Variación y Representación: Del Número al Continuo

Resumen

En este artículo estudiamos algunas de las circunstancias centrales que hicieron posible el tránsito de la Matemática elemental a la Matemática superior. Esta última comienza con el estudio matemático del movimiento. Hay dos hechos que pueden considerarse básicos para el análisis que nos ocupa: (i) la identificación del número con un continuo geométrico y (ii) la construcción matemática de la variación. La primera de ellas está animada por la introducción del concepto de número de Stevin en 1585, que cambió por completo el panorama aritmético desarrollado en la matemática griega desde la perspectiva aristotélica. Las representaciones geométricas del movimiento hicieron posible una base de reglas operatorias que, a su vez y mediante un proceso de abstracción y descontextualización, dieron lugar a la Matemática de las Cantidades Variables.

Introducción

Hay dos circunstancias que fueron fundamentales para el desarrollo del estudio matemático del movimiento:

i) la identificación del número con un continuo geométrico, y
ii) la construcción matemática de la variación.

Con respecto a la primera, iniciaremos nuestro análisis estudiando el cambio drástico que sufrió el concepto de número, al pasar de la concepción euclidiana al nuevo concepto introducido por Stevin en 1585.

Luis E. Moreno Armella
Guillermina Waldegg
CINVESTAV
México

Se ha escrito (véase [1] y [2]) que el concepto euclidiano de número proviene de Pitágoras y de Aristóteles. Hay dos características de tal concepción que resultan sorprendentes para el lector actual:

i) El 1 no es un número
ii) El número sólo puede aplicarse al estudio de las colecciones discretas.

En otras palabras, no hay una noción de continuidad asociada al concepto de número. Es a causa de estas características que podemos considerar como un problema relevante *el tratar de encontrar cuándo el número y la magnitud continua se integran en un mismo concepto.* Recordemos que Aristóteles "resolvió" la paradoja de la flecha diciendo que el tiempo no puede estar hecho de momentos, y que las líneas no pueden estar hechas de puntos, lo que es una forma de decir que la categoría de la Cantidad tiene dos componentes disyuntas: la discreta (número) y la continua (magnitud).

Estas componentes se reflejan en las matemáticas como el estudio de la magnitud y del número, es decir, como el estudio de la geometría y de la aritmética. Para Aristóteles, la continuidad puede caracterizarse como la divisibilidad indefinida, de lo cual es posible concluir que la línea no puede estar compuesta de puntos. *Las líneas y los puntos pertenecen a estratos matemáticos distintos.*

El continuo geométrico aparece como una abstracción del continuo físico. Debido a la caracterización de la continuidad es posible concluir que el continuo no está hecho de indivisibles.

Este escenario cambió de manera radical con el trabajo de Simón Stevin. El concepto griego de número se había desarrollado como resultado de un proceso de abstracción aplicado a un mundo material. Stevin cuestionó este punto de vista debido a necesidades prácticas. Sin embargo, las concepciones euclidianas estaban tan profundamente enraizadas que Stevin encontró necesario argumentar en contra de esta tradición tanto desde un punto de vista práctico como desde lo que consideraremos un punto de vista epistemológico. No se trataba sólo decir que "el uno era un número" sino de producir un argumento sustancial para justificar tal aserto.

Vayamos ahora a un tratamiento más sistemático de la matemática griega, necesario para comprender la atmósfera conceptual dentro de la cual Stevin desarrolló su trabajo.

El concepto griego de Cantidad

Aristóteles introduce la cantidad como una de las ocho categorías esenciales del pensamiento [Categorías 1^b, 25, [9]] a las cuales corresponden expresiones no compuestas, es decir, que no "*...involucran en sí mismas una afirmación" [Íbid., 2a., 5], ni se pueden calificar como falsas o verdaderas; por ejemplo, "2 pies", expresión de cantidad, no es —en sí misma—, ni falsa ni verdadera.*

La **divisibilidad** es la operación fundamental que permite la clasificación y definición de las cantidades: una **magnitud** es una cantidad divisible *ad infinitum*; su característica definitoria es el ser **continua**. Un **número** es una cantidad divisible sólo un número finito de veces; su característica definitoria es el ser **discreto.** En palabras de Aristóteles:

> "Quantum" significa aquello que es divisible en dos o más partes alícuotas de las cuales cada una es por naturaleza un "uno" y un "esto". Un "quantum" es una pluralidad si es numerable, una magnitud si es mensurable. "Pluralidad" es lo que es divisible potencialmente en partes no-continuas; "magnitud" lo que es divisible en partes continuas... , pluralidad limitada es número, longitud limitada es recta... [[9], *Metafísica,* 1020a, 5].

