La comprensión del álgebra y los números racionales

Introducción

En este trabajo se abordan algunos de los problemas que los alumnos del tercer grado de educación secundaria tienen para usar el lenguaje por excelencia de la matemática: el *algebraico*; el grado de comprensión que tienen de la equivalencia de los números racionales expresados en forma decimal o de fracción común, y la relación entre estas dos formas de expresión matemática.

El instrumento con el cual se realizó esta investigación es un cuestionario que consta de dos partes.

1. La que se refiere a la competencia en el uso del lenguaje algebraico.
2. La que se refiere al grado de comprensión de la equivalencia entre racionales comunes y racionales decimales.

La primera parte se elaboró con base en el Proyecto "Competencia en el uso del lenguaje algebraico", implementado a nivel nacional y a nivel estatal. En los dos proyectos participaron estudiantes de la Maestría en Educación Matemática y Computación Educativa, que con el apoyo del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav—IPN, la Secretaría de Educación Pública (SEP) y PNFAPM, se cursa en la Unidad de Matemática Educativa de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Se podía participar en los proyectos en cualquiera de las siguientes etapas o fases:

En la Fase de Diagnóstico, como diseñadores y como aplicadores de los instrumentos que se usaron en esta parte; como analistas, aplicando un tratamiento

J. Rubén Rosas Salgado
Universidad Autónoma del Estado de Morelos
México

estadístico y/o cualitativo a las primeras muestras obtenidas, auxiliando a quienes debieran seleccionar a la población experimental posterior, o ayudando a definir los perfiles de desempeño en el uso del álgebra a partir del diagnóstico.

En la Fase de Experimentación, como conductores de las entrevistas a la población seleccionada, tanto en ambiente de papel y lápiz , como en el ambiente computacional.

En la Fase Final, como auxiliares en el análisis de los resultados del diagnóstico final y de los protocolos de las entrevistas individuales, en función de los objetivos del proyecto; colaborando en la elaboración del reporte técnico de la investigación y de la versión final de los folletos que contendrán los materiales de instrucción del proyecto, así como en la redacción de artículos de investigación para profesores de matemáticas.

Se decidió participar en el proyecto precisamente en la fase del diagnóstico, y colaborar en la redacción de la primera versión del cuestionario a aplicar con dicho fin.

La segunda parte de este cuestionario se realizó considerando la experiencia docente, en la que se pudo apreciar la dificultad que los alumnos tienen para comprender la equivalencia de los números racionales, y cómo esta dificultad es un obstáculo para el posterior desarrollo de las necesarias habilidades para ser competente en el manejo del lenguaje matemático. Tal preocupación no es novedosa ya que existe literatura al respecto. Orton (1988) señala: "Las operaciones básicas con números racionales se enseñan (o se pretende que se aprendan), tanto en la primaria como en la secundaria, con no muy buenos resultados. Las razones podían ser —según quien esto escribió— que el análisis de los conceptos involucrados en las fracciones dista de ser simple, que los libros de texto empleados en secundaria están escritos para los alumnos más brillantes, que los programas de estudio tienen una dificultad y alcance sólo apropiada para una cuarta parte de los estudiantes comunes, o que no se toma en cuenta a los profesores de matemáticas para considerar lo que los alumnos pueden aprender.

Existe la idea de que hay conceptos matemáticos que aparentemente son sencillos y se incorporan a los programas de estudio sin ser manejados correctamente por la mayoría de los educandos. El problema es palpable desde 1970:

> "Ha sido en estos últimos años cuando hemos llegado a hacernos a la idea de que... conceptos aparentemente sencillos...sólo se adquieren poco a poco durante el periodo de la escolarización primaria. No se aprecia aún que una considerable minoría de los alumnos no pueden manejar estos conceptos ni siquiera después de estar en la escuela secundaria." **Fogelman (1970).**

El instrumento usado en la investigación

PRIMERA PARTE. Competencia en el uso del lenguaje algebraico

1. **Plantea la ecuación** que conduce a la solución de cada uno de los siguientes problemas. **No se requiere que des la solución.**

a) El doble de un número disminuido en 12 es igual a 26. ¿Cuál es ese número?

Ecuación: ______________________________

b) El triple de un número disminuido en 18 es igual a dicho número. ¿Cuál es dicho número?

Ecuación: ______________________________

En estas preguntas, que son del mismo tipo, se pide *traducir* al lenguaje algebraico una expresión verbal. Ambas requieren un tipo de respuesta abierta y pueden considerarse accesibles.

