¿Qué Significa el Aprender Matemáticas? Una Experiencia con Estudiantes de Cálculo

Resumen

Entre los objetivos fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas, se encuentra el que los estudiantes desarrollen diversas habilidades y estrategias que les permitan entender el contenido matemático, y aplicarlo en la resolución de diversos problemas. En el presente estudio se analiza el trabajo desarrollado por estudiantes que han cursado Cálculo, al resolver problemas no relacionados directamente con el contenido recientemente estudiado. Los resultados muestran que, en general, los estudiantes experimentan serias dificultades en las distintas fases del proceso de solución. Por ejemplo, en general seleccionan un camino o intento de solución sin haber entendido el enunciado del problema, carecen de estrategias que les ayuden a monitorear los procesos de solución, y no evalúan el sentido o pertinencia de la solucion del problema. Así, una recomendación importante es que los estudiante interactúen con este tipo de problemas en sus experiencias de aprendizaje, y no solamente con problemas limitados por el tema en estudio. Además, es importante que en el proceso de solución discutan varias representaciones del problema y diversas estrategias donde se evalúen tanto los métodos de solución como la plausibilidad de las respuestas. La práctica constante de estas actividades puede ayudar a los estudiantes a identificar características asociadas con la estructura del problema, donde exista relación directa con los métodos de solución y no solamente se consideren elementos superficiales (apariencia) en el plan de solución.

Manuel Santos Trigo*

CINVESTAV-IPN

México

* El autor agradece a la M. en C. Fabiola Ruiz L. por el trabajo realizado en el proceso de captura de información y en la aplicación de los instrumentos de evaluación. Parte de este trabajo fue escrito durante una estancia posdoctoral del autor en la "University of California at Berkeley". Se agradece el apoyo de CONACyT y del CINVESTAV.

Introducción

La pregunta: *¿Qué significa el que un estudiante aprenda matemáticas?* ha sido identificada como importante cuando se analiza el aprovechamiento matemático de los alumnos. Una respuesta muy conocida relaciona el aprendizaje con una simple acumulación de trozos de información (conceptos y habilidades) dispuestos en una secuencia ordenada. Es decir, aprender matemáticas significa identificar los artefactos de la disciplina, o sea, sus conceptos y sus procedimientos. Aquí a la Matemática se le ve como un cuerpo acotado y estático de conocimientos, que el estudiante tiene que dominar vía la mecanización. Sin embargo, esta concepción ha sido cuestionada y han empezado a surgir otras perspectivas acerca del aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, la idea de que el aprender matemáticas se relaciona con que el estudiante desarrolle o construya ideas de la Matemática, ubica a esta disciplina como un cuerpo dinámico de conocimientos en constante expansión. En esta perspectiva, el estudiante, al desarrollar matemáticas se involucra en las actividades propias de tal disciplina. En este proceso, el estudiante recopila información, descubre o crea relaciones, discute sus ideas, plantea conjeturas, y constantemente evalúa y contrasta sus resultados. Así, en el aprendizaje de las matemáticas es importante el proceso y el sentido que los estudiantes muestren en el desarrollo o construcción de las ideas matemáticas. Romberg (1992) ilustra la idea de desarrollar o hacer matemáticas con la música. Afirma que la música, al igual que la Matemática, posee varias ramas categorizadas en una variedad de formas (clásica, jazz, rock, instrumental, vocal); también tiene un sistema notacional para preservar información (notas, claves); y teorías que describen la estructura de las composiciones (escalas, patrones). Sin embargo, no importa cuántos artefactos de la música uno aprenda, esto no es lo mismo que hacer música. De manera similar, en matemáticas uno puede aprender los conceptos acerca de los números, resolver ecuaciones, graficar funciones, etc., pero eso no es desarrollar matemáticas. Hacer o desarrollar matemáticas incluye el resolver problemas, abstraer, inventar, probar, y encontrar el sentido a las ideas matemáticas.

El objetivo del presente estudio es explorar qué tipos de ideas y estrategias muestran los estudiantes que han cursado Cálculo Diferencial al resolver problemas "no cerrados". Es decir, problemas que requieren de un proceso y reflexión por parte del estudiante. En este proceso, es importante que el estudiante identifique una serie de distinciones asociadas a las diversas etapas del proceso de solución. La idea es identificar en las respuestas de los estudiantes alguna tendencia en cuanto a la Matemática que han aprendido. Se intenta caracterizar el trabajo de los estudiantes en función del progreso mostrado al interactuar con los problemas.