Las cantidades continuas y las cantidades discretas forman clases disyuntas e independientes y, en consecuencia, sus respectivos estudios son ajenos e irreductibles. Siguiendo la tradición platónica, la Geometría se ocupa de estudiar las magnitudes, mientras que la Aritmética lo hace de los números. Estas dos ciencias no tienen, en principio, ninguna conexión, excepto en el caso particular de las magnitudes conmensurables en donde pueden aplicarse los resultados de la aritmética ya que estas magnitudes pueden ser pensadas como números. La siguiente cita muestra lo anterior:

> Los axiomas que son premisas de demostración pueden ser idénticos en dos o más ciencias, pero en el caso de dos diferentes "genera" tales como la Aritmética y la Geometría no se pueden aplicar demostraciones aritméticas a las propiedades de magnitudes, a menos que las magnitudes en cuestión sean como números [[9], *Analíticos Posteriores,* 75^b, 5]

El uso de la palabra "genera" (pronunciada "génera") en este párrafo de los *Analíticos Posteriores*, que podemos entender como la clase de objetos que comparten ciertas características de generación, deja ver cómo para Aristóteles las diferencias en la naturaleza o el origen de los objetos matemáticos determina el modo de operar con ellos: aunque se tengan proposiciones análogas y las mismas reglas de la lógica, éstas no pueden aplicarse indistintamente a objetos con génesis diferentes.

Euclides mantiene una separación entre Aritmética y Geometría análoga a la de Aristóteles [cf. [1], Jones, 1987, p 377]. En *Los Elementos,* los libros I al VI y XI al XIII son geométricos, mientras que los libros VII al IX son aritméticos. En ningún momento, con excepción del libro X, los términos número y magnitud aparecen en un mismo libro. La proposición X 5, sin embargo, hace uso de la licencia otorgada por Aristóteles cuando afirma:

> * X 5: Las magnitudes conmensurables están en la misma razón que dos números

Haremos algunos comentarios sobre la epistemología aristotélica que son necesarios para nuestro estudio de las magnitudes.

La epistemología aristotélica

La filosofía aristotélica es **empirista**, pues sostiene que el origen del conocimiento científico está en el mundo material. Para Aristóteles los conceptos están en la naturaleza y de ella heredan sus propiedades y relaciones. Para acceder al conocimiento, es necesario observar cuidadosamente la naturaleza y abstraer de ella los conceptos de la ciencia. Consistentemente con esta posición, el número y la magnitud, son conceptos extraídos del mundo material, como se aprecia en la siguiente cita:

> Todas estas objeciones y otras del mismo estilo, hacen entonces evidente que número y magnitudes espaciales no pueden existir separados de las cosas [*Metafísica,* 1085b, 30].

Adicionalmente, la matemática griega es una "matemática realista" en el sentido de que en el acto de conocer, implícita o explícitamente, se excluye la actividad del sujeto como un factor que determine las características del objeto de estudio, esto es, para los griegos lo que es susceptible de conocerse está en una realidad externa a quien conoce e independiente de él. [cf. Piaget [7], cap. III, "Sobre Conocimiento Matemático y Realidad"].

Tal posición epistemológica permite la construcción de una sólida estructura teórica y metodológica, pero impone una serie de restricciones a los objetos matemáticos. Para nuestros propósitos nos detendremos en aquellas restricciones que se manifiestan en los conceptos de número y magnitud, y en las relaciones entre éstos.

Número y magnitud en los griegos

El número griego está conceptualizado a partir de multiplicidades o colecciones de objetos concretos, individuales e indivisibles, identificados, cada uno de ellos con una unidad abstracta:

> Unidad es aquello de acuerdo con lo cual cada cosa es llamada **uno** (subrayado nuestro) [*Elementos,* Def VII-1].
>
> Un número es una multitud compuesta de unidades [*Elementos,* Def VII-2].

Estas definiciones, así como la definición de cantidad de Aristóteles que citamos anteriormente, nos remiten a un concepto de unidad y de número vinculado al proceso de contar, como la actividad de "leer cifras" en las cosas: decir que una cosa es un **uno** o un **esto**, evoca la acción de reconocer y entonces, de señalar (con el índice) cada uno de los objetos que se están contando.

El **dominio numérico** griego tiene la estructura básica que se deriva del modo de generar la serie numérica y del modo de operar con sus elementos manteniendo un referencial externo. Una vez determinada la naturaleza de los conceptos, como reflejo de una realidad física externa, la metodología que se debe emplear para operarlos queda automáticamente definida.

La **unidad**, principio generador del número, es el concepto que resulta al abstraer de las "cosas" (de cada cosa) los rasgos que conciernen exclusivamente a su singularidad; de aquí que no tenga ningún sentido, pensar en la división de la unidad, sin que ésta pierda su esencia —de la misma manera que una cosa (un hombre, un caballo) no puede ser dividida sin que pierda su esencia.

La imposibilidad de dividir la unidad numérica encierra la esencia de la cantidad discreta tal como la define Aristóteles: las subdivisiones de una cantidad discreta no se pueden continuar más allá de la unidad y, en consecuencia, sólo es posible llevar a cabo un número finito de estas divisiones (el mismo realismo griego excluye a las cantidades infinitas). La unidad es el principio generador del número y su indivisibilidad lo caracteriza.