2. Si **E** es el *número de estudiantes* de una escuela y **P** es el *número de profesores* de la misma, **escribe un enunciado en español que describa la misma situación que la ecuación siguiente:**

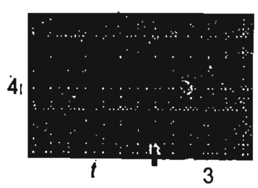
$$\mathbf{E = 7\,P}$$

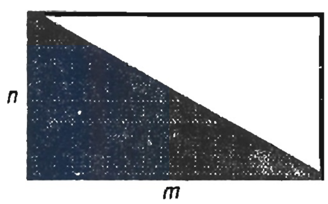
Enunciado: ______________________________

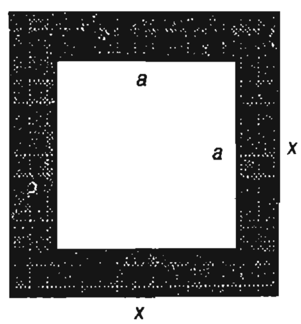
____

En esta pregunta se pide a los alumnos *traducir* al lenguaje verbal una ecuación de primer grado con dos variables. La respuesta a esta pregunta es de tipo abierto. Se considera una pregunta difícil, ya que los alumnos de secundaria no hacen suficientes ejercicios de traducción en esta forma.

3. Teniendo en cuenta las dimensiones especificadas en las figuras, **escribe una fórmula** para determinar el *área* de la parte sombreada de ellas.





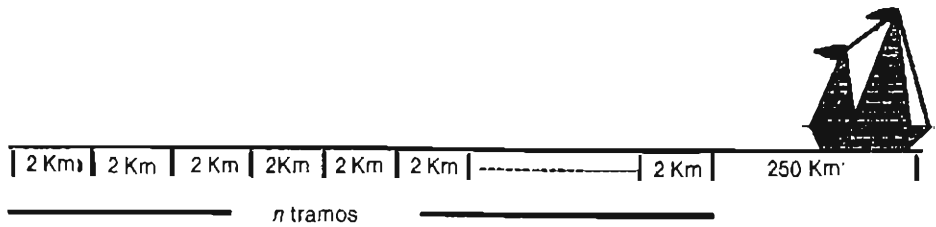


______________ ______________ ______________

La intención de esta pregunta es hallar una expresión algebraica (fórmula), que permita calcular el área de las regiones sombreadas en las figuras, teniendo en cuenta las dimensiones especificadas en forma numérica o literal (*interpretación*). Las respuestas son de tipo abierto. Se considera de menor dificultad a la pregunta 3(a), pues sólo se trata de saber la fórmula para obtener el área de un rectángulo, y luego sustituir las literales de dicha fórmula por las dimensiones especificadas;

no obstante, para expresar la multiplicación de un monomio por un binomio, en ejercicios en donde tradicionalmente sólo se multiplican términos numéricos, pudiera ser difícil para los alumnos. La pregunta 3(b) se considera de menor dificultad porque aunque no es la forma tradicional de presentar un triángulo, éste se reconoce fácilmente. La pregunta 3(c) se considera de mayor dificultad, ya que implica el conocimiento de la fórmula para evaluar el área de un cuadrado, reconocer que en la figura hay dos cuadrados cuyos lados están indicados con una literal diferente (como debe ser para cantidades distintas), y posteriormente restar del área del cuadrado mayor, el área del cuadrado menor a fin de hallar el área de la parte sombreada.

4. En una regata, cada velero debe recorrer una trayectoria de n boyas situadas cada 2 km. Esto se expresa como $2n$ kilómetros. Si además de esa distancia deben recorrer 250 km más, **¿cómo expresarías la distancia total recorrida por los veleros?**



Recorrió: ____________ *kilómetros*

En esta pregunta se trata de *traducir* del lenguaje verbal al lenguaje algebraico una situación supuestamente real, donde se involucra una generalización y una suma. La respuesta esperada es de tipo abierto. Se considera una pregunta de poca dificultad para los alumnos que dominen el lenguaje algebraico y la capacidad de generalización; en caso contrario las respuestas equivocadas pudieran ser sólo numéricas o de un solo término (los alumnos generalmente no aceptan que la respuesta pueda tener dos términos).

5. Se cuelgan diferentes *pesos* de un resorte y se mide el *alargamiento* (o estiramiento) correspondiente. Los datos tomados aparecen en la siguiente tabla:

Alargamiento (cm)	Peso (g)
3	78
6	156
9	234
12	312

Escribe una *ecuación* que te permita conocer el peso (P) si conoces el alargamiento (E).