Importancia del estudio

La enseñanza de las matemáticas ha pasado por diversos movimientos en donde se han sugerido algunos cambios en el contenido y la forma de la enseñanza. Por ejemplo, la Matemática moderna, alrededor de los años 60, recomendaba mayor énfasis en la estructura y lenguaje formal de las matemáticas desde niveles elementales. Es en esta propuesta donde se incluyen nuevos contenidos en el currículo como el estudio de los conjuntos y se sugiere un énfasis en lo formal o en las demostraciones. Otro movimiento conocido como "regreso a lo básico", le daba mucha importancia al manejo de las operaciones y procedimientos fundamentales. Esto fue como una respuesta inmediata a las deficiencias que el movimiento de la Matemática moderna había dejado en los estudiantes. Sin embargo, el regreso a lo básico tampoco mejoró el aprovechamiento de los estudiantes, ya que aun cuando eran capaces de resolver problemas y hacer operaciones, muchas veces no entendían el significado o sentido de las respuestas. Había casos en que el estudiante encontraba la respuesta a problemas cuyos datos no tenían sentido o eran insuficientes para el problema. En este sentido se pudo obsevar que tanto en la Matemática moderna como en el regreso a lo básico, el estudiante desarrollaba ciertas formas de operar con las ideas matemáticas que no mostraban las características propias de esta disciplina.

La importancia de discutir qué tipo de estrategias, procesos y recursos debe desarrollar un estudiante durante el aprendizaje de las matemáticas se ilustra en uno de los estudios realizados por Schoenfeld (1988). El estudio tiene lugar en un curso de Geometría a nivel bachillerato. La idea aquí fue analizar las actividades desarrolladas durante este curso, donde el maestro era identificado como un "buen maestro", y generalmente sus alumnos mostraban buenos resultados en exámenes regionales. Los resultados de tal estudio mostraron que el maestro controlaba muy bien el comportamiento de los estudiantes, en el desarrollo de las clase, daba mucha importancia a la forma y a las secuencias de las demostraciones. Desde el punto de vista de un observador externo, Schoenfeld menciona que daba la impresión —por el orden en el salón de clases y por el control de la participación de los estudiantes—, que el desarrollo de la clase era todo un éxito. Sin embargo, desde el punto de vista matemático los estudiantes separaban las construcciones de las demostraciones, y no eran capaces de vincular sus relaciones aun en problemas recientemente trabajados.

Además, cuando Schoenfeld cambió la forma de la demostración de algunas proposiciones vistas en clase, los estudiantes no identificaron que se trataba de una demostración correcta pero escrita en otro formato. Es decir, los estudiantes podían resolver ciertos tipos de exámenes pero poco habían aprendido acerca de la naturaleza y el quehacer de la actividad matemática. De manera general, parecía que el maestro únicamente los preparaba para resolver problemas de examen. Esto indica que dominar ciertos procedimientos o resolver algunos ejercicios no necesariamente implica que los estudiantes han aprendido matemáticas. Por lo tanto, es importante como maestros plantearse: ¿Qué significa que mis estudiantes aprendan matemáticas?, y ¿qué elementos nos ayudan a saber o a determinar que los estudiantes aprenden esta disciplina? En este estudio se demuestra que la presencia de este tipo de problemas (abiertos) desempeña un papel importante en el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes.

Métodos, procedimientos y marco de análisis

Once problemas fueron diseñados teniendo en cuenta que el contenido matemático a utilizar en la solución, abarcara hasta primero de bachillerato. Un grupo de 21 estudiantes, que habían cursado recientementela la materia de Cálculo diferencial a nivel vocacional (nivel de bachillerato con énfasis en física y matemática) participó en el estudio. Tales alumnos trabajaron en los problemas alrededor de 2 horas. La lista de los mismos se da en el Apéndice A. Sin embargo, para tener una idea del tipo de problemas utilizados, se presenta un ejemplo de tal lista.

> En un concierto de Luis Miguel se vendieron 10 000 boletos. Los boletos fueron numerados del 1 al 10 000. A cada persona que tenía un boleto numerado con al menos tres dígitos repetidos, se le obsequió con un pase gratis para otro concierto. ¿Cuántas personas obtuvieron dicho pase gratis?

Una estrategia que puede ser útil para resolver este problema, es usar una lista sistemática de los boletos que poseen tres o más dígitos. En el análisis del trabajo de los estudiantes se evaluó el proceso de cómo la estrategia fue refinándose o incorporando algunos casos específicos. Por ejemplo, la consideración de tres dígitos repetidos (en tres o con cuatro dígitos) o la presencia de cuatro dígitos repetidos.

