Estudio de las construcciones del pentágono equiángulo

Parte 2. CONSTRUCCIONES INEXACTAS

Introducción

Como dejamos explícito en la Parte 1 de este trabajo, ya publicada por **Educación Matemática,** nos proponemos investigar ahora aquellas construcciones pentagonales, que a pesar de su inexactitud, constituyen modelos frecuentemente usados en los últimos cursos de la Enseñanza Primaria y en el Bachillerato, en unos casos, o métodos constructivos poco conocidos para la generalidad de los alumnos de referencia, en otros. Estudiaremos en los diversos apartados que comparecerán, el orden del error cometido en la construcción, con respecto al pentágono equiángulo.

Al realizar las demostraciones correspondientes nos basaremos en las relaciones

$$d/l = \phi, \qquad l/r = (3 - \phi)^{1/2} \qquad \text{y} \qquad h/l = (4\phi^2 - 1)^{1/2}/2$$

donde d, r, h y l representan la diagonal, el radio, la altura y el lado de un pentágono regular arbitrario, y $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ el Número de Oro (o Áureo) [3].

A continuación presentamos un listado tanto de las construcciones exactas estudiadas en la primera parte del presente trabajo, como las que serán tratadas en esta segunda.

José Ángel Dorta Díaz
Departamento de Análisis Matemático
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA (Tenerife)
Islas Canarias, España

Índice de Métodos

2. Construcciones aproximadas del pentágono regular.

2.1 Método de Alberto Durero

Construir un pentágono dado su lado l

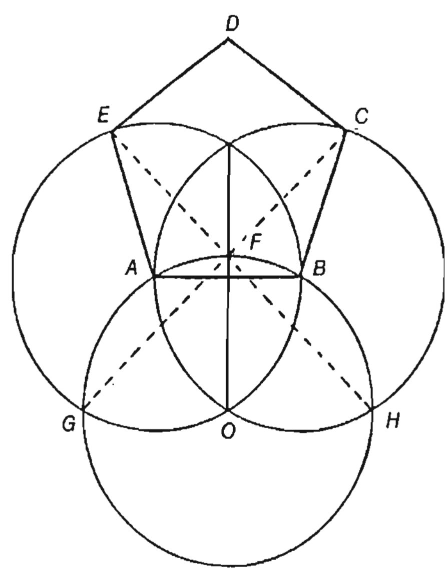


Figura 13

Descripción del método

En la Figura 13 puede verse que el método consiste en el trazo de tres circunferencias de radio l, las dos primeras centradas en los extremos A y B del segmento dado, y la tercera en la intersección, O, de las anteriores; F será el punto de intersección de esta tercera circunferencia con la mediatriz de $\overline{AB}$. La prolongación de $\overline{HF}$ corta a la circunferencia centrada en A en el que será vértice, E, del pentágono, y la prolongación de $\overline{GF}$ corta a la centrada en B, en el punto C, cuarto vértice de nuestra figura. Por último, el vértice D se determina haciendo centro en los puntos E y C, y con radio l.

Esta construcción se denomina *Pentágono de Alberto Durero* y aparece por primera vez en la obra de este autor titulada:

Instrucciones sobre la medida con regla y compás

publicada en el año de 1525.

Inexactitud del método y aproximaciones

Fue Clavius[1] quien en 1604 y en su obra *Geometría Práctica* demostró que este pentágono no es equiángulo. Este autor llegó a la conclusión de que los ángulos del mismo toman los valores siguientes:

$$A = B = 108°22'1''$$
$$E = C = 107°2'8''$$
$$D = 109°11'42''$$

Por otra parte, y como quiera que el número áureo ϕ es igual a $2 \cos 36°$, podremos escribir: $\phi = 2 \cos 108°/3 = 1.618033...$, donde 108° es el ángulo del pentágono regular expresado en el sistema sexagesimal.

En el pentágono de Alberto Durero se verificará que para cada uno de los ángulos $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ existirá una aproximación a ϕ:

$$\phi_A = \phi_B = 2 \cos = \frac{\measuredangle A}{3} = 1.615520.... \neq \phi$$

Para el resto de los ángulos:

$$\phi_C = \phi_E = 2 \cos \frac{\measuredangle C}{3} = 1.624604... \neq \phi.$$

$$\phi_D = 2 \cos \frac{\measuredangle D}{3} = 1.609822... \neq \phi$$

[1] Cristophorus Clavius (1537-1612). Matemático y jesuita alemán. Se le llamó "el Euclides del siglo XVI". Posee una versión libre de los *Elementos* de Euclides, publicada en Francfort en 1547, pero bastante ajustada al espíritu del texto original. El papa Gregorio XIII requirió sus servicios para la reforma del calendario.

2.2 Método del trapezoide bisósceles

Construir un pentágono dado el lado $\overline{AB} \equiv l$

Descripción del método

Por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ se traza una perpendicular al mismo de longitud $3l/2$, obteniéndose el punto F. Luego se prolongan $\overline{FA}$ y $\overline{FB}$, y haciendo centro en A y B, respectivamente, y con radio l, se determinan los puntos C y E, con lo que D también quedará fijado.