Ecuación: ________________________

En esta pregunta el ejercicio consiste en obtener una expresión algebraica para la relación entre dos variables a partir de una tabla de datos numéricos (*interpretación*), donde claramente está representada una relación directamente proporcional. La respuesta que se espera es de tipo abierto. Esta pregunta tiene un cierto grado de dificultad, ya que se pide escribir una ecuación (encontrar lo que generalmente se da como dato), conociendo lo que comúnmente se pide como respuesta (la tabla anterior).

6. Hay pollos y conejos en un corral; si cuento las cabezas determino que hay 16, y si cuento las patas, encuentro que hay 52. **¿Cuántos pollos y cuántos conejos hay?**

R: ______________________________

En esta pregunta se pide resolver un problema de enunciado verbal simple que involucra dos ecuaciones de 1er. grado, con dos incógnitas. Este problema supone, desde el punto de vista algebraico, la necesidad de plantear un sistema de ecuaciones y resolverlo; aunque como no se hace específica esta situación, queda abierta la estrategia para abordarlo. La respuesta esperada es de tipo abierto. Se considera una pregunta difícil si se tiene que resolver con todos los pasos algebraicos, pero como el problema es fácilmente comprensible, se espera que las respuestas se obtengan mediante un método no algebraico (de ensayo y error, intuitivo, por tabulación de variables,...).

7. Se reparten 92 objetos entre dos personas: la primera recibe 3 veces el número de objetos que la segunda. Para encontrar el número de objetos que recibió cada UNA, **¿cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones utilizarías?**

a) $x + y = 92$ $y = x + 3$	b) $x + y = 92$ $x = 3y$	c) $x + 3y = 92$	d) $x = 3y$ $y = 3x$
a( )	b( )	c( )	d( )

Dado un problema que se resuelve por medio de un sistema de ecuaciones de 1er. grado con dos variables, se pide identificar el sistema de ecuaciones que lo resolvería correctamente, entre cuatro de ellos (*interpretación*). Esta pregunta es de opción múltiple, y para contestarla sólo es necesario elegir el sistema adecuado. Se considera una pregunta fácil, pues aunque se espera que interprete correctamente los datos para identificar al sistema correcto, lo más probable es que se elija alguna de las opciones al azar.

8. Recuerda que la longitud de la circunferencia de un círculo es "dos veces π por el radio", y que el área es "π por el radio al cuadrado".

a) ¿Cómo expresarías que son iguales el número de unidades de la circunferencia y el área de un círculo.

R: ______________________________

b) En tal caso, ¿cuánto mediría su radio?

a) 2π b) 2 c) 4π d) 4

Para resolver la pregunta 8(a), basta expresar en forma algebraica —dadas las fórmulas para obtener su valor numérico— la igualdad, en unidades, de una circunferencia con un círculo: $2\pi r = \pi r^2$, (interpretación). La respuesta esperada es de tipo abierto. Se considera una pregunta difícil para los alumnos de secundaria, pues se debe haber logrado una gran competencia en el uso del lenguaje algebraico para interpretar dos *fórmulas* como expresiones algebraicas simples, y además expresar la situación de que son equivalentes, cuando en la memoria de los alumnos se interpone la interpretación de que no es lo mismo unidades lineales que unidades cuadradas.

Para contestar a la pregunta 8(b) se necesita dar la medida del radio en el caso de que $2\pi r = \pi r^2 2$, que es la respuesta correcta a tal pregunta anterior, y de ahí, rema, es condición necesaria dar la respuesta correcta a tal pregunta, y de ahí, resolver la ecuación despejando r y encontrar su valor. Posteriormente se debe elegir una de las 4 opciones que corresponda a uno de los dos posibles valores para r en la ecuación resuelta antes. La respuesta que se espera es de tipo cerrado (opción múltiple). Se considera una pregunta difícil pues a la dificultad de resolver la ecuación de segundo grado implícita, se agrega el hecho de que es condición haber contestado correctamente a la pregunta 8(a), situación que la hace doblemente difícil.

9. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $2x + y = 1$
$x - 2y = 8$

b) $x = 1$
$y = x + 3$

$x =$
$y =$

$x =$
$y =$

En esta pregunta se pide resolver dos sistemas de ecuaciones lineales. Este problema supone el proceso de resolución de los sistemas aplicando cualquier método estudiado. Se esperan respuestas de tipo abierto y se consideran preguntas difíciles, pues los alumnos de tercer grado de secundaria, al final del curso, generalmente ya olvidaron los métodos que permiten resolver este tipo de sistemas[1].

SEGUNDA PARTE. Equivalencia entre racionales comunes y racionales decimales

En esta parte hay 4 preguntas:

La 10 da lugar a 4 respuestas para establecer la relación de equivalencia entre racionales comunes y racionales decimales.