Para evaluar el trabajo mostrado por los estudiantes se elaboró un medio que cuantifica las diversas fases del proceso utilizado al resolver los problemas. Es importante mencionar que en la construcción del medio se analizaron diversos trabajos donde existe interés por cuantificar el proceso de solución (Charles, Lester & O'Daffer, 1987; Szetela, 1987; Santos, 1993). El instrumento final fue el siguiente:

Puntos	Trabajo mostrado por los estudiantes
0-1	Nada de trabajo o ideas sin relación
2-3	Identifica los datos pero sin algún procedimiento
4-5	Usa los datos, pero la estrategia no es clara
6-7	Introduce un plan apropiado, pero éste es incompleto o está deficientemente implantado
8-9	Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incompleta
10	Solución completa y correcta

Además, en el proceso de evaluación se identificaron algunos indicadores asociados a la resolución del problema, el desarrollo de la solución y con respecto a la identificación de las estrategias principales empleadas en cada solución.

Solución	Desarrollo	Estrategias usadas
Correcta	Completo	Operaciones numéricas
Incorrecta	Incompleto	Uso de álgebra
Indeterminada	No requerido	Lista no sistemática
En blanco	Sin unidades	Lista sistemática, una tabla, o un diagrama
	Sin contexto	Ensayo y error
	Sin desarrollo	Búsqueda de patrones
		Casos simples
		Indeterminadas

La información evaluada con estos instrumentos sirvió para identificar tres categorías generales relacionadas con el aprovechamiento matemático de los estudiantes

(1) En esta categoría los estudiantes no muestran ningún trabajo o solamente escriben los datos; no existe avance hacia la solución, o bien alguna estrategia es aplicada erróneamente.

(2) Existe evidencia de que hay alguna comprensión del problema, pero el uso de alguna estrategia es incompleto, o bien existe alguna falsa conceptualizacion del problema que no le permite resolverlo. La solución es incompleta, o no incorpora todas las posibilidades requeridas en el problema.

(3) Existe una apropiada y completa solución al problema. El proceso puede incluir algunos errores secundarios. Sin embargo, existe una representación correcta del problema y las estrategias implantadas son las adecuadas.

Es pertinente mencionar que en la presentación de los resultados no hubo interés en contrastar el número de las respuestas correctas e incorrectas dadas por los estudiantes. Los resultados se analizaron con base en el tipo de dificultades o estrategias que los estudiantes mostraron al intentar o resolver el problema. El objetivo esencial fue discutir la calidad del proceso de solución mostrado al interactuar con los problemas. En este sentido, se identifican la fase de presentación de los resultados, y posteriormente la etapa de discusión. En la fase de presentación se analizó el trabajo de los estudiantes en cada problema. Posteriormente, en la discusión de resultados, se intentó relacionar los desarrollos mostrados con aspectos asociados a la resolución de problemas en general.

Resultados

El trabajo de los estudiantes fue evaluado aplicando los medios descritos anteriormente. En particular, las categorías se resumen en tablas en el apéndice B al final del artículo. En la presentación de los resultados por problema, se describen las características esenciales que mostraron las respuestas de los estudiantes al trabajar cada uno de los problemas. En esta descripción se presentan algunos desarrollos típicos mostrados por los estudiantes.

Posteriormente, se discuten estos resultados de acuerdo con el marco de análisis propuesto por Schoenfeld (1992) y ajustado posteriormente por Santos (1993). Las ideas fundamentales que se discuten en el análisis incluyen el papel de los recursos; el uso de estrategias cognitivas y metacognitivas; y las ideas de los estudiantes acerca de las matemáticas y la resolución de problemas.

En la presentación de los resultados se mencionan algunas características de cada problema y las estrategias importantes usadas por los estudiantes al intentar o resolver el problema. El enunciado completo de los problemas aparece en el apéndice.

En el problema No. 1, que consideraba calcular porcentajes, la mayoría de los estudiantes (14) lo resolvieron adecuadamente. Sin embargo, es importante mencionar que varios de los estudiantes no entendieron inicialmente el problema. Por ejemplo, consideraban que Manuel, José y Pedro podían tener horas comunes trabajadas lo cual impedía encontrar el número total de horas. En este sentido, un estudiante escribió:

> Se toma el total de horas en que trabajaron en grupo, es decir, los tres juntos. Eso es 10 horas, pues después de esas 10 horas, José trabajó solo con Pedro durante dos horas y Pedro trabajó solo durante 6 horas,...

Es importante mencionar que la mayoría de los estudiantes no verificaron la respuesta obtenida. Es decir, por lo general una regla de tres los llevó a una operación que finalmente les daba las respuestas, pero no existe indicación de que los estudiantes verificaran sus soluciones.

