Análisis de cuatro algoritmos operatorios obtenidos en investigación de campo con adultos analfabetas

Resumen

Los adultos analfabetas de la tercera edad hacen operaciones aritméticas mediante descomposiciones adecuadas a los datos de un problema, dependiendo de la magnitud de éstos, la experiencia acumulada y la imaginación del sujeto. En este artículo se hace el análisis de cuatro procedimientos operatorios que se obtuvieron en una investigación de campo, en la modalidad de estudio de casos, de 27 que se recabaron entre las cuatro operaciones fundamentales, y que se llevaron a algoritmos operatorios de los que se demuestra su validez formal.

Introducción

En el verano de 1993 comencé con las entonces alumnas del séptimo semestre de la especialidad de Matemáticas, en la Escuela Normal Superior de México: Laura Isabel Miranda Flores, Deyanira Monroy Zariñán y Flavia del Ángel Ibáñez una investigación de campo en el grupo del INEA (Instituto Nacional de Educación para Adultos) de San Pablo Oztotepec, Milpa Alta, D. F., al que acudían con fines de alfabetización mujeres (y un varón, hoy finado) de la tercera edad. Nuestra intención era averiguar lo que la persona que no ha escolarizado la matemática de la Escuela Básica, nos puede decir acerca de cómo la utiliza en sus relaciones sociales; en especial, cómo realiza las operaciones aritméticas elementales a partir de problemas sencillos. También deseábamos ver qué conceptos tienen acerca de algunas ideas geométricas. A éstas no me referiré en el presente artículo.

La investigación la realizamos en la modalidad de estudio de casos, y utilizamos —como acopio de datos— diversas entrevistas y la aplicación de seis cuestionarios.

Santiago Valiente Barderas

Centro de Apoyo Curricular de la
Escuela Normal Superior de México

El Cuestionario C-I contenía diez problemas sencillos y tres preguntas referentes a construcciones geométricas, las cuales dejo de lado por esta ocasión. El instrumento se aplicó solamente a 15 personas de 29 que utilizamos como población total debido a la gran movilidad de los integrantes del grupo. Los resultados que obtuvimos son interesantes, en cuanto a cómo realizan las operaciones aritméticas básicas los sujetos interrogados, descomponiendo los datos en procedimientos más o menos uniformes, constantes y eficaces. Este cuestionario se aplicó en una sola sesión, trabajando un aplicador con una sola persona a la vez. Las preguntas les eran leídas una a una, y las respuestas las registrábamos lo más fielmente posible a fin de analizarlas para poderlas expresar en términos de relaciones matemáticas claras y coherentes.

Los propósitos que perseguíamos con la aplicación de este cuestionario, en cuanto a las diez primeras preguntas eran:

—Describir cuáles son los patrones algorítmicos de realización de operaciones aritméticas básicas.
—Conocer cuáles son las diversas descomposiciones numéricas que se hace para cada tipo de operación, y si éstas se pueden reconocer como similares para operaciones distintas.
—Determinar si existe mayor complicación en la resolución operativa con números abstractos o con cantidades concretas.

El cuestionario en referencia es el siguiente:

IMATNAT I (cuestionario de exploración) [PROBLEMAS]

Edad: ____________

Nombre: ____________________________________

Estudios: ____________________________________

Ocupación actual: ______________________________

Trabajos que haya realizado: _________________________

I. Compra cosas por N$30 y paga con un billete de N$50. ¿Cuánto le deben dar de cambio? ____________

II. Tiene 4 y debe 11. ¿Qué sucede? ____________

III. Tiene 23 y debe 18. ¿Qué sucede? ____________

IV. Tiene 18 y gana 32. ¿Cuánto tiene? ____________

V. Debe 31 y debe 32. ¿Cuánto tiene? ____________

VI. Usted tiene N$ 18 y le dan N$ 23. ¿Cuánto tiene ahora? ____
____

VII. Usted tiene una varilla de 1.38 m y le corta un pedazo de 47 cm. ¿De qué medida es el otro pedazo? ____________

VIII. Usted cobra N$72 por un servicio y le pagan con un billete de N$100. Explique cómo daría el cambio. ____________
____

IX. Usted tiene N$23 y al entrar en la tienda de un amigo se lleva mercancía por valor de N$68. ¿Qué está ocurriendo en este tipo de compra? ________________________

X. Por cuatro sillas se pagan N$280. ¿Cuánto cuesta cada silla?__
____

Como se aprecia, ninguna de las preguntas lleva a establecer a la multiplicación como vía de resolución. Los algoritmos que de esta operación se obtuvieron fueron mediante de las entrevistas directas a los sujetos.