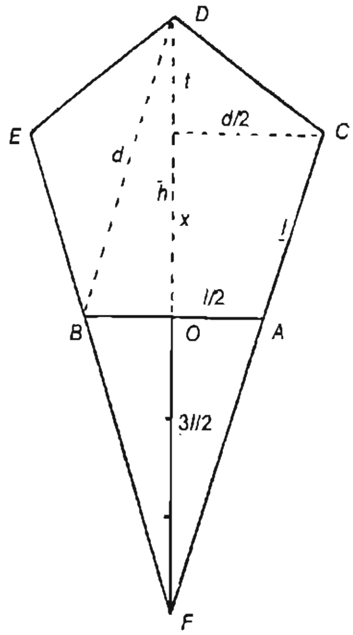


Figura 14

Inexactitud del método y aproximaciones

En primer lugar veamos que en un pentágono regular siempre se verifica que

$$h = \frac{3}{2} l + 0.03884... (l)$$

donde h es la perpendicular trazada desde cualquier vértice a su lado opuesto. Si observamos la Fig. 14, y suponemos que $ABCED$ es regular, podemos escribir

$$h = \frac{l}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{3.077683...}{2}(l) = \frac{3}{2}(l) + 0.03884... l)$$

(Se ha tenido en cuenta que $h = \left(\sqrt{4d^2 - l^2}\right) : 2$, y que $d = \phi l$).

Por otra parte, en la figura construida con este procedimiento se tiene que $\overline{FC} = (1 + \sqrt{10}/2)l$, y por semejanza de triángulos se determinan los valores de x y t, de donde se concluye que

$$h = x + t = 1.6848124... (l) = \frac{3}{2} l + 0.1848124.... (l)$$

Así pues, en este pentágono la altura correspondiente al lado AB vale aproximadamente una décima y media de l, o sea $(0.14597\ldots(l))$ de más, que la del pentágono regular; de ahí la inexactitud del método, la cual podría deducirse también, teniendo en cuenta que en este pentágono se tiene que

$$\frac{d}{l} = \frac{2(1+\sqrt{10}/2)}{\sqrt{10}} = 1.63245553\ldots. \neq \phi = 1.618033988\ldots.$$

Conviene observar que para el *trapezoide bisósceles* que hemos construido en este apartado, se tiene que $\overline{OF} = \frac{3}{2}l \neq \overline{OD} = h$ (se tiene que h es aproximadamente 2 décimas de l mayor que $\overline{OF}$), lo que permite afirmar que no es áureo; se define como *trapezoide bisósceles áureo*, aquel en el que la razón entre su lado mayor y su diagonal menor es el número áureo, cosa que no se verifica aquí, puesto que

$$\overline{CF} : \overline{CE} = \sqrt{10} : 2 = 1.5811388\ldots \neq \phi$$

2.3 Método de construcción de Leonardo de Vinci

Construir un pentágono dado el lado $\overline{AB} \equiv l$ y su circunferencia circunscrita.

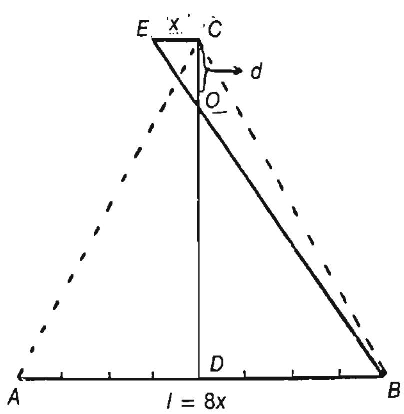


Figura 15

Descripción del método

En primer lugar se construye un triángulo equilátero, ABC, de lado l, y se traza la altura correspondiente a $\overline{AB}$ (Fig. 15). El segmento $\overline{AB}$ se divide en ocho partes iguales: $\overline{AB} \equiv l = 8x$ (x es la longitud de cada una de las partes). Seguidamente se traza por C un segmento paralelo a $\overline{AB}$, o sea $\overline{CE}$, de longitud x. La intersección O de $\overline{BE}$ con $\overline{CD}$ (D es el punto medio de $\overline{AB}$) será el centro de la circunferencia circunscrita al pentágono, que de esta manera quedará determinado.

A continuación demostraremos que tal polígono, aparecido en los manuscritos de Leonardo, a pesar de ser una buena aproximación al equiángulo, no es exacto.

Inexactitud del método

En primer lugar se demuestra que la altura del triángulo rectángulo en función de x es igual a $4\sqrt{3x}$, de donde $\overline{OD} = 4\sqrt{3x} - \overline{OC} = 4\sqrt{3x} - d$.