En el problema No. 2, el cual involucraba un simple cálculo de la velocidad promedio, solamente siete estudiantes resolvieron el problema correctamente. El error común entre los otros 14 estudiantes fue el de considerar dos horas totales de recorrido. En este sentido, los estudiantes representaban la velocidad promedio en el problema como (80 + 40)/2. En este problema ningún estudiante trató de contrastar o verificar la solución. Un ejemplo típico de falta de comprensión del problema lo ilustra el trabajo del siguiente estudiante:

4 h .... 80 km/h   60
2/120
1h .... 40 km/h   00
60 km/h promedio

El problema No. 3 resultó ser difícil para los estudiantes, ya que sólo dos lo resolvieron correctamente. En este problema se nota que los estudiantes tuvieron dificultades para pensar en una lista ordenada que los ayudara a contar los dígitos y relacionarlos con el número de páginas. Por ejemplo, uno de los estudiantes escribió el siguiente desarrollo:

1 . . . . . . 9 . . . . . . 1 dígito 9

⇒ 207 dígitos

10 . . . . . . 99 . . . . . . 2 dígitos 198
100 . . . . . . 999 . . . . . . 3 dígitos 2997
777 - 207 . . . . . . 570 dígitos
2997 - 570 . . . . . . 2427 dígitos

999p . . . . . . 2997 dígitos
x . . . . . . 2427 dígitos
x = 809 páginas + 99 páginas + 9 páginas
El libro es de 917 páginas

Se observa que este estudiante, aparte de tener dificultades en la relación dígitos-páginas, no cuestiona, ni contrasta, ni verifica la solución que obtuvo.

En el problema No. 4 que pedía encontrar combinaciones de tres precios para obtener 30 casetes, los estudiantes mostraron la falta de una estrategia para ordenar los números y además la no verificación de sus resultados. Sólo 10 estudiantes enlistaron todas las combinaciones. Al resto de los estudiantes le faltó considerar combinaciones, y en algunos casos enlistaron algunos números que no cumplían las condiciones o las repetían variando el orden. Por ejemplo, un estudiante escribió lo siguiente:

6 discos de \$5
4 discos de \$5 y uno de \$10
3 discos de \$5 y uno de \$15
3 discos de 10
2 discos de \$10 y 2 de \$5
2 discos de \$10, 1 de \$15 y 1 de \$5
2 discos de \$15
1 disco de...

Aun cuando este estudiante enlista las posibilidades, se observa que no muestra un control eficiente de la información. Además, parece que no reconoce cuando ya ha agotado todas las posibilidades.

En el problema No. 5 sólo cinco estudiantes determinaron la solución correcta. Sin embargo, sólo uno dio una explicación que involucraba el tratar un caso particular y después generalizar. La respuesta incorrecta común, dada por los otros estudiantes fue la de que Tina y Luisa tomaban el mismo tiempo. Por ejemplo, un estudiante escribió: "Las dos terminan de recorrer la pista en el mismo tiempo . Puesto que siempre se mantiene una velocidad constante, ambas tienen que dejar de correr para caminar al mismo tiempo". En este problema se observó también que casi ningún estudiante recurrió al uso de alguna representación para entenderlo.

. Trece estudiantes resolvieron adecuadamente el problema No. 6. Los demás (8) pusieron atención solamente a la operación y al resultado de la división. Es decir, estos alumnos no interpretaron el resultado según las condiciones dadas en el enunciado del problema. Un ejemplo que ilustra la falta de estimación del resultado se presenta con un alumno que parece que entendió el problema. Sin embargo, escribió lo siguiente:

> [La respuesta] está equivocada porque el resultado está dado sólo para litros no para botes. El planteamiento es correcto, solo que faltó dividir por los litros que caben en un bote;... [Es decir], necesita 7.5 litros para 45 m^2, pero como en un bote hay 5 litros, entonces $7.5 \times 5 = 37.5$.
>
> Necesito 37.5 botes

En el problema No. 7, diez estudiantes resolvieron el problema correctamente. Sin embargo, en ningún momento trataron de verificar sus respuestas. Además, en el proceso de resolver el problema se olvidan de las unidades que intervienen en el problema. Los alumnos que no lo resolvieron mostraron operaciones no relacionadas o representaron la velocidad erróneamente. Por ejemplo, una alumna realizó las siguientes operaciones:

116 000 - 44 000 = 72 000 litros de combustible consumido
72 000/900 = 80 h
$v = dt$
$d = (t/v) = 80/800$
$d = 0.1$ km.