Las respuestas obtenidas siguieron el proceso de:

—Registrarlas en cuadros de resumen.
—Calificarlas según convenio.
—Discutir las muy significativas a fin de:
  * tomarla como ejemplo concreto.
  * obtener observaciones particulares.
  * conocer de los casos de sujetos con respuestas iguales.
—Verter toda la información en tantos por ciento.

El siguiente cuadro da cuenta de las respuestas calificadas:

PREGUNTA	CORRECTAS	%	INCORRECTAS	%
1	15	100	0	0
2	9	60.3	6	40
3	11	73.4	4	26.6
4	14	93.4	1	6.6
5	15	100	0	0
6	14	93.4	1	6.6
7	5	33.3	10	66.6
8	13	86.7	2	13.3
9	7	46.7	8	53.3
10	11	73.4	4	26.6

EJEMPLOS DE ENTREVISTAS PLANTEADAS

Entrevista a la señora **Cándida** (85 años).

—Si usted va al mercado y compra N$18 de carne, N$23 de semillas diversas y N$7 de jabón y detergente, ¿cuánto gastó en total?

El procedimiento para resolver el problema fue:

a) Descompuso el número 23 en 21 + 2.
b) Sumó: 18 + 2 = 20
c) Sumó: 20 + 1 = 41
d) Sumó: 41 + 7 = 48

Entrevista a la señora **Silvina** (67 años).

—Reste 105 — 28.

El procedimiento que siguió para resolver esta resta fue:

a) "Primero a 100 le quito 28": $100 - 28 = 72$
b) "Sumo 72 con 5": $72 + 5 = 77$

—Multiplique 105 por 4.

El procedimiento para realizar la operación fue:

a) Descompone el factor 105 en 100 más 5.
b) Suma: $100 + 100 + 100 + 100 = 400$.
c) Hace la suma: $400 + 20 = 420$.

Entrevista a la señora **Inocente** (64 años).

Esta persona realizó todas sus operaciones usando papel y lápiz. Una sola operación de división fue la que realizó mentalmente. La operación fue:

—Divida 820 entre 4.

El procedimiento que siguió fue:

a) Descompone al número 820 en $800 + 20$.
b) Divide 800 entre 4: $800 \div 4 = 200$
c) Divide 20 entre 4: $20 \div 4 = 5$
d) Suma: $200 + 5 = 205$

Procedimientos de resolución como éstos, efectuados por las personas a través de los cuestionarios y de las entrevistas, nos llevaron a obtener algoritmos operatorios significativos y bien diferenciados unos de otros, para cada tipo de operación aritmética involucrada en la resolución.

Aclaro que parecen no ser los únicos procedimientos que han desarrollado los sujetos estudiados, y que algunos de aquéllos sí se repiten para una misma persona y entre diversos integrantes del grupo.

La comparación entre unos y otros nos hace ver que varios procedimientos se repiten, y por ello se puede pensar que se generalizan en el razonamiento de las personas y se desarrollan a lo largo de su experiencia social como una imperiosa necesidad de resolver las situaciones problémicas que las relaciones sociales les van imponiendo en cuanto a medidas, cambios monetarios, cálculo de cantidades, reparto de magnitudes, etc. Sobresale, notoriamente, la necesidad en el cambio de mercancías por moneda y sus diversas transacciones.

Una vez que teníamos las respuestas de las personas a los cuestionarios aplicados y a las entrevistas sostenidas, nos dimos a la tarea de discutir el significado estricto de las frases obtenidas en el proceso de resolución, la coherencia y el sentido de ellas, el vínculo entre cada una y, así, determinar la validez del proceso resolutivo.

El análisis total permitió ver que dos cosas se daban; por un lado, un mismo sujeto era capaz de usar "procesos" diversos para problemas acerca de la misma operación, y que ello dependía en gran medida del contexto del problema y de la magnitud de los números usados como datos. Pero, además, varias personas usaban "procedimientos" equivalentes, si no iguales, al aplicarlos al mismo problema o en problemas distintos en donde se utilizaba la misma operación para su resolución. Se apreció que había "procesos" que se repetían en parte o en su totalidad para problemas que involucraban la misma operación y los registramos. Esto nos permitió observar que se daban pasos jerárquicos en el proceso de resolución (algunos de ellos implícitos que el sujeto no emitía, pero que se evidenciaba que estaba considerado por él). La gran mayoría de los pasos jerárquicos relacionados con números eran las descomposiciones de los datos de problema a fin de llegar al resultado. Las descomposiciones de los datos eran muy precisas:

— En decenas y unidades.
— En decenas, quinquenas y unidades.
— En complementos de un dato a su decena inmediata superior.
— En decenas y quinquenas, y algunas otras más.

