi todos los otros desarrollos en series de potencias que usaremos y una manera simple de darnos cuenta de su validez es efectuar la división indicada:

$$\begin{array}{r} 1-x \overline{) 1} \\ \underline{-1+x} \\ x \\ \underline{-x+x^2} \\ x^2+x^3 \\ \dots \\ x^n \\ \underline{-x^n+x^{n+1}} \\ x^{n+1} \\ \phantom{x^{n+1}} \dots \end{array}$$

Procedimiento que también muestra que:

$$(2.2) \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (x \neq 1)$$

Este tipo de argumentos que manejan formalmente series infinitas de potencias, es anterior a I. Newton, pero él lo siguió usando sistemáticamente. Como ejemplo, véanse las páginas 36 a 43 de *The mathematical papers of Isaac Newton*, Vol. III, 1670-1673, D. T. Whiteside (ed.) Cambridge, 1969.

El evaluar el área bajo la gráfica de $y = x^2$, es decir, bajo una parábola se conocía desde el siglo III a.C. y se debe a Arquímedes*.

En el siglo XVII, para parábolas cúbicas y cuárticas, Bonaventura Cavalieri, con su idea de los indivisibles, lo ataca y resuelve geoméricamente**.

Para el caso de un exponente natural arbitrario son muchos los matemáticos que alrededor de la mitad de siglo proporcionan argumentos aceptables de

que $\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$ (k natural). Para nosotros $\int_0^a f(x) dx$ denota el área bajo la gráfica de $y = f(x)$, entre 0 y a ($f(x) \geq 0$).

* Estrictamente, Arquímedes calcula el área de un segmento de parábola, que en nuestros términos es equivalente al área bajo ésta. El lector interesado puede consultar "Quadrature of the parabola", *The Works of Archimedes*, T. L. Heath (ed.), Cambridge, 1912. (Hay una edición facsimilar de Dover.)

** Véase "Cavalieri-Integration", *A Source Book in Mathematics 1200-1800*, D. J. Struik (ed.), Harvard, 1969, pp. 214-218.

La mayoría de estos argumentos dependen del hecho siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

y siguen la línea de pensamiento usual de dividir el intervalo $[0, a]$ en n partes iguales (Fig. 1).

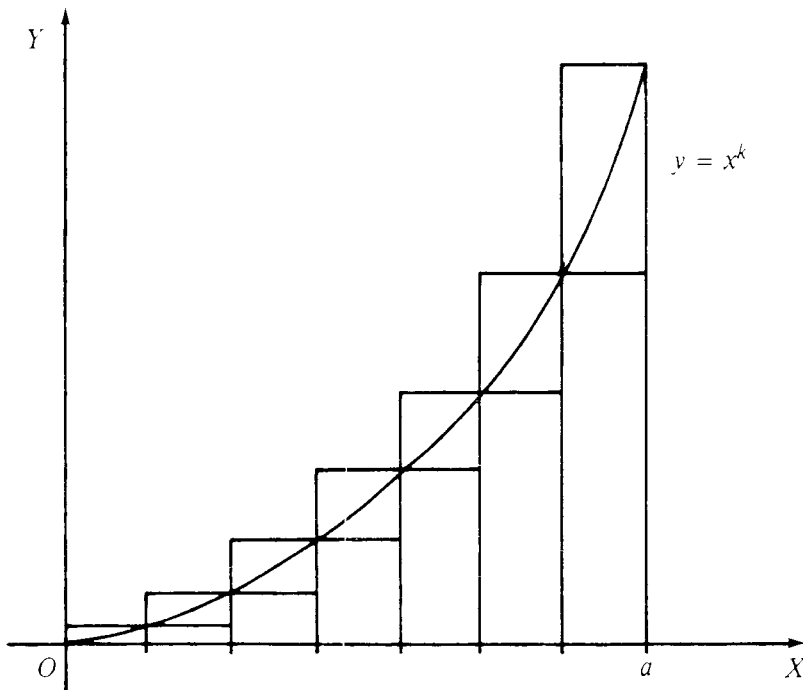


Figura 1

Con objeto de mostrar la gran variedad de enfoques del problema manejados en esa época, presentaremos aquí otra idea, que también funciona para números racionales $\frac{p}{q} > -1$. Tal idea fue desarrollada por Fermat*, y consiste en partir el intervalo $[0, a]$ en una infinidad de subintervalos seleccionados *ad hoc* para efectuar los cálculos pertinentes. Con más precisión, si deseamos calcular el área bajo la gráfica de la función $y = x^s$ (con $s > -1$) entre 0 y a , tomemos $0 < r < 1$, y consideremos como extremos de la partición los puntos $a, ar, ar^2, \dots, ar^n, \dots$ situados en el eje de las abscisas. Claramente:

$$(2.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} ar^n = 0$$

Asimismo, la longitud del segmento con extremos ar^n y ar^{n-1} es:

* Véase "Fermat-Integration", *A Source Book in Mathematics 1200-1800*, D. J. Struik (ed.), Harvard, 1969, pp. 219-222.

$$(2.4) \quad L(ar^{n-1}, ar^n) = ar^n - ar^{n+1} = a(1-r)r^n$$

que cumple:

$$(2.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L(ar^{n+1}, ar^n) = 0$$

Nótese además que la sucesión $\{L(ar^{n+1}, ar^n)\}$ es estrictamente monótona. De aquí que la norma de la partición sea $a(1-r)$.

Podemos aproximar el área que deseamos calcular con la serie de las áreas de los rectángulos que tienen como base los segmentos $[ar^{n+1}, ar^n]$, y como alturas los valores de la función $y = x^s$, en el extremo superior de cada intervalo, es decir $(ar^n)^s$. La Figura 2 muestra cómo.

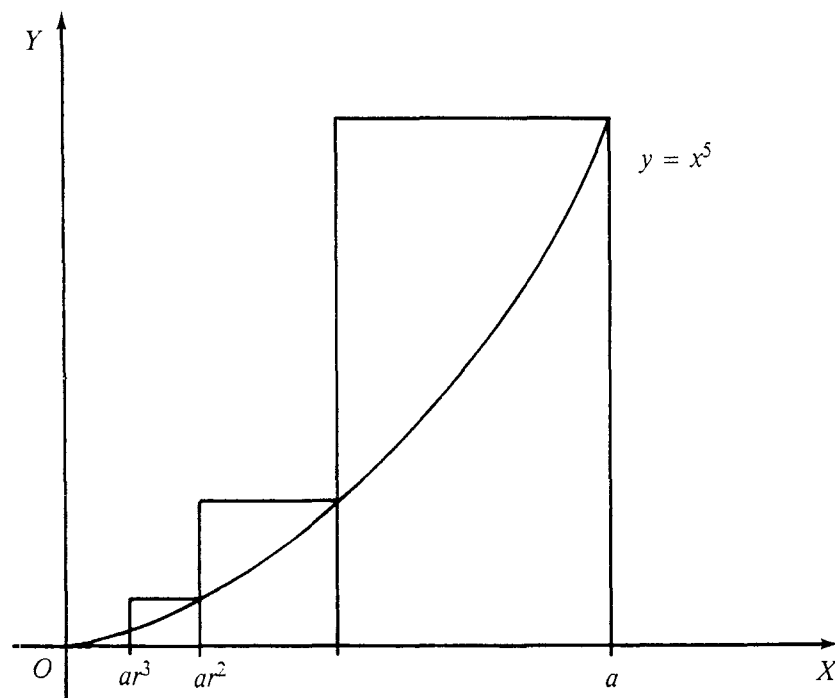


Figura 2

Dicha suma de áreas la denotaremos por $S(r)$ y viene dada por:

$$(2.6) \quad S(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a(1-r)r^n r^s r^{sn} = a^{s+1}(1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^{(s+1)n}$$

La serie que aparece en el segundo término es una progresión geométrica infinita de razón $\varrho = r^{s+1}$, donde $0 < \varrho < 1$, pues $0 < r < 1$ y $s + 1 > 0$.

Por (2.1), tenemos que

$$(2.7) \quad S(r) = a^{s+1} \frac{1-r}{1-r^{s+1}}$$

Cuando s es un número natural, aplicando (2.2),

$$(2.8) \quad S(r) = a^{s+1} \frac{1-r}{1-r^{s+1}} = a^{s+1} \frac{1}{\frac{1-r^{s+1}}{1-r}}$$

$$= a^{s+1} \frac{1}{1+r+r^2+\dots+r^s}$$

La norma de la partición es $a(1-r)$, que tiende a cero cuando r tiende a uno; por lo tanto,

$$(2.9) \quad \int_0^a x^s dx = \lim_{r \rightarrow 1} S(r) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{a^{s+1}}{1+r+\dots+r^s} = \frac{a^{s+1}}{s+1}$$

obteniendo así el resultado para este caso.