Por otra parte, las **magnitudes geométricas** —prototipo de cantidades continuas— forman un dominio heterogéneo. A él pertenecen longitudes, áreas y volúmenes. Comparten la propiedad de ser divisibles potencialmente *ad infinitum* y comparten los métodos para establecer entre ellas (si son de la misma especie) razones y proporciones. Sin embargo, no se puede hablar de una estructura que las aglutine, análoga a la estructura del dominio numérico. Los segmentos, por ejemplo, forman un agregado de elementos abstractos, aislados e independientes entre sí; es posible, dados dos segmentos, operar con ellos, compararlos, ordenarlos, pero esto no implica que pierdan su individualidad y, por así decirlo, su libertad. La recta, en la geometría griega, es uno de estos segmentos que puede ser prolongado indefinidamente, pero no ocupa el lugar privilegiado que tiene en nuestra matemática como continente, en el cual se ordenan y confunden los segmentos y que hace posible su estructuración.

Las comparaciones entre magnitudes en términos de sus razones —que es un primer nivel cualitativo del proceso de medir— dan lugar a la clasificación de las magnitudes en *conmensurables* e *inconmensurables*. Sin embargo, esta clasificación, así como las que resultan de todas las comparaciones que se establecen entre magnitudes, son relaciones *binarias*; es decir, se establecen tomando sólo dos elementos a la vez. No definen "clases de equivalencia" en el sentido que damos actualmente a estos términos.

La divisibilidad está en la raiz de la definición de conmensurabilidad e inconmensurabilidad: si es posible encontrar una magnitud finita que "mida" (es decir que divida exactamente) de modo simultáneo a dos magnitudes dadas, estas dos son conmensurables. Si, por lo contrario, la búsqueda de esta ''magnitud unidad'' nos conduce a tomar magnitudes más y más pequeñas en un proceso de división potencialmente infinito, las magnitudes son inconmensurables. En el primer caso, cuando las magnitudes son conmensurables, las razones entre ellas tienen un comportamiento análogo al de las razones numéricas. En consecuencia, pueden ser tratadas como estas últimas, como nos dice la proposición X 5 de *Los Elementos* que citamos anteriormente. De lo contrario, no hay vinculación posible entre magnitud y número.

La matemática griega considera la existencia de una unidad de magnitud no sólo necesaria para las prácticas de medición, sino teóricamente indispensable para la caracterización conmensurable-inconmensurable. Consistentemente con la epistemología realista, una unidad métrica no puede tener el estatus de ''absoluta'' que tiene la unidad aritmética, puesto que la primera no tiene una ''realidad'' externa. Elegir una magnitud-unidad, equivaldría a privilegiar una magnitud con atributos impuestos por el sujeto y no ''leídos'' en la propia realidad; la elección de una magnitud-unidad no se puede, entonces, independizar de la actividad del sujeto.

Sin embargo, la magnitud-unidad que resulta de comparar dos magnitudes conmensurables (su ''máximo divisor común'') es una unidad **intrínseca** a las dos magnitudes comparadas y, por tanto, independiente del sujeto que lleva a cabo la comparación. Esta unidad tiene las características teóricas que impone la matemática griega, pero también el inconveniente de no ser única, puesto que varía al cambiar el par de magnitudes comparadas.

Aceptando que la unidad aritmética y la unidad de las magnitudes corresponden a ''genera'' diferentes, hagamos, no obstante, una descripción de sus comportamientos:

La unidad aritmética **no** es un número, y la unidad geométrica **es** una magnitud. La unidad aritmética es única; la geométrica depende de las magnitudes que se ''midan''. La unidad aritmética es el principio de generación del dominio numérico, pero la unidad geométrica no puede ser un principio puesto que no es única.

Las diferencias entre los dominios que acabamos de enlistar hacen imposible el establecimiento de una identificación, ni siquiera en un nivel operatorio, entre números y magnitudes en la matemática euclidiana.

Antes de pasar al estudio del trabajo de Stevin sobre el concepto de número, discutiremos algunas ideas acerca de las *formas de representación* de los conceptos matemáticos y cómo organizamos en primera instancia nuestro conocimiento matemático en lo que llamaremos organizaciones locales. Estas ideas serán de utilidad en la parte final de trabajo.

Nociones matemáticas y representaciones

La historia de las matemáticas, en particular la del Cálculo, nos permite afirmar que durante la evolución de una disciplina se forman núcleos conceptuales alrededor de los cuales se lleva a cabo la actividad matemática. A estos núcleos los llamaremos *organizaciones locales*; por ejemplo, los problemas de máximos y mínimos (en el contexto suministrado por la geometría analítica) fueron identificados con el trazado de las tangentes a curvas que podían ser *representadas* por ecuaciones. Estas representaciones hicieron posible la ampliación del universo de las curvas a las que se podía trazar tangentes. *Las representaciones son las formas que toman nuestras intuiciones y conceptualizaciones (transitorias) de un conocimiento que está siendo construido.* Por ejemplo, cuando se construye el concepto de función, la gráfica, la tabla de valores, la fórmula, son tipos diferentes de representaciones que se usan para manejar el concepto. Son ejemplos de las de tipo externo. Existe una fuerte interacción entre representaciones mentales y representaciones externas. (Este tema ha sido desarrollado en extenso por J. Kaput. Véase, por ejemplo [11].) Podríamos decir que lo que es de interés no es la representación mental en sí, sino la acción que se apoya en ella. De una u otra forma, es así con todo concepto matemático. Las representaciones visuales de la geometría elemental juegan el mismo papel. En ambos casos el razonamiento es casi imposible en ausencia de estas representaciones externas. Describamos con más detalle lo que es una organización local. Hagámoslo a través de un ejemplo tomado de la historia: para explorar la noción de recta tangente fue necesario una organización local que incluyese:

- una curva representada por una ecuación
- un campo operatorio, que consistiera en esencia en "derivar" (i. e., hallar la línea tangente en un punto particular) la ecuación e igualar a cero esta "derivada"

Esta organización local está anclada al contexto que suministra la geometría analítica; generaliza el problema del trazado de la tangente usando como herramienta la *nueva representación* del objeto geométrico que va a ser manipulado. Es así como el campo operatorio hace posible la exploración del "objeto tangente". En este momento no se tiene aún una definición rigurosa de derivada como acostumbramos ver en los textos modernos, pero esto no es un obstáculo para iniciar la exploración de la tangente en términos muy generales. Podemos concebir las organizaciones locales como estructuras intermedias entre las concepciones y el objeto lingüístico que conocemos como un *concepto formal.*

El proceso de refinamiento de una organización local es algo que puede ser descrito en términos de asimilaciones y acomodaciones (véase [6] para una discusión de la Teoría de la Equilibración, de Piaget.)

Dentro del contexto de las representaciones pasemos ahora al trabajo de Oresme con el propósito de preparar una perspectiva de lo que sigue (véase en [4] una presentación completa de este trabajo). En Oresme encontramos un ejemplo muy importante de organización local: el estudio de la variación en un contexto geométrico: la idea de una *cantidad que fluye.* Oresme introdujo figuras geométricas para representar el comportamiento de una cualidad. Según este investigador, el estudio de un cuerpo puede realizarse desde dos puntos de vista: un punto de vista *extensional* —por ejemplo, el peso de un cuerpo—; y desde un punto de vista *intensional,* —por ejemplo, la temperatura de un cuerpo—. En este caso la medición es puntual. Leyendo el capítulo sobre la continuidad de la intensidad (véase [4], Parte I. i, 165-169) encontramos la concepción euclidiana del número allí donde Oresme dice que *cualquier cosa medible excepto el número, puede ser representada por una magnitud.* Es decir, "a la manera de una cantidad continua". Esto explica por qué cuando habla de intensidades nos dice que "los puntos de una línea" son una ficción necesaria utilizada para representar un lugar sobre el cuerpo estudiado. Cada medición intensional (p. 167) que se hace sobre un cuerpo se representa mediante un segmento. El cuerpo mismo también se representa mediante un segmento. Oresme consideró al conjunto total de intensidades como la puerta de entrada al estudio de la variación. Este conjunto se denomina una *superficie de latitudes,* y contiene toda la información acerca de la variación de la intensidad. Aquí aparece un cambio en sus concepciones puesto que la superficie de latitudes se usa para estudiar la variación de la *forma* transformando su trabajo en uno de naturaleza cualitativa. Consideremos ahora su estudio de la velocidad. Este concepto se imagina como una cualidad adquirida por un cuerpo en movimiento. A continuación se introducen los términos *uniforme* y *uniformemente diforme*, para denotar una cualidad que, en el primer caso, no cambia en el tiempo y, en el segundo, con una latitud variable que posee una razón de cambio constante. Estos son los ejemplos centrales que más adelante va a considerar Galileo, aunque desde un marco conceptual diferente. Debe mencionarse que Oresme consideró aun otras posibilidades. Por ejemplo, consideró superficies de latitud *diformemente diformes.* Hay una total autonomía de estos estudios con respecto a restricciones físicas; podríamos decir que todo este trabajo está hecho para *clasificar por medio de la herramienta o utensilio de representación.*

La forma en que Oresme considera la variación provee a su modelo representacional de la posibilidad de estudio del movimiento, en *términos geométricos.* Encontraremos este punto de vista en el trabajo de Galileo *Diálogo de dos Nuevas Ciencias,* aunque aquí, como ya hemos señalado, el marco conceptual es muy diferente. Consideremos un ejemplo tomado de Galileo (véase Struik, [7], 208-209):

Teorema I (Proposición I)

El tiempo en que se recorre un espacio mediante un cuerpo que parte del reposo y que está uniformemente acelerado, es igual al tiempo en que tal espacio sería recorrido mediante un cuerpo que se desplaza con

> velocidad uniforme igual a la mitad de la máxima velocidad que alcanza el primer cuerpo.

Podemos hallar una proposición análoga en Oresme (véase [4], p.409). Allí el enunciado es como sigue:

> Toda cualidad, si es uniformemente diforme, es de la misma cantidad que lo sería la cualidad que está de acuerdo con el grado del punto medio(de la intensidad correspondiente).