Todo esto nos hizo ver la viabilidad de expresar estos "procedimientos" en términos de las descomposiciones y los pasos jerárquicos, en un esquema particular de desarrollo de cada caso, a los que hemos llamado *algoritmos*.

En efecto, se ha podido detectar una buena cantidad de algoritmos que tienden a repetirse para cada una de las cuatro operaciones fundamentales. El uso, recurrencia o repetición de varios de estos algoritmos fue observado en otra u otras personas y apreciamos que, en la comprobación de su validez para diversos casos numéricos arbitrarios, con variaciones en la magnitud de los datos que se estimaba conveniente, los algoritmos seguían funcionando correctamente.

El espacio del artículo no nos permite mostrar todos los algoritmos obtenidos. Se han escogido cuatro de ellos que consideramos representativos, uno por cada operación básica, mismos que describimos a continuación. En ellos se muestra el problema planteado, la respuesta dada por el sujeto, la interpretación que se hizo de ella, el algoritmo al que nos llevó la respuesta, su validación algebraica, la comprobación del algoritmo con los datos originales, y la comprobación con datos arbitrarios.

Ejemplos de algoritmos obtenidos a partir de un problema propuesto

1. Para la adición:

"Usted tiene N$18 y le dan N$23. ¿Cuánto tiene ahora?
¿Qué hizo para llegar al resultado?

Sujeto: **Rosario** (79 años). Primero de primaria inconcluso. Vendedora de jarciería.

Forma en que el sujeto presentó la resolución:

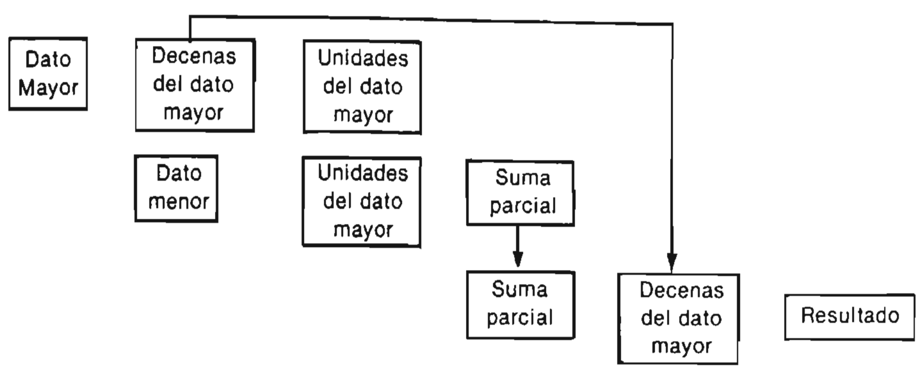
"41,... 18 más 3, 21 y 20 son 41".

Que significa, según el análisis a esta respuesta:

23 = 20 + 3 (paso implícito)
18 + 3 = 21
21 + 20 = 41

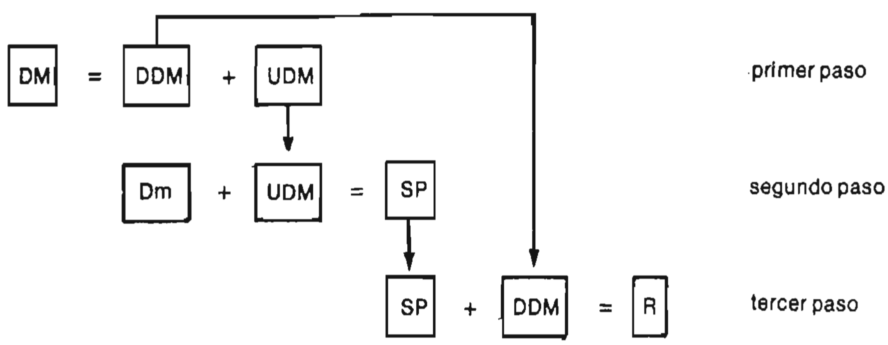
Esto es, el sujeto toma al dato mayor (23) y lo descompone en 20 unidades (2 decenas) más 3 unidades. Este paso lo realiza mentalmente y no lo explicita. En seguida suma el dato menor (18) con las unidades en que descompuso al dato mayor (3) y, por último, lo que acaba de obtener, que es una suma parcial, lo suma a las decenas en que descompuso al dato mayor (20).

Nos resultó evidente que en alguna forma siempre se están ligando los pasos del proceso por medio de alguno de los elementos numéricos. En este caso, esa liga corresponde a la repetición de las unidades del dato mayor del primer paso con el segundo paso; éste último se liga con el tercero por medio de una suma parcial; pero, además, el primer paso se liga con el tercero por medio de las decenas del dato mayor. Matemáticamente hablando, se realizó el siguiente algoritmo:



Si ahora usamos como código simplificatorio a:

DM = dato mayor
Dm = dato menor
UDM = unidades del dato mayor
DDM = decenas del dato mayor
SP = suma parcial
R = resultado,
el algoritmo anterior lo podemos expresar así:



Y así, este algoritmo puede ser utilizado como procedimiento convencional para sumar dos cantidades cualesquiera. Encontramos que 7 sujetos usaron este mismo procedimiento para resolver el problema planteado y que, además, se aplicó en problemas similares en los que se suman magnitudes.