[1] Estos métodos los estudiaron a mediados del segundo grado de secundaria.

La 11 da lugar a 2 respuestas para establecer la relación de equivalencia entre racionales comunes.

La 12 origina 3 respuestas para establecer la relación de orden entre racionales comunes.

La 13 origina una respuesta para resolver un problema verbal que involucra la equivalencia entre racionales comunes y decimales, así como también operaciones aritméticas entre racionales y enteros.

10. Escribe en el paréntesis de la izquierda, la letra que corresponda al número con el mismo valor.

(a) 1.5	(a $\frac{3}{2}$
( ) 0.8	b) $\frac{19}{4}$
( ) 5.6	c) $\frac{28}{5}$
( ) 16.0	d) $\frac{74}{3}$
( ) 24.666...	e) $\frac{4}{5}$

Se tiene la presunción de que los alumnos hicieran la operación aritmética necesaria para encontrar la equivalencia entre los números racionales enlistados. Se espera también que trabajen con los números de la columna derecha; en caso contrario resulta más difícil. Las respuestas son de tipo cerrado. Debe aclararse que en ambas columnas existe un número que no tiene equivalente en la columna contraria aunque pueden confundirse como tales.

11. Escribe otro número en forma de fracción que sea equivalente a los propuestos, pero con el denominador indicado:

$$\frac{2}{3} = \frac{\quad}{15} \qquad\qquad \frac{14}{4} = \frac{\quad}{22}$$

Se pide en esta pregunta encontrar una fracción perteneciente a la misma clase de equivalencia que los números propuestos; en el primer caso se da el origen de la clase de equivalencia, en el segundo de los casos, no. La respuesta esperada es de tipo abierto. Se considera una pregunta difícil, pues para encontrar la primera respuesta basta multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{5}{5}$, lo que se puede hacer sin dificultad, cosa que no ocurre para la segunda respuesta (22 no es múltiplo de 4).

12. De los números siguientes cruza el que sea de mayor valor, y encierra en un círculo el de menor valor:

$$\frac{1}{2} \qquad\qquad \frac{3}{4} \qquad\qquad \frac{7}{8}$$

En esta pregunta se espera que los alumnos comprendan que los números racionales propuestos no son el mismo número, además de que puedan determinar el orden entre ellos. La respuesta esperada es de tipo abierto. Se considera una pregunta difícil; debe estar muy claro en el conocimiento de los alumnos el lugar que ocupan estos números propuestos en una recta numérica, o transformarlos a sus equivalentes con un denominador común o bien usar fracciones decimales equivalentes a cada uno de ellos, y después compararlos en todas sus cifras para establecer el orden.

13. El precio de una licuadora para cocina es de **$150 000**[2], y en la tienda de un amigo la venden en $\frac{7}{8}$ de dicho precio. **¿De cuánto es el ahorro?**

R: ____________________

Este problema verbal es de aplicación; en este caso se trata de la equivalencia de racionales (¿a cuánto equivale $\frac{7}{8}$ o $\frac{1}{8}$ de $150 000[3]?). La respuesta esperada es de tipo abierto. Se considera una pregunta difícil, ya que implica comprender la equivalencia entre los racionales en forma de fracción común y los racionales decimales, aunado esto a la comprensión de la multiplicación entre una fracción y un entero.

IMPLEMENTACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

El Plan de trabajo en el cual se apoya esta investigación es:

1. Elaborar el instrumento de la investigación particular.
2. Anexar las preguntas elaboradas al cuestionario base, de acuerdo con el plan de actividades del proyecto "Competencia en el uso del lenguaje algebraico".
3. Resolución del cuestionario por aproximadamente 300 alumnos de tercer grado de secundaria, pertenecientes a la población estudiantil de la ciudad de Cuautla, Morelos.
4. Revisar los cuestionarios aplicados desde varios puntos de vista:
   Sólo aciertos.
   Tipos de errores.
   Estrategias de solución.
   La parte de álgebra separada de la parte de números racionales.
   Por grupos de escuelas diferentes.
5. Elaborar conclusiones de tipo estadístico.
6. Formular conclusiones de tipo cualitativo.

[2] En la fecha de la aplicación del cuestionario aún no se establecían como moneda oficial los Nuevos Pesos ("N$").
[3] Ídem.

7. Elaborar algunas propuestas de solución para los problemas encontrados.
8. Redactar algunas conclusiones generales.
9. Elegir un marco teórico que fundamente los resultados.