Resulta revelador leer lo que nos dice Clagett ([4], pp. 13-14) al respecto de esta proposición que se conoce como la **Regla de Merton.**

> "[Oresme] no aplica la regla de Merton... descubierta en Oxford hacia 1330, al problema de la caída libre, como hizo Galileo casi trescientos años después, aunque Oresme conocía esta proposición y, de hecho, dio la primera demostración geométrica en otro trabajo, *De Configurationibus,* pero la aplicó en abstracto y no al estudio de la aceleración natural de los cuerpos en caída libre".

Esto establece, con claridad meridiana, que el contexto dentro del cual trabajó Galileo, era distinto al de Oresme. Para este último, el interés se hallaba en el estudio general de las intensidades y configuraciones. Galileo, por su parte, estaba interesado en el caso, muy particular, de la caída libre.

La cantidad en Stevin

La obra matemática de Simon Stevin que contiene sus mayores aportaciones teóricas es *L'Arithmetique,* publicada en 1585. En esta obra Stevin presenta una extensión del concepto de número que sólo es posible mediante la ruptura explícita con la concepción euclidiana. A través de este nuevo concepto de número, Stevin busca dar una fundamentación de los procedimientos del cálculo aritmético con su recién introducida representación decimal.

Stevin inicia su tratado con las definiciones siguientes:

> *Definición 1:* La aritmética es la ciencia del número

> *Definición 2:* El número es aquello por lo cual se revela la cantidad de cada cosa

La Definición 2 encierra el gran cambio que Stevin introduce en la concepción de número con respecto a la matemática euclidiana. Recordemos que para Aristóteles el número es una cantidad (una clase de ellas), mientras que, de acuerdo con la definición de Stevin, el número es el medio para hacer evidente la cantidad (que es una propiedad de las cosas). Resaltemos esta diferencia: para ambos la cantidad es un concepto que se abstrae en *un primer nivel de representación* de ciertas propiedades de los objetos materiales (su "ser cuantitativo"), pero mientras que Aristóteles sitúa al número y a la magnitud en este primer nivel, Stevin pasa a *un segundo nivel de representación* en el cual el número "habla" del nivel precedente.

El número de Stevin se refiere no sólo a la cantidad "numerable" sino también a la "medible", esto implica un cambio en las acciones asociadas al número: *no sólo se emplea para contar sino también para medir.*

A este nuevo concepto de número, cuyo objetivo es establecer una identificación en el tratamiento de cantidades continuas y discretas, Stevin tiene que agregar —explícitamente—, diferencias importantes respecto al número griego:

a) La unidad (numérica o geométrica, ahora identificadas) es un número.

b) La unidad es divisible ilimitadamente.

c) Las partes de la unidad son, a su vez, números.

De estas tres premisas Stevin obtiene, de manera directa, una ampliación del dominio numérico que incluye ahora tanto a la unidad, como a las fracciones de ella. Pero ésta no es la única ampliación que introduce Stevin, ya que generaliza la cerradura limitada de las operaciones aritméticas griegas a la operación de extracción de raíces, incorporando así a los *números radicales* (racionales e irracionales) y a todos aquellos números que son resultado de operaciones algebraicas con números positivos.

En segundo lugar, Stevin borra la dicotomía continuo-discreto de la cantidad, al negar la "discretez" del número como una característica de su esencia: *El número no es una cantidad discontinua* [Stevin, en Jones, 1978, p. 239]. El número, como entidad aislada, es "continuo" en el sentido aristotélico, ya que es posible dividirlo indefinidamente y, en todo caso, hereda la característica de continuidad o discretez de la "cosa" (su cantidad) que está cuantificando. Por ejemplo, si se habla de 1 caballo, el número *uno* es discreto, mientras que si hablamos de 1 yarda, el número *uno* resulta ser continuo. Con ello, continuo y discreto dejan de ser categorías ontológicas; la discusión sobre este punto se circunscribe al campo de la matemática, en donde éstas son propiedades circunstanciales de los objetos cuantificados.

En tercer lugar, la unidad deja de tener el carácter privilegiado que tiene en la matemática griega, como principio generador del número. Con ello, Stevin debe renunciar a la posibilidad de tener un principio de generación absoluto, con lo que se ve obligado a buscar para su concepto de número una **sustentación extralógica**. Es decir, externa a la matemática, situada en el contexto físico: la cantidad de cada cosa.

La matemática de Stevin

Imbuido en la tendencia empirista de la época, Stevin extrae su concepto de número de la experiencia, basándolo en la práctica generalizada de la medición. En este momento la frontera establecida por los griegos entre la matemática teórica y la matemática aplicada parece desvanecerse y las necesidades prácticas determinan el tipo de matemática que se debe desarrollar.