Se observa que esta alumna, al recordar la relación de la velocidad, distancia y tiempo, carece de alguna estrategia que le permita analizar la pertinencia de la expresión. Además, no le intriga que el resultado que obtuvo carezca de sentido de acuerdo con los datos del problema. El uso de la calculadora parece que no le ayudó a estimar su respuesta.

El problema No. 8 resultó ser el más difícil para los estudiantes, ya que nadie logró resolverlo completamente. Siete reportaron en blanco el problema. Los estudiantes que mostraron algún progreso enlistaron sólo casos donde los tres dígitos repetidos aparecen juntos. Además, es claro que tuvieron dificultades en considerar una lista sistemática u ordenada de casos. Un ejemplo típico del trabajo de los estudiantes se presenta a continuación:

111	1111	2111	3111...
222	1222		
333	1333		
444	1444		
555	1555		
666			
777			
888			
999			

Así recibieron el pase gratis 90 personas

Trece estudiantes resolvieron correctamente el problema No. 9. Sin embargo, la mayoría de ellos sólo da la respuesta sin mostrar las operaciones. El error más común entre los estudiantes que no lo resolvieron fue el de contar los cuadrados negros de la diagonal y no lo que se pedía en el problema. Aquí resultó evidente que los alumnos nunca regresaron a leer el problema para escribir la respuesta. Por ejemplo, un estudiante escribió:

a) 10 cuadros
b) 400 cuadros en total
20 cuadros negros
380 cuadros blancos $380 \times 5 = 1900$
$\$20 + \$1900 = \$1920$

En el problema No. 10, la mayoría de los estudiantes (11) no resolvieron el problema. Fue típico, en algunos , plantear un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas e intentar resolverlo, sin darse cuenta que no se podía. Otros intentaron resolverlo por ensayo y error, pero no lograron obtener la solución. De los 10 estudiantes que resolvieron correctamente el problema, seis lo resolvieron por medio de álgebra. Es decir resolviendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Los otros cuatro obtuvieron la solución vía ensayo y error. En general, los estudiantes que no resolvieron el problema mostraron dificultades para considerar todos los datos del problema. Por ejemplo, un alumno escribió lo siguiente:

24 aviones ...... 2, 3 o 4 motores
10 aviones ...... 2 motores = 20 motores
11 aviones ...... 4 motores = 44 motores
2 aviones ...... 3 motores = $\underline{6 \text{ motores}}$
70

Se observa que este alumno en ningún momento trató de comprobar su solución y olvidó la información relacionada con el número de aviones.

Finalmente, el problema No. 11 también resultó ser otro de los más difíciles para los estudiantes. Sólo dos lograron resolverlo correctamente utilizando una lista sistemática de casos donde aparecía el número 7. Cuatro dejaron en blanco el problema. Entre los intentos de solución más comunes de los otros 15 estudiantes, se encuentra el presentar una lista incompleta de casos o simplemente dar una respuesta sin mostrar ningún desarrollo. Un estudiante presentó el siguiente desarrollo al resolver el problema:

7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97, 107
117, 127, 137, 147, 157, 167, 177, 187, 197, 207, 217
Por lo tanto 24 veces se va a imprimir el número 7.

En este desarrollo, el estudiante no muestra elementos que le ayuden a cuestionar o determinar si su solución es completa o no. Por ejemplo, se observa que dejó sin considerar los "sietes" que aparecen entre 70 y 79.

Discusión de los Resultados

El trabajo mostrado por los estudiantes al intentar resolver los problemas, muestra que en general éstos resultaron ser difíciles. Una constante en todos los intentos de solución fue la falta de estrategias que permitieran evaluar o verificar las respuestas o el proceso de solución. Existe evidencia de que, para los estudiantes, lo que interesa es llegar a una solución y en ningún momento contrastar o relacionar el sentido de la misma con las condiciones iniciales del problema. Además, en varios problemas los estudiantes tenían dificultades en decidir si, de alguna forma, ya habían resuelto el problema completamente. Esto fue más notorio cuando el problema incluía considerar varios casos.

El uso de los recursos o conocimientos básicos necesarios para resolver los problemas muestra que los estudiantes tuvieron dificultades para identificar un conjunto de distinciones en los problemas. Por ejemplo, en el cálculo de la velocidad promedio (problema No. 2) se evidenció que los estudiantes se apresuraron a operar con las cantidades, sin dedicar tiempo a la comprensión del problema. Parece que la identificación de una relación o fórmula en los datos del problema los conduce a realizar cálculos inmediatamente.