Después de la elaboración del cuestionario, se aplicó el mismo en la segunda quincena del mes de junio de 1992, en la ciudad de Cuautla, Morelos. Participaron alumnos de tercer grado de secundaria de escuelas oficiales, tanto del turno matutino como del vespertino.

Grupo	Grupo	Secundaria	Turno	Alumnos
1	3o. E	Fed. "Cuautli", No. 3	M	43
2	3o. B	Fed. "Cuautli", No. 3	M	49
3	3o. G,H,I	Fed. "Cuitláhuac", No. 2	V	52
4	3o. B	Fed. "Cuitláhuac", No. 2	M	49
5	3o. F	Fed. "Cuautli", No. 3	M	37
6	3o. D	Fed. "Cuitláhuac", No. 2	M	36
7	3o. F	Fed. "A. Caso", No. 1	M	28
			TOTAL	294

La población estudiantil de las escuelas secundarias donde se aplicó el cuestionario es semiurbana.

Resultados

Primera parte: Competencia en el uso del lenguaje algebraico

La primera actividad fue hacer un resumen de todas las respuestas dadas, indicando la frecuencia de cada una respecto a cada pregunta. La primera impresión de este resumen fue el de un mundo de variaciones sin sentido y, en su mayoría, de respuestas erróneas.

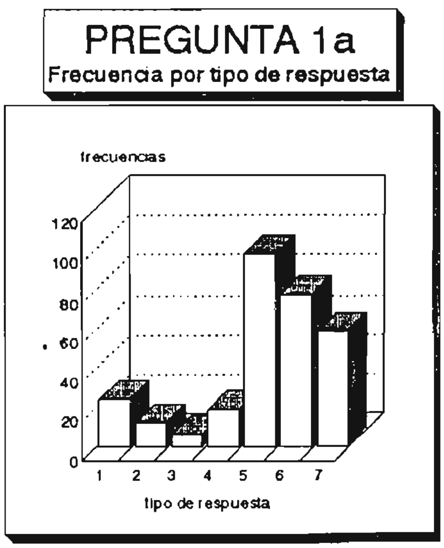
Para la clasificación de las respuestas se optó por determinar para cada pregunta una clasificación, *tomando en cuenta todas las respuestas obtenidas de los encuestados*. Esta clasificación pudo ser hecha desde distintos puntos de vista: errores y aciertos, métodos de resolución, cantidad de frecuencias, con procedimiento escrito y su análisis, sin procedimiento escrito, aritmético o algebraico, ligado o no al contexto, etc. Al final se decidió clasificar sólo las respuestas erróneas, ya que las respuestas correctas fueron muy pocas, fijando la atención en el uso incorrecto del lenguaje algebraico, y según el tipo de pregunta de la que se tratara. Esto representó mayor trabajo pero se puede estar razonablemente seguros de haber hecho una clasificación basada en los resultados reales.

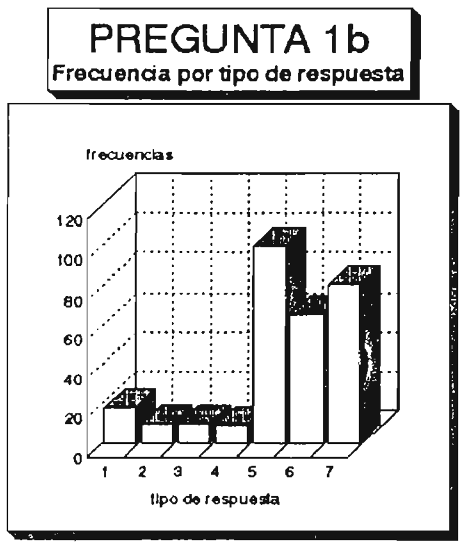
En este resumen sólo se incluye la clasificación de respuestas de las preguntas 1(a), 1(b) y 2.

Para las preguntas 1(a) y 1(b), la clasificación de respuestas que se usó, es:

Tipo de respuesta	(Descripción
1	Correcta
2	Uso de exponentes para indicar la suma de términos semejantes.
3	Uso inadecuado de paréntesis.
4	Uso inadecuado del signo igual (=).
5	Respuesta numérica. (Trató de resolver el problema en lugar de escribir sólo la ecuación, como se pide.)
6	Fuera de contexto. (Respuesta sin relación con la pregunta.)
7	No contestó.