Stevin, como afirma Jakob Klein (véase [2]):

> ...pone su experiencia en la práctica comercial, financiera y de ingeniería al servicio de sus preocupaciones "teóricas" e inversamente, su "teoría" se pone en marcha dentro de su "actividad práctica"

Para dar una fundamentación teórica de las actividades matemáticas cotidianas, era necesario buscar mecanismos ágiles para operar los resultados de mediciones que, además, pudieran ser objeto de una formalización de acuerdo con los esquemas griegos. Stevin resuelve el aspecto operatorio en una publicación anterior a *L'Arithmetique* llamada *La Disme,* en donde presenta una sistematización, con ciertas innovaciones, de la notación decimal que, aunque en esta época ya era conocida, su uso distaba mucho de ser generalizado. En tanto que el segundo punto Stevin lo resuelve en el tratado teórico de *L'Arithmetique,* a partir de la identificación de magnitud y número, atribuyendo propiedades numéricas a las cantidades continuas y propiedades de continuidad a los números.

La obra de Stevin está marcada por el predominio del campo operatorio para dar realidad al número. Hay varios momentos en su obra —no dentro de su explicitación de principios sino en sus argumentaciones adyacentes— en donde es posible apreciar este hecho. Resaltaremos estos momentos:

La esencia del número está en sus operaciones

El primer indicio de que el número de Stevin está condicionado por las operaciones que se pueden realizar con él, lo encontramos en un pasaje de *L'Arithmetique* en donde Stevin argumenta a favor de la división de la unidad, afirmando que negar la divisibilidad de la unidad es limitar la naturaleza del número, la esencia de la cual se manifiesta en "*las operaciones aritméticas que muchos autores realizan dividiendo la unidad (como lo hace Diofanto)*" [cf. *L'Arithmetique*, citado por Jones 1978, p. 235].

La afirmación anterior da al número una *existencia operatoria*, es decir, *son las operaciones que podemos realizar con los números las que determinan su naturaleza.*

Cerradura del dominio numérico respecto a las operaciones algebraicas

Un paso muy importante hacia la ampliación del dominio numérico es la consideración de que los resultados de operaciones algebraicas realizadas con números, son a su vez números. Stevin tiene dos formas de argumentar sobre este punto. La primera, basada en la práctica de la medición, consiste en exhibir magnitudès geométricas que se puedan asociar a dichos resultados. La segunda forma de argumentación, usada repetidamente por Stevin, tiene carácter extralógico y fue, en su tiempo, duramente criticada. Veamos esta segunda forma de argumentación en su primera exposición, cuando Stevin afirma que la unidad es un número:

> La parte es de la misma materia que su todo.
> La unidad es una parte de la multitud de unidades.
> Entonces, la unidad es de la misma materia que la multitud de unidades.
> Pero la materia de la multitud de unidades es número.
> Entonces, la materia de la unidad es número.
> [*L'Arithmetique,* p.1]

Esta argumentación presenta una clara ambivalencia en cuanto a su nivel de abstracción. La primera premisa: *La parte es de la misma materia que el todo,* hace referencia a objetos materiales, en tanto que la segunda: *La unidad es parte de una multitud de unidades*, se refiere a objetos matemáticos y, por lo tanto, abstractos. El paso de un nivel a otro evidencia el soporte normativo que da la realidad física al concepto de número de Stevin.

Ya hemos dicho que Stevin sustenta su concepto de número sobre la base de las operaciones que es posible realizar con él, y éstas, en las acciones que es posible realizar sobre la materia (en tanto cuantificable). Tales acciones, cuyos resultados no alteran la cantidad total de materia que interviene en el proceso y que, por lo tanto caracterizan su conservación (en el sentido piagetiano), se reflejan, en el nivel de los objetos matemáticos, como operaciones que caracterizan, a su vez, la cerradura del conjunto.

La elección de la unidad

La divisibilidad de la unidad está contextualizada en los procesos de medición, mediante los cuales se asocia un número a una magnitud. Stevin propone una estructuración teórica basada en la sistematización de esa práctica. El punto fino en esta propuesta está en el hecho de identificar una unidad "natural" —la numérica— con una unidad "arbitraria" —la métrica. Creemos que Stevin sustenta esta identificación en la "generalidad de la arbitrariedad" que caracteriza la elección de la unidad métrica. En otras palabras, el concepto de unidad numérica resulta de la abstracción de una propiedad común a todos los objetos físicos —su singularidad—, en tanto que la unidad de medida resulta de la abstracción de una característica común a toda actividad de medir —elegir arbitrariamente una magnitud como patrón.

Stevin no argumenta a favor de una única unidad de medida: de hecho, recomienda que se tome la unidad usual en cada región y que, sobre ésta, se generalice la práctica de tomar subdivisiones decimales. La siguiente cita resalta lo que acabamos de mencionar:

> ...se partirán todas las medidas, ya sea de longitud, líquidos, secos, monedas, etc., por las anteriores progresiones de décimos, y que cada una de estas famosas especies se llamará ***Commencement***; por ejemplo el Marco, ***Commencement*** de pesos, por el cual se pesan el oro y la plata: la Libra, ***Commencement*** de otros pesos comunes: la Libra Gruesa de Flandes, la Libra Esterlina en Inglaterra, el Ducado en España, y así cada ***Commencement*** de monedas. [*La Disme*, p. 221].

Stevin llama ***Commencement*** a cada una de las unidades de medida, no importa su naturaleza o dimensión, y es a este ***Commencement*** que va a asociarle la unidad numérica.