Podemos intentar una validación para este algoritmo. Veamos.

Se parte de que el problema es la suma:

$$DM + Dm = R$$

Por el primer paso: $DM = DDM + UDM$

Por el tercer paso: $DM = (R - SP) + UDM$

Por el segundo paso: $DM = R - (Dm + UDM) + UDM$

Eliminando paréntesis: $DM = R - Dm - UDM + UDM$

Cancelando términos simétricos: $DM = R - Dm$

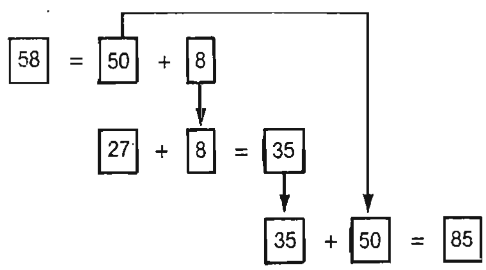
Transponiendo el término $-Dm$ al primer miembro de la igualdad: $\boxed{DM + Dm = R}$

Con lo anterior queda validado el algoritmo.

Ahora pueden ser sustituidas cualesquiera dos cantidades en el algoritmo planteado y la adición de ellas se cumplirá.

Por ejemplo si:
Dato mayor (DM) = 58

Dato mayor (Dm) = 27,
se tiene que:



2. Para la sustracción:

"Usted cobra N$72 por un servicio y le pagan con un billete de N$100. Explique cómo daría el cambio".

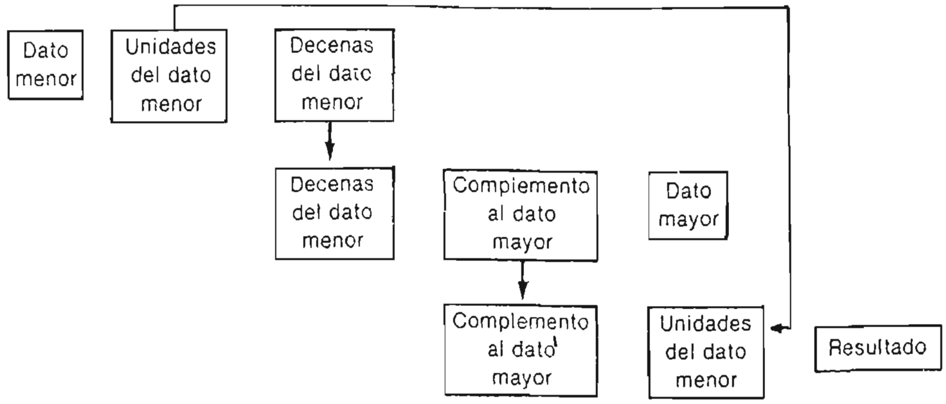
Sujeto: **Inocente** (65 años). Tercero de primaria. Hogar.
Forma en la que presenta la resolución:

"70 y 30 son 100, menos 2, son los 28"

Que significa, según el análisis hecho a esta respuesta:

$72 - 2 = 70$ (paso implícito)
$70 + 30 = 100$
$30 - 2 = 28$

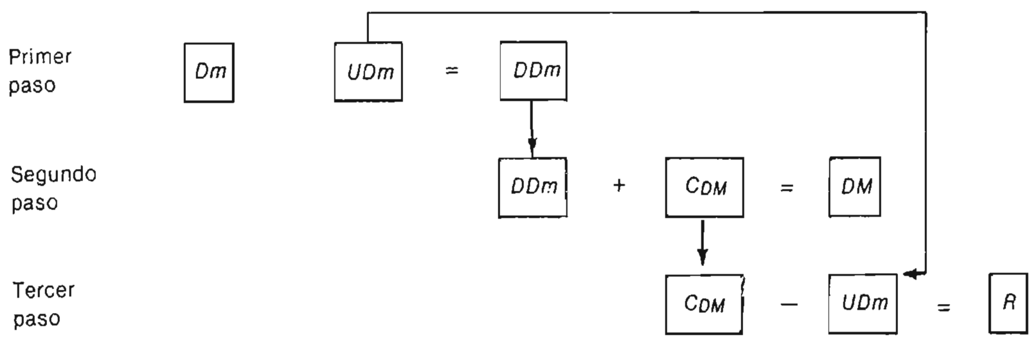
Este procedimiento operatorio se puede expresar por medio del siguiente algoritmo:



Si ahora hacemos:

Dm = dato menor
DM = dato mayor
DDm = decenas del dato menor
UDm = unidades del dato menor
C_{DM} = complemento al dato mayor
R = resultado,

el algoritmo anterior lo podemos escribir, simbólicamente, así:



Validando por vía algebraica:
Partamos de que el problema es la resta:

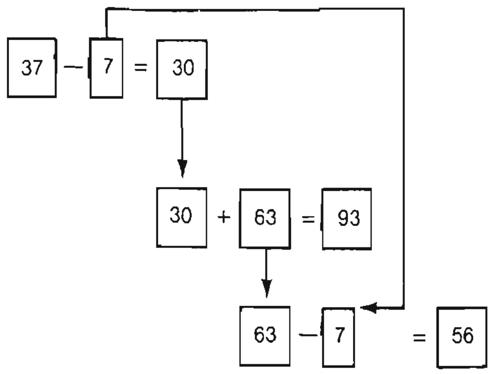
$$DM - Dm = R$$

Por el primer paso:	$Dm - UDm = DDm$
Por el segundo paso:	$Dm - UDm = (DM - C_{DM})$
Por el tercer paso:	$Dm - UDm = DM - (R + UDm)$
Eliminando paréntesis:	$Dm - UDm = DM - R - UDm$
Por propiedad cancelativa:	$= DM - R$
Transponiendo el término Dm al segundo miembro y —R al primero:	$\boxed{R = DM - Dm}$

El siguiente es un ejemplo de comprobación del algoritmo con datos supuestos, en el que

Dato menor (Dm) = 37

Dato mayor (DM) = 93



3. Para la multiplicación.

"Si usted vende 5 cosas a N$1.70 cada una, ¿cuánto cobrará?

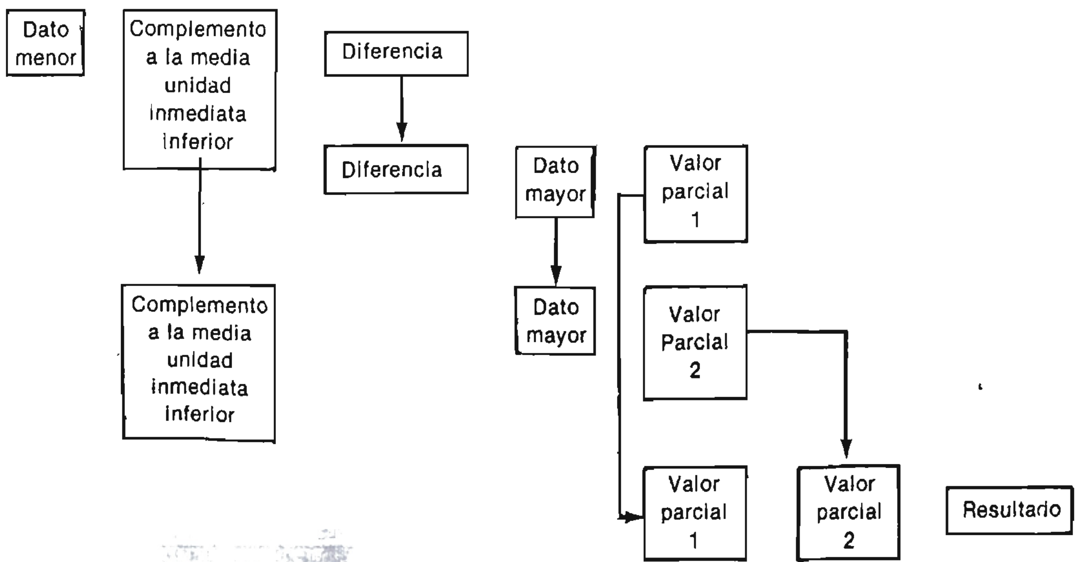
Sujeto: **Guillermina** (48 años). Sin escolaridad. Comerciante.
Forma en que el sujeto presentó la resolución:

"Si fueran a N$1.50 serían 7.50 más los 20, 8.50".