Con las frecuencias por tipo de respuesta se elaboraron las siguientes gráficas:



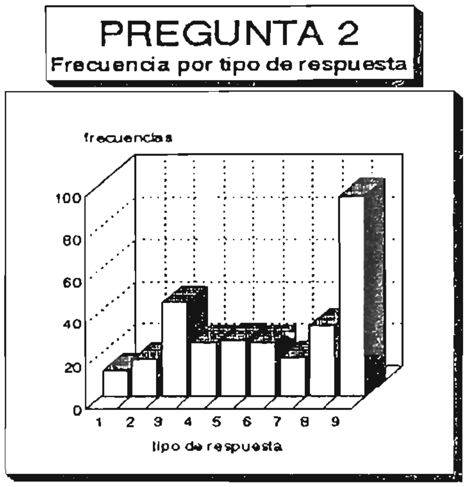


Para la pregunta 2, la clasificación de respuestas que se usó, es:

Tipo de respuesta	Descripción
1	Respuesta correcta.
2	Uso de letras: E, P.
3	Transcripción idéntica del enunciado.
4	Transcripción con algunas variantes del enunciado.

Tipo de respuesta	Descripción
5	"Los estudiantes tienen 7 profesores".
6	"Estudiantes igual a profesores".
7	"El número de estudiantes es igual a 7 profesores".
8	Fuera de contexto.
9	No contestó.

Con las frecuencias por tipo de respuesta se elaboró la siguiente gráfica:



Es interesante observar las frecuencias de aciertos por pregunta y el promedio de éstas. A continuación se encuentra una tabla con dichos datos.

Frecuencia de aciertos por pregunta

Pregunta	Acierto	Porcentaje
2(a)	24	8.16
1(b)	18	6.12
2	12	4.08
3(a)	9	3.06
3(b)	27	9.18
3(c)	15	5.1
4	8	2.72
5	17	5.78
6	96	32.65
7	83	28.23
8(a)	5	1.7
8(b)	26	8.84

Pregunta	Acierto	Porcentaje
9(a)	0	0.0
9(b)	32	10.88
	372	100

SEGUNDA PARTE: Comprensión entre la equivalencia de los números racionales

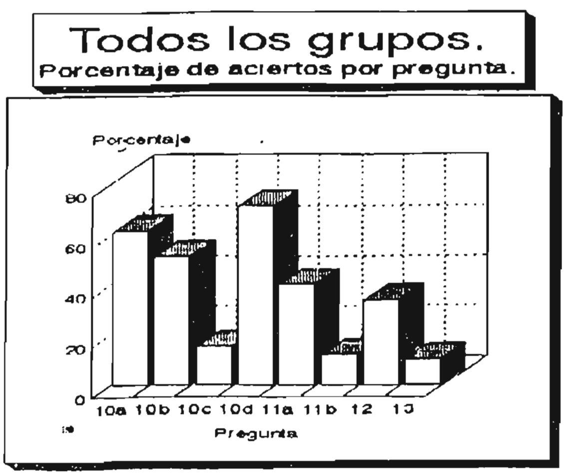
Después de revisar las preguntas de esta parte [10(a), 10(b), 10(c), 10(d), 11(a), 11(b), 12(a), 12(b), 12(c), 13], se puede anotar que a pesar de que sólo las preguntas 10(a), 10(b), 10(c) y 10(d), son de respuesta cerrada, todas se pueden calificar con el criterio de acierto o error.

A manera de resumen se presenta la tabla siguiente:

Aciertos por pregunta

Grupo	10(a)	10(b)	10(c)	10(d)	11(a)	11(b)	12	13
1	33	26	4	37	16	2	14	6
2	27	25	11	27	17	5	16	3
3	26	31	7	42	17	2	16	3
4	31	19	11	32	22	8	17	6
5	24	19	6	29	17	7	11	4
6	26	19	6	24	15	9	15	3
7	14	11	0	18	14	2	10	5
Sumas	181	150	45	209	118	35	99	30
•%	61.56	51.02	15.3	71.08	40.13	11.9	33.67	10.2

Para dar una visión más clara, la gráfica siguiente está hecha con porcentaje de aciertos por pregunta, de todos los grupos.



Comparación de los resultados entre la primera y segunda parte

Considerando que, en promedio, 9.04%, de los alumnos encuestados poseen alguna Competencia en el uso del Lenguaje Algebraico y que se acepta que sólo el 12.46% de los mismos comprende la equivalencia de los Números Racionales, entonces es en esta población con quienes se puede hacer la comparación de resultados entre las dos partes de este trabajo, se concluyó que de hecho existen sólo 4 posibilidades, a saber:

Tipo	Competencia en el uso del Lenguaje Algebraico	Comprensión de la equivalencia de Números Racionales
1	Baja	Baja
2	Alta	Alta
3	Alta	Baja
4	Baja	Alta

Considerándose de Baja Comprensión de la Equivalencia de Números Racionales, a los alumnos que lograron entre 0 y 5 aciertos en dicha parte del cuestionario. Se considera Alta Comprensión de tal equivalencia a los alumnos que lograron entre 0 y la totalidad de aciertos en esta parte del cuestionario.