Respecto al uso de alguna representación del problema, se observó que los estudiantes no intentaron utilizar diagramas, tablas o gráficas en sus procesos de solución. Algunos dibujos que aparecieron en algunos desarrollos de los estudiantes sólo esquematizaban el enunciado, pero no fueron utilizados para planear o resolver el problema. Por ejemplo, en el problema No 5 dibujaban una pista, la cual no se usaba en sus intentos de solución. Hubo problemas como el 3, el 4, el 8, el 10, y el 11 donde una lista ordenada, o una tabla podían haber ayudado a resolverlos, sin embargo; los procesos de solución de los estudiantes muestran que intentaron avanzar en estos problemas sin algún orden determinado. Así, unos estudiantes repetían algunos casos, no consideraban los datos del problema, o simplemente no sabían si ya habían resuelto el problema.

Otro aspecto importante, observado en el trabajo de los estudiantes, fue la falta de un monitoreo o evaluación de sus propios procesos. Esto contribuyó a que en algunos casos se utilizaran sólo parcialmente las condiciones del problema, o que no se examinara la plausibilidad de la solución. Hubo casos en que no se escribía lo que se pedía encontrar en el problema o que se reportaba una solución fuera de contexto. Sin embargo, parece que esto nunca inquietó a los estudiantes.

En general, parece que los estudiantes se inclinan por utilizar ciertos esquemas o planes de solución donde aparece la aplicación directa de algun cálculo aritmético, o alguna fórmula algebraica. Existe evidencia de que las características superficiales (porcentajes, velocidad, precio, etc.) del problema, generalmente determinan las acciones o formas de solución que emprenden los estudiantes al intentar resolverlos. En este sentido, es importante que los estudiantes trabajen ejemplos donde se ilustre la necesidad de analizar aspectos más estructurales del problema. Por ejemplo, el método de solución a la pregunta "¿Cuáles son los dígitos para las unidades, decenas, centenas del número $5^{123456789}$?" se relaciona con aspectos relacionados con la búsqueda de un patrón bajo la consideración de casos especiales (estructura profunda) y no con el cálculo de la operacion aritmética (superficial) (Santos, 1994). Ruiz (1994) analiza con detalle el trabajo de estudiantes de los tres niveles del bachillerato al resolver los mismos problemas de este estudio. En su trabajo, Ruiz encontró que no existen diferencias notables entre estudiantes de primer año de bachillerato y estudiantes de tercer año. Es decir, parece que la forma de aprender el contenido matemático no desarrolla en los estudiantes (en curso del tiempo) habilidades y estrategias que le permitan resolver en contextos más generales.

En resumen, las ideas mostradas por los estudiantes al resolver los problemas diseñados para este estudio, indican que le dedicaron poco tiempo a la fase de comprensión del problema, se les dificultó utilizar alguna representación que les ayudara a avanzar en el proceso de solución, y en ningún momento intentaron verificar o contrastar la solución obtenida. Parece que la experiencia de estos estudiantes en la resolución de problemas que se pueden resolver con alguna estrategia o método directo, influyó en la forma de solucionar estos problemas.

Conclusiones

En el inicio del trabajo se planteó la pregunta: ¿Qué significa aprender matemáticas? Después en el desarrollo del estudio se observó que en general los estudiantes que habían cursado Cálculo mostraron dificultades al tratar de resolver problemas que requerían de algún análisis de los elementos del mismo. En teoría, todos los estudiantes poseían los recursos necesarios para resolver esos problemas. Sin embargo, parece que la experiencia en la forma de usar tales recursos marca la diferencia en cuanto a qué tipo de problemas resolver. Es decir, tales estudiantes han tomado varios cursos y seguramente resuelto series de problemas en donde calculaban soluciones usando un catálogo bien ensayado de reglas o técnicas.

El National Council of Teachers of Mathematics (1989) indica que las matemáticas son una disciplina donde el individuo experimenta, observa, descubre, conjetura, formula problemas, y estudia patrones o relaciones en diversos contextos. En este sentido, se indica que el estudiante aprende matemáticas al desarrollar estas actividades en su experiencia cotidiana, tanto dentro como fuera del salón de clases. Santos (1994) menciona que un componente esencial en el aprendizaje de los estudiantes es que en sus experiencias interactúen con una variedad de problemas. Por ejemplo, problemas donde tenga que discriminar información, completar ciertos datos, e incluso diseñar o formular sus propios problemas. Schoenfeld (1992) indica que para que los estudiantes desarrollen un sentido consistente con lo que son las matemáticas, el aula debe ofrecer un medio similar al que desarrolla un matemático al trabajar en esta disciplina. En este contexto, las actividades de aprendizaje de la clase deben propiciar un ambiente en que el estudiante activamente participe en el desarrollo o construcción de las ideas matemáticas.