Lo cual significa, según el análisis hecho a esta respuesta:

1.70 — 0.20 = 1.50 (paso implícito)
1.50 × 5 = 7.50
0.20 × 5 = 1.00
7.50 + 1 = 8.50

Este procedimiento operatorio se puede expresar por medio del siguiente algoritmo:



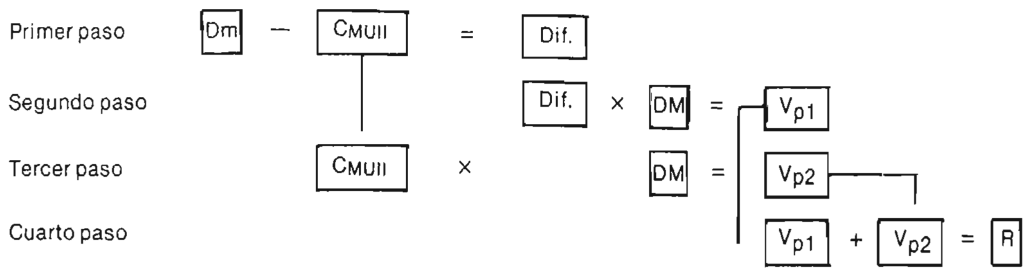
Si ahora hacemos:

DM = dato mayor
Dm = dato menor
$Dif.$ = diferencia

R = resultado

V_{p1} = primer valor parcial
V_{p2} = segundo valor parcial
C_{MUII} = complemento a la media unidad inmediata inferior,

el algoritmo anterior lo podemos expresar, simbólicamente, así:



Validando por vía algebraica:
Partamos de que el problema es la multiplicación:

$$DM \times Dm = R$$

Por el primer paso: $Dm - C_{MUII} = Dif.$

Por el segundo paso: $Dm - C_{MUII} = \left(\dfrac{Vp_1}{DM}\right)$

Por el cuarto paso: $Dm - C_{MUII} = \dfrac{R - V_{p2}}{DM}$

Por el tercer paso: $Dm - C_{MUII} = \dfrac{R - (DM^* V_{p1})}{DM}$

Por distributividad: $Dm - C_{MUII} = \dfrac{R}{DM} - \dfrac{DM^* CUII}{DM}$

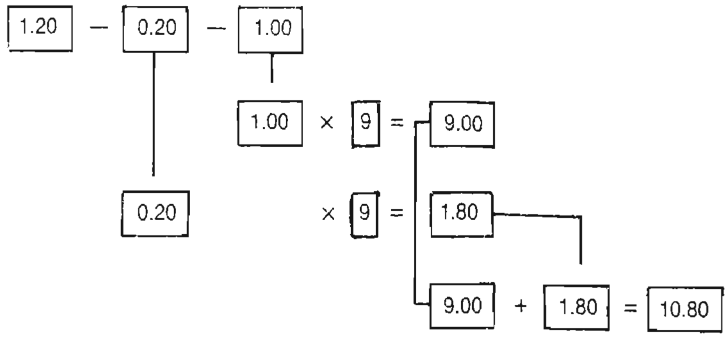
Cancelando factores y divisores en el segundo miembro: $Dm - \dfrac{R}{DM} - CUII$

Propiedad cancelativa de la igualdad: $Dm = \dfrac{R}{DM}$

Trasladando el divisor DM al primer miembro: $\boxed{DM \times Dm = R}$

Un ejemplo de comprobación del algoritmo con datos supuestos es el siguiente, en el que:

Dato mayor (DM) = 9
Dato menor (Dm) = 1.20



Nota: En algunos casos el complemento más conveniente no es el que el sujeto hace a la unidad inmediata anterior, sino a la media unidad inmediata anterior. De modo que si el dato menor es 1.70 como en este caso, el sujeto lo expresa como:

1.70 — 0.20 = 1.50, y no como 1.70 — 0.70 = 1.00

4. Para la división:

"Si el kilogramo de ... cuesta N$3.30, ¿cuánto costará el medio kilogramo?

Sujeto: **Inés** (63 años). Tercero de primaria. Hogar.

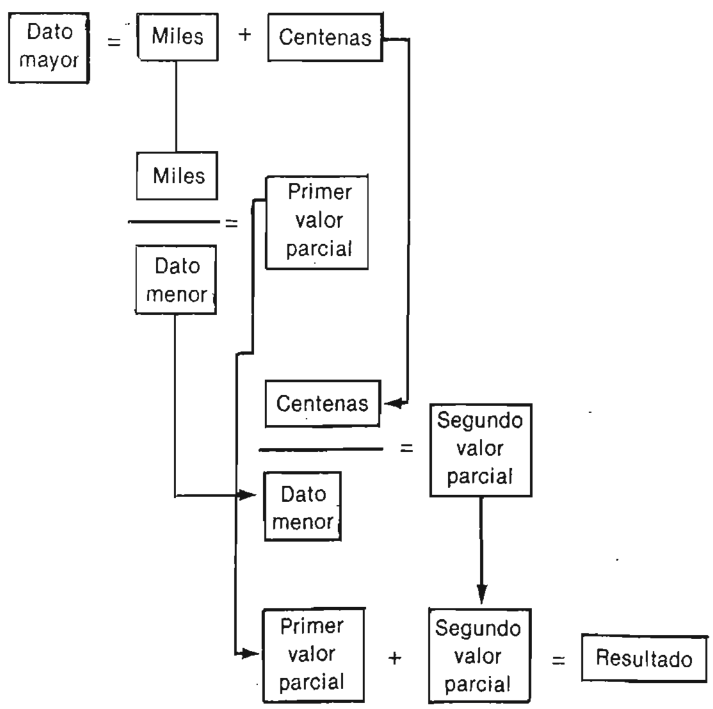
Forma en que el sujeto presentó la resolución:

"3000 entre 2 es igual a 1500, 300 entre 2 es igual a 150, 1500 más 150 es igual a 1650".