A manera de resumen se proporciona la siguiente tabla:

Comparación entre la Competencia en el uso del Lenguaje Algebraico y la Comprensión de Números Racionales

Tipo	Gpo. 1	Gpo. 2	Gpo. 3	Gpo. 4	Gpo. 5	Gpo. 6	Gpo. 7	Sumas	%
1	29	38	41	32	28	22	19	209	71.09
2	2	3	2	6	2	3	1	19	6.46
3	0	0	0	0	0	0	1	1	0.34
4	12	8	9	11	7	11	7	65	22.11
	43	49	52	49	37	36	28	294	100

Conclusiones

Las conclusiones anotadas están organizadas en tres partes:

a) Las que corresponden a la investigación sobre la competencia en el uso del lenguaje algebraico.

b) Las que tienen que ver con la investigación sobre comprensión de la equivalencia entre números racionales comunes y racionales decimales.

c) Sobre la comparación entre los resultados de las dos partes anteriores.

Sobre la competencia en el uso del lenguaje algebraico

La de menor dificultad y la de mayor dificultad de las preguntas se refieren a sistemas de ecuaciones, sólo que la más fácil fue resuelta sin usar álgebra, y la más difícil no pudieron resolverla por no saber usar los algoritmos algebraicos necesarios, la dificultad pues, radica en el uso del lenguaje algebraico.

Como se pudo ver en la tabla correspondiente, el promedio de respuestas acertadas de todo el cuestionario es del 9.04%.

Respecto a la relación entre las preguntas 8(a) y 8(b), se dice que la 8(b) resultó con mayor porcentaje de aciertos, lo cual comprueba la forma azarosa de contestar.

De las otras dos respuestas similares, 1(a) y 1(b), la 1(b) resultó con menor número de aciertos y pudiera ser por la parte a traducir que dice: "es igual a ese número"; o que no supieran cuál es "ese número"; si es el número que está multiplicado por 3 o el 18.

Es importante hacer notar también la frecuencia por pregunta que los alumnos no contestaron; esto fue acumulado en un 35.03% del total de las respuestas.

Sobre la comprensión de la equivalencia de números racionales

Los alumnos que comprenden perfectamente la equivalencia de los números racionales y saben aplicar ese conocimiento, son los que contestaron correctamente a las preguntas 13, 11(b) y 10(c). En este cuestionario se encontró que sólo el 12.46% de dichos alumnos presentan esta característica.

Las preguntas más fáciles son: 10(d) con 71% de aciertos; la 10(a) con 61.5%, y la 10(b) con 51%. Otro modo de decirlo es: Casi tres cuartas partes de los alumnos pueden reconocer cuándo una fracción decimal se obtuvo a partir de una fracción común con denominador 3 (fracciones decimales periódicas 0.666666... o bien 0.33333...). Más de la mitad de los alumnos pueden reconocer cuándo una fracción decimal se obtuvo a partir de una fracción común con denominador 5, sean propias o impropias (fracciones decimales 0.2, 0.4, 0.6 y 0.8).

Sobre la comparación entre competencia en el uso del Lenguaje Algebraico con la comprensión de la Equivalencia de Números Racionales

Sólo se puede opinar acerca del 28.91% de la población pues el resto de ésta (71.09%), se encontró con Baja Competencia en el Uso del Lenguaje Algebraico, y Baja Comprensión de la Equivalencia de Números Racionales.

De toda la población encuestada resultó con Alta Comprensión de la Equivalencia de Números Racionales el 28.57%, (Tipo 2 + Tipo 4).

De toda la población encuestada resultó con Alta Competencia en el Uso del Lenguaje Algebraico, el 6.8% (Tipo 2 + Tipo 3).

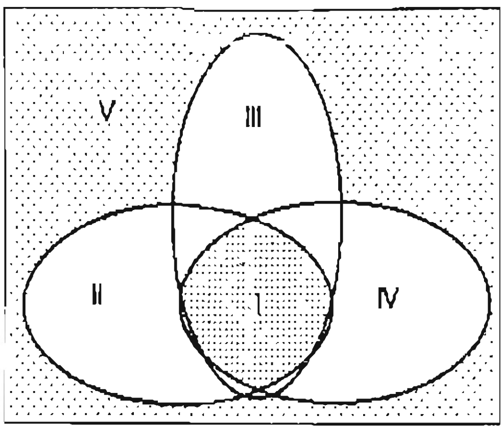
Sólo un alumno presentó la característica de ser competente en el uso del Lenguaje Algebraico y no comprender la Equivalencia de Números Racionales (el 0.34%; Tipo 3).