Cuando $s = \frac{p}{q} > -1$, la sustitución $r = \varrho^q$ hace que (2.7) tome la forma:

$$(2.10) \quad S(\varrho^q) = a^{\frac{p+q}{q}} \frac{1-\varrho^q}{1-\varrho^{p+q}} = a^{\frac{p+q}{q}} \frac{\frac{1-\varrho^q}{1-\varrho}}{\frac{1-\varrho^{p+q}}{1-\varrho}}$$

$$= a^{\frac{p+q}{q}} \frac{1+\varrho+\dots+\varrho^{q-1}}{1+\varrho+\dots+\varrho^{p+q-1}}$$

y como cuando r tiende a uno, también ϱ tiende a la unidad, tenemos que:

$$(2.11) \quad \int_0^a x^{\frac{p}{q}} dx = \lim_{\varrho \rightarrow 1} S(\varrho^q) = \lim_{\varrho \rightarrow 1} a^{\frac{p+q}{q}} \frac{1+\varrho+\dots+\varrho^{q-1}}{1+\varrho+\dots+\varrho^{p+q-1}} = \frac{a^{\frac{p+q}{q}}}{\frac{p+q}{q}}$$

Como se quería demostrar.

Es conveniente que el lector note que las aproximaciones tomadas son por arriba si $\frac{p}{q} > 0$, y por abajo si $-1 < \frac{p}{q} < 0$. Si se toman como alturas de los rectángulos a $(ar^{n-1})^s$, en lugar de $(ar^n)^s$, la situación se invierte.

Es interesante saber que estos cálculos se llevaron a cabo prácticamente al mismo tiempo que aparecieron los exponentes fraccionarios.

En lo que sigue sólo usaremos el resultado para el caso en que el exponente es un número natural.

3. Demostración del resultado principal (fórmula 1.2):

Consideremos la función $y = \frac{1}{1+z^2}$; sustituyendo $x = -z^2$ en (2.1.),

$$(3.1) \quad y = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots + (-1)^n z^{2n} + \dots$$

Al calcular el área bajo su gráfica entre 0 y x , y después intercambiar las sumas con el cálculo de las área indicadas por los sumandos, resulta:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dz}{1+z^2} &= \int_0^x (1 - z^2 + z^4 - \dots + (-1)^n z^{2n} + \dots) dz = \\ &= \int_0^x dz - \int_0^x z^2 dz + \int_0^x z^4 dz - \dots + (-1)^n \int_0^x z^{2n} dz \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \end{aligned}$$

En resumen:

$$(3.2) \quad \int_0^x \frac{dz}{1+z^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

El lado derecho es la serie de potencias en cuestión (serie 1.2). Lo que resta por hacer es mostrar que el área bajo la curva $y = \frac{1}{1+z^2}$ entre 0 y x es precisamente $\text{ang tan } x$. Para ello veamos la Figura 3.