Que significa, según el análisis hecho a esta respuesta:

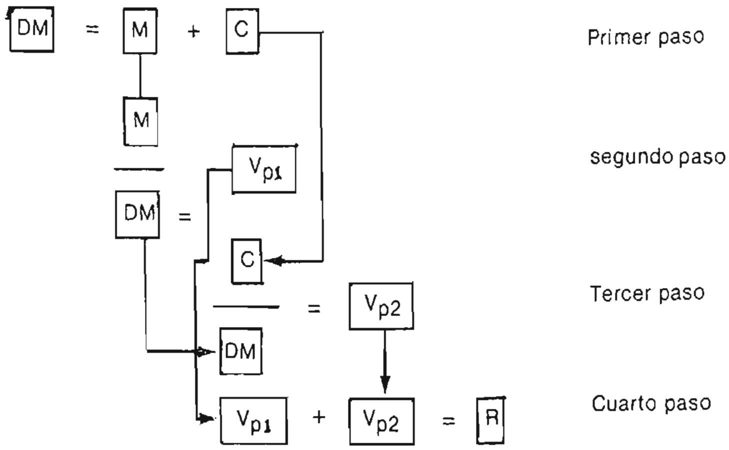
$3 \div 2 = 1.5$
$0.3 \div 2 = 0.15$
$1.5 + 0.15 = 1.65$

Este procedimiento operatorio se puede expresar por medio del siguiente algoritmo:



Si ahora hacemos: DM = dato mayor V_{p1} = *primer valor parcial*
M = miles V_{p2} = *segundo valor parcial*
C = centenas R = resultado,

el algoritmo anterior lo podemos expresar simbólicamente así:



Cuya validación algebraica es:
Partamos de que el problema es la multiplicación:

$$\frac{DM}{Dm} = R$$

Por el primer paso: $DM = M + C$

Por el segundo y tercer pasos respectivamente: $DM = (V_{p1} \times Dm) + (V_{p2} \times Dm)$

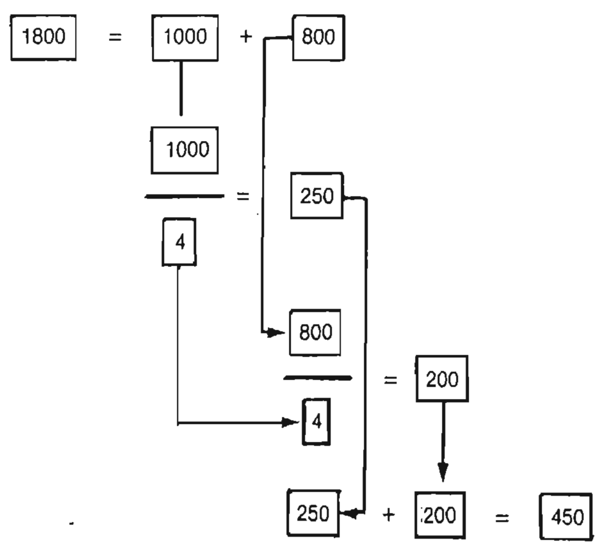
Factorizando el segundo miembro: $DM = Dm(V_{p1} + V_{P2})$

Por el cuarto paso: $DM = Dm \times R$

Trasladando el factor Dm al primer miembro: $\dfrac{DM}{Dm} = R$

Un ejemplo de comprobación del algoritmo con datos supuestos es el siguiente, en el que:

Dato mayor (DM) = 1800
Dato menor (Dm) = 4



En resumen:

Como resultado del estudio de casos, las entrevistas directas y la aplicación de un cuestionario, hemos obtenido 17 algoritmos generales de resolución operativa: 7 para suma, 7 para resta, 6 para multiplicación, y 7 para la división, así como algunos casos variantes de éstos.

Se apreció que el camino más general en la resolución operatoria es la descomposición de uno de los datos o bien de los dos. Lo común es descomponerlo en dos, y cuando más, en tres sumandos.

En la descomposición, tales sumandos pueden ser, según convenga a los sujetos:

- decenas más unidades.
- complemento a la decena inmediata superior.
- quinquenas más unidades.
- unidades más quinquenas más decenas.
- complemento a la quinquena inmediata superior.