PUDIERA SER QUE LA COMPRENSIÓN DE LA EQUIVALENCIA ENTRE NÚMEROS RACIONALES SEA UNA CONDICIÓN NECESARIA PARA LA COMPETENCIA EN EL USO DEL LENGUAJE ALGEBRAICO, aunque no la ÚNICA.

Los alumnos que sólo son capaces de comprender la equivalencia de números racionales, son quienes se encuentran en el estadio anterior al de ser competentes en el uso del lenguaje algebraico.

Estas conclusiones se hacen con base en que prácticamente NINGÚN alumno con alta competencia en el uso del lenguaje algebraico deja de comprender la equivalencia de los números racionales.

De ninguna manera puede asegurarse que la capacidad de comprender la equivalencia de los números racionales sea la ÚNICA condición para lograr la competencia en el uso del lenguaje algebraico.



I Competentes en el uso del lenguaje algebraico
II Capaces de comprender la equivalencia entre racionales.
III y IV Otras capacidades. V Resto de la población participante.

Estas conclusiones tienen validez dentro de los límites de esta investigación. No es posible que se pudieran generalizar a menos que se repitiera el experimento tantas veces y en diferentes contextos como para poder hacerlo.

Tanto el instrumento empleado en la investigación sobre "Competencia en el uso del lenguaje algebraico", como el utilizado en la investigación sobre "Comprensión de la equivalencia entre racionales comunes y racionales decimales", la metodología, la instrumentación, el tratamiento de los resultados y las conclusiones poseen limitaciones propias de una investigación con pocos recursos en tiempo y realizada en forma individual. Se presenta a los colegas para que la utilice quien se interese en los resultados y su comprobación en otros ambientes regionales o de otra índole, así como para su crítica constructiva.

Bibliografía

Adda, J. (1982) *"Difficulties with mathematical symbolism: Synonymy and homonymy"*; Visible Language; Vol. XVI, No. 3, Summer 1982.

Booth, L. R. (1984) *"Álgebra: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics projets"*; NFER-NELSON 1984.

Centeno Pérez, J. (1988) *"Números decimales: ¿por qué?, ¿para qué?"* Colección: Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Editorial Síntesis. Madrid, España, 1988.

Fogelman, K.R. (1970) *Piagetian tests for the primary school.* Windsor; NFER (citado por Orton, 1990).

Godino, J. D. (1988) "Hacia una teoría de la didáctica de la matemática", Cap. III del libro *Área de conocimiento.* Didáctica de la Matemática. Editorial Síntesis. Madrid, España, 1988.

Goldin, G. A. (1982) *Mathematical language and problem solving"*; Visible Language; Vol. XVI, No. 3, Summer 1982.

Gómez Alfonso, B. (1991) "Las matemáticas y el proceso educativo"; Cap. II del libro *Área de conocimiento. Didáctica de la matemática".* Editorial Síntesis. Madrid, España 1991.

Gutiérrez Rodríguez, A. (1991) *"La investigación en didáctica de las matemáticas"* Cap. III del libro *"Área de conocimiento. Didáctica de la matemática.* Editorial Síntesis. Madrid, España, 1991.

Guzmán Hernández, J. (1992) *Competencia Algebraica.* Memorias de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México, julio de 1992.

Kieran, C. *The learning of álgebra: A teaching experiment.* U.S. Department of Education, Educational Resourses Information Center, Washington, D.C.

Orton, A. (1990) *Learning mathematics. Issues, theory and classroom practice.* Cassell, Londres, 1988. Traducción: "Didáctica de las matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula". Ministerio de Educación y Ciencia. Ediciones Morata, S.A., Madrid, España, 1990.

Pimm, D. *El lenguaje matemático en el aula.* Ministerio de Educación y Ciencia. Ediciones Morata, S.A., Madrid, España.

Rojano Ceballos, T. (1991) *Proyecto: Competencia en el uso del lenguaje algebraico*, Estudio longitudinal de experimentación educativa. PNFAPM-CINVESTAV. México, 1991.

Thorpe, J. A. (1989) "Álgebra: Qué deberíamos enseñar y cómo debiéramos enseñarlo", en *Research issues in the learning and teaching of álgebra*, Volumen 4, National Council of Teachers of Mathematics. 1989.

Vega Villanueva, E. (1992) *Proyecto: Competencia en el uso del lenguaje algebraico*, U.A.E.M., Cuernavaca, Mor., México, 1992.