Si se tiene el número trescientos sesenta y cuatro, éste se llamará trescientos sesenta y cuatro ***Commencements***, escribiéndolo de la siguiente manera 364 0 . A lo largo de *La Disme*, Stevin deja claro cómo establece, a través de la práctica de medir, la equivalencia entre cada una (y todas) de las unidades métricas con **una única unidad natural numérica.**

La unidad de Stevin es entonces el resultado no sólo de una abstracción realizada sobre los objetos en tanto cantidades, sino —principalmente-, de una *abstracción realizada sobre las acciones coordinadas que se efectúan en el proceso de medir estos objetos.*

Los procesos infinitos

Stevin no niega la existencia teórica de expansiones decimales infinitas; de hecho, da un método (mediante el algoritmo de la división) para aproximarlas indefinidamente [*La Disme*, p. 210]. Sin embargo, hay una predominancia de aquellos objetos que pueden ser alcanzados (construidos) a través de la operación. La siguiente cita, referente a las magnitudes inconmensurables, describe la posición epistemológica de Stevin:

> Pero, aunque este teorema es verdadero, nosotros nunca podremos conocer por tal experiencia la inconmensurabilidad de dos magnitudes dadas; primero, porque a causa del error de nuestros ojos y manos (que no pueden ver o partir a la perfección) concluiríamos al fin que todas las magnitudes, tanto conmensurables como inconmensurables, son conmensurables. Y en segundo lugar, aunque nos fuese posible

> sustraer por acción cientos de miles de veces la cantidad menor de la mayor, y continuar así cientos de miles de años, siempre (si los números dados son inconmensurables) se trabajará eternamente, permaneciendo ignorantes de lo que al fin se podría encontrar. Entonces, **esta manera de cognición no es legítima**, nos pone en una posición de imposibilidad si queremos declarar en qué consiste realmente la Naturaleza (subrayado nuestro) [*La Practique de l'Arithmetique*, p. 215].

Pasaremos ahora al estudio de algunos aspectos de la transición del pensamiento aritmético al algebraico: Vieta.

Vieta y el Arte Analítico

La cita anterior muestra el predominio de la operación en las concepciones de Stevin. En su trabajo, él nos habla de "números aritméticos" y de "números geométricos". Cuando no conocemos el valor numérico de un número geométrico, nos dice Stevin, él entra en los cálculos como una *cantidad indeterminada*. Desde nuestra perspectiva moderna, todavía no estamos en presencia de una genuina variable algebraica, dado el carácter homogéneo que se desprende del lenguaje geométrico empleado. También, debido a que la cantidad indeterminada es *un número* —aunque desconocido por nosotros. Es probable que éste sea el carácter que tiene la "incógnita" durante el periodo que recoge los esfuerzos de los matemáticos italianos para resolver las ecuaciones de tercero y cuarto grados. Podemos apreciar un momento de transición que da pie al punto de ruptura del nuevo lenguaje algebraico. Resulta plausible decir que la primera manifestación del álgebra es como una aritmética generalizada. Un enfoque diferente es el que presenta Vieta en su *Arte Analítico* en 1591. En este libro, que es una de las piedras angulares del nuevo pensamiento algebraico, podemos leer:

> La suprema y eterna ley de las ecuaciones o proporciones, que denominamos **ley de homogeneidad,** puesto que se la concibe con respecto a magnitudes homogéneas, es ésta:
>
> I. Sólo es factible comparar entre sí magnitudes homogéneas... Puesto que es imposible saber cómo conjuntar magnitudes heterogéneas, y así..., si una magnitud se multiplica por otra, el producto es heterogéneo en relación con ambas.

(Véase el Apéndice en [2], que contiene una traducción al inglés del trabajo de Vieta. Nuestra cita proviene del cap. III, p. 324 en esa traducción).

En el trabajo de Vieta, el término "Magnitud" está usado de manera general. No sólo como magnitud geométrica. Cuando se intenta resolver una ecuación, la magnitud que se busca puede ser aritmética: un número. A este respecto vale la pena citar a J. Klein ([2], p. 123):

> Lo que es característico de esta magnitud general es su indeterminación, de la cual y como tal, un concepto sólo puede formarse dentro del ámbito de un procedimiento simbólico... [la presentación euclidiana] no realiza dos cosas que constituyen el núcleo de un procedimiento simbólico: no identifica el objeto representado con su medio de representación, y no sustituye la determinación real de un objeto con la posibilidad de hacerlo determinado, tal como quedaría expresado mediante un signo, lo cual en vez de hablar de un objeto determinado, nos habla de una posible determinación.

Esto constituye ya un gran paso hacia una matemática simbólica; sin embargo Vieta no se ha liberado aún de la ley de homogeneidad. Podemos asegurar, empero, que como en Stevin, el trabajo de Vieta es el resultado de un proceso de abstracción reflexiva. En cierto sentido podríamos decir que los conceptos de la "nueva ciencia" han sido obtenidos mediante un reflejamiento del contexto total del concepto, en un nuevo nivel de representación. En el nuevo nivel, los conceptos tienen un carácter esencialmente simbólico. Posiblemente el trabajo de Vieta es el primero de esta nueva disciplina.