Bibliografía

Charles, R., Lester, F. & O'Daffer, P. (1987). *Problem solving: What, why, and how.* Palo Alto, California: Dale Seymour Publications.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Romberg, T. A. (1992). "Perspective on scholarship and research methods." In D. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 49-64). National Council of Teachers of Mathematics. New York: Macmillan.

Ruiz Ledezma, E.F. (1994). "Exploración de las estrategias heurísticas en la solución de problemas. Un estudio a nivel bachillerato." Tesis de maestría. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Santos, T. M. (1993). *La resolución de problemas: Elementos para una propuesta en el aprendizaje de las matemáticas.* Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa. México.

Santos, T. M. (1994). *La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* Cinvestav-IPN. Departamento de Matemática Educativa. México.

Schoenfeld, A. (1988). "When good teaching leads to bad results: The disasters of 'well taught' mathematical courses." *The Educational Psychologist,* 23, 145-166.

Schoenfeld, A.H. (1992). "Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics." In D. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.334-370). National Council of Teachers of Mathematics. New York: Macmillan.

Szetela, W. (1987). "The problem of evaluation in problem solving: Can we find solutions?" *The Arithmetic Teacher,* 35(3), 36-41.

APÉNDICES

A. Los Problemas

Nombre del Alumno: ____

Materia cursada: ____________________________ Fecha: ____________

ANTES DE COMENZAR A TRABAJAR EN LOS PROBLEMAS
CONTESTA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS:

1. Después de leer un problema y no entenderlo, ¿qué es lo que haces?

2. Después de que obtienes la solución de un problema, ¿qué es lo que haces?

- Trata de trabajar todos los problemas que a continuación se te presentan, aun cuando no estés muy seguro en cómo se resuelven. Es decir, siempre intenta resolverlos.

- Muestra tu trabajo con claridad. Explica tus ideas en forma ordenada. No borres lo que escribas. Siempre trata de escribir una oración que reporte la solución del problema

- Si usas tu calculadora, escribe los números, las operaciones, y los resultados.

MUESTRA TODO TU TRABAJO

1. Manuel, José y Pedro recibieron un salario por limpiar un jardín.
En una semana, Manuel trabajó 10 horas, José trabajó 12 horas, y Pedro 18 horas.

a) ¿Qué porcentaje del total de horas trabajó Manuel?
b) En esa semana el total de dinero recibido por los tres jóvenes fue de $225.00. ¿Cuánto dinero recibió Manuel?

2. El señor Alarcón manejó su coche cuatro horas a 80 km/h, y después manejó 1 hora más en tráfico pesado a una velocidad de 40 km/h.
¿Cuál fue el promedio de velocidad de su viaje?

3. Nosotros podemos escribir cualquier número entero usando los dígitos del 0 al 9. Por ejemplo:

59 tiene 2 dígitos, es decir, el 5 y el 9
708 tiene tres dígitos, es decir, el 7, 0 y el 8
4633 tiene 4 dígitos, éstos son 4, 6 y el 3, que se repite dos veces

Al enumerar las páginas de un libro, fueron usados 777 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

4. En una tienda de discos, los casetes se venden a \$5.00, \$10,00 y \$15.00. Si tú planeas gastar \$30.00 en la compra de casetes, muestra todas las combinaciones de casetes que puedes comprar.

5. Tina y Luisa corren y caminan en una pista de atletismo.
Tina corre la mitad de la pista y camina la otra mitad.
Luisa corre la mitad del tiempo y camina la otra mitad del tiempo.
Siempre que corren, Tina y Luisa van a la misma velocidad.
Cuando bajan su velocidad para caminar, caminan a la misma velocidad.
¿A quién le toma menos tiempo recorrer la pista completa?
Explica tu respuesta.

6. Un litro de pintura de asfalto alcanza para cubrir 6 m^2 de superficie.
La pintura se vende en botes de 5 litros solamente. ¿Cuántos botes se necesitan para pintar un camino de 15 m de largo y 3 metros de ancho?
Roberto trató de resolver el problema en la siguiente forma

$A = l \times a$

$15 \times 3 = 45$ área del camino

$$\begin{array}{r@{\,}l} & \;\;7.5 \\ 6 & \overline{)\,45} \\ & \;\;42 \\ & \;\;30 \end{array}$$

7.5 botes se necesitan

Contesta las siguientes preguntas:

a) La solución de Roberto, ¿muestra que ha entendido el problema y que usa adecuadamente la información del mismo? Explica por qué sí o por qué no