El trabajo de realización de operaciones con números decimales lo derivan a un tratamiento con números naturales, haciendo el ajuste del punto decimal cuando al final de la operación dan el resultado.

Es claro que deben existir más algoritmos de resolución, pues la experiencia de cada sujeto, sus necesidades y la imaginación particular de cada uno, debe ser fuente de otras posibilidades en los procesos aplicados a la resolución de las situaciones problémicas que cotidianamente se le presentan.

La experiencia, habilidad e ingenio del sujeto, en algunos procesos de resolución, nos permitió llegar a la obtención de algoritmos en los que se aprecia que algunos pasos no quedan apuntados; esto es, son implícitos. Suponemos que es una forma de simplificación que responde al principio de economía de esfuerzo.

De acuerdo con nuestros datos, ha sido frecuente el caso en que el sujeto tiene más habilidad para resolver problemas contextualizados que operaciones con datos abstractos; incluso se da el caso de quienes no pueden resolver esta última modalidad.

Todos los procedimientos observados son reducciones a conjuntos de operaciones que son más fáciles de operar en la mente de los sujetos, ya que la mayoría de ellos al no saber escribir proceden por acciones mentales no sustituidas en acciones escritas simbólicas convencionales.

Uno de nuestros propósitos es que los resultados de la investigación se lleven al aula escolar como laboratorio en el que se vea la posibilidad de aplicar los algoritmos observados. Creemos que son algoritmos que el sujeto desarrolla y que se van depurando y enriqueciendo con su experiencia, obligados por la necesidad de resolver transacciones que su espacio social le presenta. Es muy seguro que en otros contextos vuelvan a aparecer patrones similares o iguales, pues se aprecian como procedimientos mentales muy naturales.

Algunas referencias importantes

En el transcurso del desarrollo de la investigación hemos ido encontrando información referente a la misma temática que nos interesa, tanto en territorio nacional como en el extranjero. Así, por ejemplo, son relevantes las investigaciones que sobre el tema han realizado Alicia Ávila, en México (véase la Bibliografía), Terezinha Carrager, David Carrager y Analúcia Schileman, en Brasil, German Mariño, en Colombia, y otros más de los cuales no tenemos aún referencias suficientes.

En los resultados obtenidos por estos investigadores, en términos generales, se encuentran procedimientos similares a aquellos a los que nosotros hemos llegado y, claro, cada uno muestra al menos un algoritmo distinto al que evidentemente llegan por la aportación particular de algún sujeto de estudio especial dentro del conjunto de los sujetos estudiados. Un análisis de los resultados obtenidos por cada uno de ellos podría ser tema de un artículo especial, que bien lo amerita, dado el interés que por este tema se viene mostrando, desde al menos el inicio de la década de 1980 (véase Alicia Ávila, Bibliografía 3, pág. 57).

Bibliografía

1. **Milpa Alta**—Cuaderno de Información Básica Delegacional. INEGI. Cartografía Censal 1980. México, 1992.
2. **"Diagnóstico de habilidades computacionales y actividades para remediar errores"**, Alicia Ávila Storer. Revista *Educación Matemática,* Vol I, No. 1. Abril de 1989. Grupo Editorial Iberoamérica. Publicación cuatrimestral. México, D.F.
3. **"El saber matemático de los analfabetas. Origen y desarrollo de sus estrategias de cálculo"**, Alicia Ávila Storer. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos* (México) Vol. XX. No. 3.
4. **"El saber matemático extraescolar en los libros para la educación para adultos"**, Alicia Ávila Storer. Revista ***Educación Matemática.*** Vol. 5. No. 3. Diciembre, 1993. Grupo Editorial Iberoamérica. Publicación cuatrimestral. México, D.F.
5. **La cosmovisión del analfabeta.** "El caso del campesino semiproletario de Santa Ana Tlacotenco (una aproximación al problema", María Guadalupe Velázquez Guzmán. UPN—SEP. Colección *Cuadernos de Cultura Pedagógica.* Serie *Investigación Educativa No. 3.* México, D.F.
6. **En la vida diez, en la escuela cero.** Terezinha Carrager, *et al.* Editorial Siglo XXI. México, 1988.
7. **La enseñanza de la matemática con los adultos de los sectores populares (experiencia e investigación).** Memoria del seminario Experiencias e Investigaciones Innovadoras de la Enseñanza de las Matemáticas con Adultos de los Sectores Populares. Medellín, 1989. Véanse los artículos de Germán Mariño S. "Experiencia Educativa", "La Resta desde los Saberes Populares" y "Piaget y las posibles implicaciones teóricas de las estrategias matemáticas de los adultos populares".