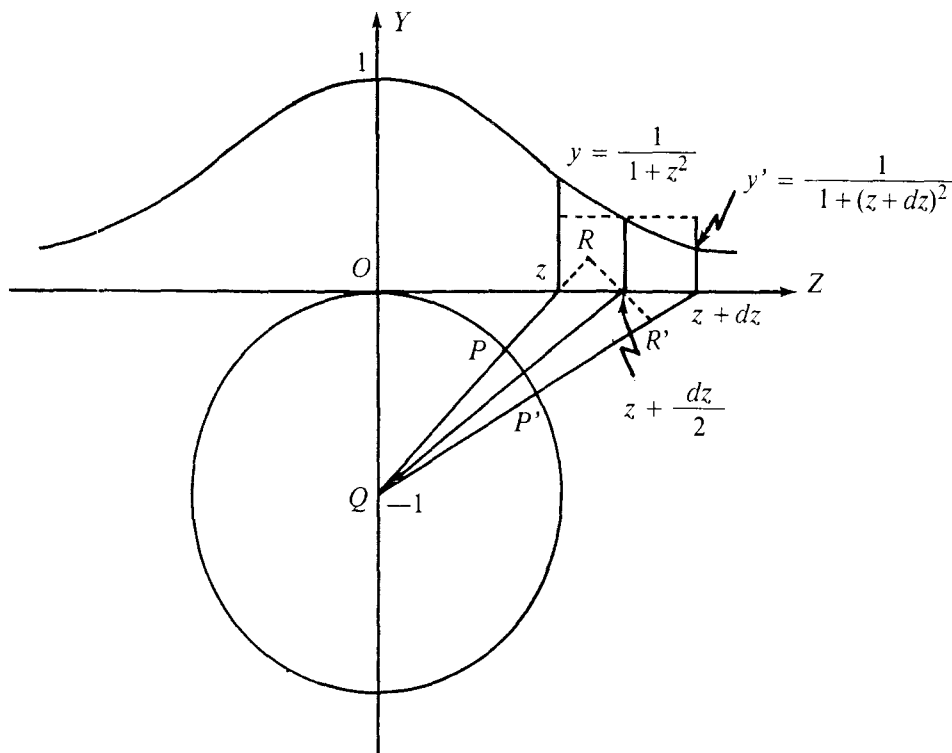


Figura 3

Primero que nada notemos que

$$\text{ang } OQP = \text{ang } \tan z$$

y que como la circunferencia dada tiene radio uno, entonces

$$2(\text{Área sector } OQP) = \text{Longitud arco } OP$$

Probaremos que

$$2(\text{Área sector } OQP) = \int_0^x \frac{dz}{1+z^2}$$

Para ello se considera que ambas áreas están dadas por las “sumas” de los diferenciales asociados en una y otra figura, y son iguales. Así pues, de la Figura 3,

se ve que el diferencial de área correspondiente a $\int_0^x \frac{dz}{1+z^2}$ es:

$$A(z, z + dz) = \frac{dz}{1 + (z + \frac{dz}{2})^2}$$

y el correspondiente al sector OQP es:

$$\text{Área } \triangle PQP' = \frac{\text{Área } \triangle RQR'}{1 + (z + \frac{dz}{2})^2} = \frac{\text{Área } \triangle [(z)Q(z + dz)]}{1 + (z + \frac{dz}{2})^2} = \frac{\frac{dz}{2}}{1 + (z + \frac{dz}{2})^2}$$

Luego:

$$2 \text{Área } \triangle PQP' = A(z, z + dz)$$

que como ya habíamos dicho, implica el resultado.

Se desea destacar que tal demostración no es la del “Cálculo de nuestros días”, en donde para ello se usa la fórmula para la derivada de $\text{ang } \tan x$ y el teorema fundamental del Cálculo.

Es conveniente resaltar que el argumento presentado es una reconstrucción que tiene sentido llevar a cabo, pues Gregory no publicó su deducción de tal serie. C. Boyer, en *A History of Mathematics* (Wiley, 2a. ed., pág. 386) indica que “Él (Gregory) pudo haber aprendido en Italia que el área bajo la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$, de $x = 0$ a $x = x$, es $\text{ang } \tan x$. . .” pero tampoco da referencias de cómo los italianos lo justificaban. Nuestra reconstrucción está dentro del espíritu geométrico-algebraico de la escuela italiana de la época en donde se comparan las áreas de dos figuras dadas.

Asimismo, el lector interesado en el rigor no tendrá ninguna dificultad en formalizar las pruebas dadas, aunque no nos parece que sea lo relevante; la impor-

tancia la tenemos en conocer la riqueza y variedad de ideas que hizo posibles el advenimiento del Cálculo.

4. Aproximaciones a π : Como es bien sabido, Arquímedes demuestra que

$$(4.1) \quad 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Su método parte de un hexágono inscrito en la circunferencia y otro circunscrito, para luego duplicar sucesivamente el número de lados hasta llegar a $96 = 6 \times 2^4$; calcular los semiperímetros de estos polígonos, y haciendo las estimaciones pertinentes, llegar a ese resultado. Para ello tiene que calcular 5 raíces cuadradas con el grado de aproximación requerido.

En términos de expresiones decimales, la relación (4.1) da lugar a

$$(4.2) \quad 3.1408\dots < \pi < 3.1428\dots$$

O sea, que proporciona las dos primeras cifras decimales de π .

Siguiendo las mismas ideas de Arquímedes, y con mucho más cálculos, otros autores mejoraron las aproximaciones y obtuvieron dos o tres cifras decimales más.

La serie de Gregory-Leibniz (1.1) ofrece otro planteamiento al cálculo de π . Éste tiene la ventaja de no requerir el evaluar raíces cuadradas, pero es sumamente lento; dicho de otra manera, se requiere de la suma de muchos términos para obtener una aproximación adecuada. Por ejemplo, si deseamos calcular π con un error menor que 10^{-2} , necesitaremos sumar 200 términos, y para que el error sea menor que 10^{-3} , el número de términos es 2000.

A pesar de lo anterior la serie de Gregory-Leibniz tiene el mérito de haber abierto el camino hacia la determinación de π por medio de series. Este método se ha extendido a otras constantes importantes.