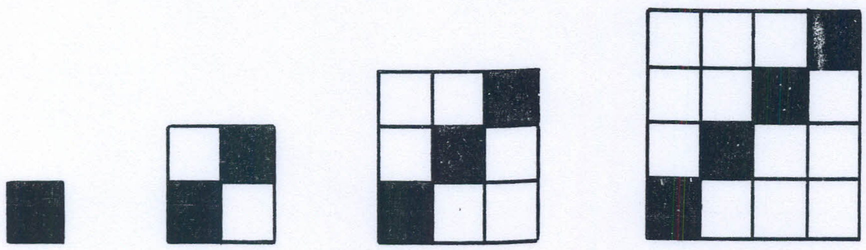
b) ¿Es la respuesta de Roberto correcta? Explica por qué sí o por qué no.

7. Un avión despegó con su tanque de gasolina lleno, cuya capacidad era de 116 000 litros. El avión usó 900 litros por hora.

Si voló a una velocidad promedio de 800 km/h y cuando aterrizó conservaba 44 000 litros de gasolina, ¿qué tan largo fue el vuelo?

8. En un concierto de Luis Miguel se vendieron 10 000 boletos. Los boletos fueron numerados del 1 al 10 000. A cada persona que tenía un boleto numerado con al menos tres dígitos repetidos se le obsequió un pase gratis para otro concierto. ¿Cuántas personas obtuvieron el pase gratis?

9. Observa el patrón de los cuadrados blancos y negros



a) ¿Cuántos cuadros blancos debe haber en la décima figura?
b) Si los cuadrados blancos cuestan $5 cada uno y los negros $1, ¿cuánto costará un piso de 20 cuadrados por lado?

10. La Compañía Mexicana tiene 24 aviones con 2, 3 ó 4 motores. Los aviones tienen un total de 70 motores. 10 de los mismos tienen exactamente 2 motores cada uno. ¿Cuántos tienen exactamente 4 motores cada uno?

11. Se va a imprimir un libro que contiene 222 páginas. ¿Cuántas veces se imprimirá el número 7?

B. Resumen de Resultados. Observe que en algunos casos el número total de los estudiantes es menor que 21. Esto quiere decir que hubo estudiantes que no mostraron ningún trabajo en el problema.

CATEGORÍAS

Problema	1(# de estud.)	2(# de estud.)	3(# de estud.)	Desarrollo	Estrategias
1	3			incompleto	opera-numer
1		4		incompleto	opera-numer
1			14	completo	alg,reg de 3

Problema	1(# de estud.)	2(# de estud.)	3(# de estud.)	Desarrollo	Estrategias
2	13			incompleto	indet, op-num
2		1		incompleto	opera-numer
2			7	completo	opera-numer

Problema	1(# de estud.)	2(# de estud.)	3(# de estud.)	Desarrollo	Estrategias
3	10			incompleto	indeterminada
3		8		incompleto	lista sin orden
3			2	completo	lista ordenada

Problema	1(# de estud.)	2(# de estud.)	3(# de estud.)	Desarrollo	Estrategias
4	1			incompleto	indeterminada
4		10		incompleto	lista y opera
4			10	completo	lista

Problema	1(* de estud.)	2(* de estud.)	3(* de estud.)	Desarrollo	Estrategias
5	1			incompleto	indeterminada
5		15		incompleto	explicación
5			5	completo	caso sim, expl.

Problema	1(# de estud.)	2(# de estud.)	3(# de estud.)	Desarrollo	Estrategias
6	5			incompleto	indeterminada
6		3		incompleto	opera-numer
6			13	completo	opera-numer 3

Problema	1(# de estud.)	2(# de estud.)	3(# de estud.)	Desarrollo	Estrategias
7	3			incompleto	indeterminada
7		8		incompleto	opera-numer
7			10	completo	vel, oper-num

Problema	1(# de estud.)	2(# de estud.)	3(# de estud.)	Desarrollo	Estrategias
8	6			incompleto	indeterminada
8		11		incompleto	lista no orden
8			0	completo	

Problema	1(# de estud.)	2(# de estud.)	3(# de estud.)	Desarrollo	Estrategias
9	5			incompleto	indeterminada
9		3		incompleto	opera-numer
9			10	completo	patrones,op-n

Problema	1(# de estud.)	2(# de estud.)	3(# de estud.)	Desarrollo	Estrategias
10	10			incompleto	indet,op-num
10		1		incompleto	ens-error,op-n
10			9	completo	ens-error,alg

Problema	1(# de estud.)	2(# de estud.)	3(# de estud.)	Desarrollo	Estrategias
11	11			incompleto	indet,lista
11		7		incompleto	lista sin orden
11			3	completo	lista con orden