En su libro *Rules For The Direction Of The Mind*, Descartes considera el problema de multiplicar dos magnitudes a y b por una tercera magnitud c. Para que esto sea posible, nos dice Descartes:

> El producto ab debe ser concebido como una línea

Esto aparece como la regla XVIII; la liberación de las cantidades de su prisión geométrica es posible debido al carácter abstracto del simbolismo empleado. Las cantidades involucradas en la actividad operatoria son abstracciones de las figuras geométricas, no las figuras mismas. La identificación del número con el símbolo utilizado para representarlo lleva a una conceptualización del número como una entidad mental, alejada ya del *Arithmos* griego, que servía para contar colecciones de objetos materiales. Conclusión: el álgebra de Vieta se transforma en un álgebra decididamente simbólica en manos de Descartes. En términos de la epistemología genética ([5], pp. 142-143) podremos decir que se ha entrado a una etapa de carácter inter-objetal. Ya lo hemos observado —pero hallamos necesario recordarlo ahora— el paso a esta nueva etapa es posible gracias a que está presente un proceso de abstracción reflexiva.

Variable y variación

El lenguaje simbólico del álgebra hizo posible la construcción de modelos —en un nivel superior de representación. Gracias a las posibilidades de manipulación de los símbolos —y al campo operatorio propio—, se podía ahora establecer relaciones simbólicas nuevas entre aquellos. Nos parece que el establecimiento de este tipo de relaciones fue importante para arribar al estudio consciente de las funciones como modelos mediante los cuales se podían estudiar *sucesiones de esta-*

dos. La *tabla de valores* es un ejemplo característico de estos modelos. Lo que quizá es más importante de esta actividad es el empleo de literales como algo que tiene la capacidad de portar valores numéricos y por ello, *variar* dentro de un substrato numérico.

La geometría analítica abrió la posibilidad de pasar de una representación analítica (la ecuación) a una representación geométrica. El estudio de la geometría se vio enriquecido por la interacción entre estas formas de representación; se generaron las condiciones para profundizar en los conceptos involucrados. Cuando se establecen nuevas conexiones entre los conceptos, se generan, como consecuencia, nuevos significados. El encuentro de las representaciones visuales y analíticas en la nueva versión de la geometría, hizo posible la transformación del estudio del movimiento, tal como había sido iniciado en manos de Oresme y la escuela escolástica. Finalicemos: fue la concepción de un espacio **geometrizado** lo que resultó crucial para la emergencia del Cálculo Infinitesimal.

Presentemos una observación sobre una conexión posible entre el desarrollo del lenguaje algebraico y el estudio del movimiento en el contexto geométrico. En la proposición de Galileo/Oresme que ya discutimos resulta crucial que la *distancia* recorrida por un móvil pueda ser representada mediante un *área*. Hay una conexión entre este hecho (conceptual) y la linealización de las magnitudes en manos de Descartes. La ley de homogeneidad de Vieta se ubica entre estos dos momentos. La ley de homogeneidad resultó un obstáculo para el desarrollo del pensamiento algebraico. Su rebasamiento —es decir, colocar todas las magnitudes en la misma categoría— fue crucial para las concepciones de los modelos geométrico-dinámicos del Cálculo.

Esto queda resumido en el diagrama siguiente:

Fenómeno
(movimiento)

↓

Representación

↓

Extracción de reglas operatorias de un contexto físico particular

↓

Generalización de las reglas operatorias
(des-contextualización)

Bibliografía

1. **Jones, C.V.**, *One as a Number.* Unpublished doctoral dissertation, Toronto University, 1978.

2. **Klein, J.**, *Greek mathematical thought and the origins of Algebra,* MIT Press, 1968

3. **Stevin, S.**, L'Arithmetique et la practique d'Arithmetique'' (1585), in *Les Oeuvres Mathematiques* (1634), A. Girard (ed.), Leyden.

4. **Clagett, M.**, *Oresme and the medieval geometry of qualities and motion.* Wisconsin University Press, 1968.

5. **Piaget, J., García, R.** *Psychogenesis and the history of science,* Columbia University Press, 1989, New York.

6. **Piaget, J.**, *The development of thought: Equilibration of cognitive structures,* Blackwell, Oxford, 1978.

7. **Piaget, J.**, *Introduction a L'epistemologie genetique,* vol. 1, Presses Universitaires de France, 1950.

8. **Struik, D.**, *A source book in Mathematics 1200-1800*, Harvard University Press, 1969 (ed.).

9. **Aristotle,** *Great books of Western World*, vol. VIII. Encyclopaedia Britannica, 1978.

10. **Euclid, ''The Elements'', Sir Thomas Heath.** *The thirteen books of the Elements*, Dover Publications Inc., New York, 1956.

11. **Kaput, J.**, ''Notations and representations as mediators of constructive processes'', Von Glaesersfeld (ed.) *Constructivism and Mathematical Education* (pp. 53-74), Kluwer, 1991.