Por la semejanza de los triángulos ODB y OCE se obtiene:

$$d = \frac{4\sqrt{3}x}{5},$$

y de ahí

$$\overline{OD} = \frac{16\sqrt{3}x}{5},$$

por lo que estamos en condiciones de conocer el valor del radio, $OB \equiv r$, del pentágono así construido, en función de x y, en consecuencia, en función de l. Por todo ello podemos concluir que

$$\frac{r}{l} = \frac{\frac{4}{5}\sqrt{73}x}{8x} = \frac{\sqrt{73}}{10} = 0.85440037...$$

Por otra parte, sabemos que en un pentágono regular se verifica que

$$\frac{R}{l} = \frac{1}{\sqrt{3-\phi}} = 0.85065080..., \tag{2.1}$$

donde R es el radio del pentágono regular; dividiendo las dos igualdades anteriores resulta

$$\frac{r}{R} = 1.004407883...,$$

y, por consiguiente,

$$r = R + 0.004407883...\ (R),$$

por lo que el radio r del pentágono del método de Leonardo tiene aproximadamente *4 milésimas de R* de más, que el radio del pentágono equiángulo. (Nótese que si se dibujase en un papel tipo folio un pentágono utilizando este método, la inexactitud sería despreciable; no ocurriría lo mismo si se trata de construir un pentágono de, por ejemplo, un kilómetro de lado, puesto que ahora el error sería del orden de algunos metros).

Para que el pentágono de Leonardo —de un cierto lado dado l— fuera regular, tendríamos que restarle a su radio r la cantidad de más que hemos evaluado anteriormente. En consecuencia O (Fig. 15) tendría que estar situado unas milésimas más abajo, con lo que $\overline{EC} \equiv x$ tendría que ser unas milésimas más grande, por lo que se deduce que Leonardo da Vinci tendría que haber dividido a l, no en ocho partes, sino en aproximadamente 7,99 partes, cosa nada fácil; de ahí que optara —y es suposición nuestra— por la solución indicada.

Recuérdese que la distancia desde el vértice superior hasta el centro de la circunferencia circunscrita al Pentágono de Leonardo, O, era

$$d = \frac{4\sqrt{3}x}{5} = \frac{\sqrt{3}}{10} l = 0.1732050\ldots (l) ,$$

Se demostrará en apartados posteriores que

(1) Una mejor aproximación se obtiene si

$$d = \frac{8}{45} l = 0.177777777\ldots (l)$$

(2) Si $d = 0.17783445\ldots (l)$ el pentágono obtenido es regular.

2.4 Método de inscripción de Leonardo da Vinci

Inscribir un pentágono en una circunferencia de radio r.

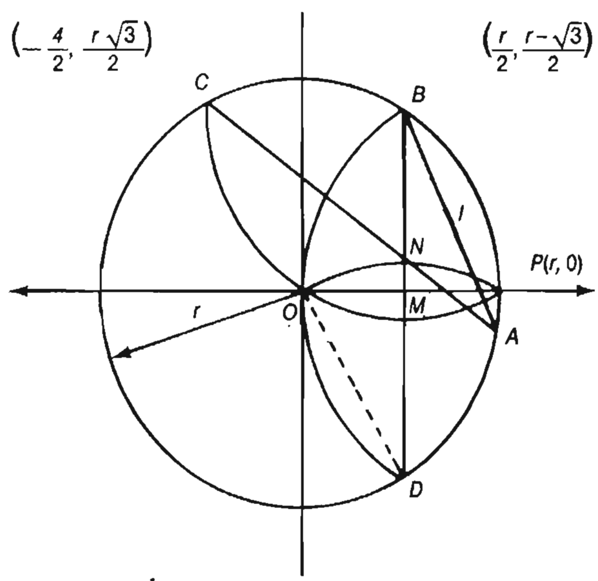


Figura 16

Descripción del método

Haciendo centro en P, punto arbitrario de la circunferencia dada, y con radio r se determinan los puntos sobre la misma B y D. Igualmente, con centro en D y radio r se traza el arco OP, y así determinamos N (intersección del arco con $\overline{DB}$). Por último, haciendo centro en B y con radio r encontramos C. Uniendo C con N y prolongando, se determina sobre la circunferencia el punto A; AB será el lado l del pentágono inscrito.

Inexactitud del método

Centremos la circunferencia dada en un sistema referencial cartesiano, de manera que el punto arbitrario P tenga coordenadas $(r, 0)$ (Fig. 16).

No es difícil deducir que

$$\overline{BD} = r\sqrt{3}$$
$$\overline{BN} = \overline{BD} - \overline{DN} = r(\sqrt{3} - 1)$$
$$\overline{MN} = \overline{BM} - \overline{BN} = (2 - \sqrt{3})r/2$$

Las coordenadas del punto N son $(r/2, (2 - \sqrt{3})r/2)$; las de B y C son, respectivamente, $(r/2, r\sqrt{3}/2)$ y $(-r/2, r\sqrt{3}/2)$.

Para encontrar las coordenadas de A se evalúa la intersección considerando la ecuación de la recta que pasa por los puntos C y N, y la de la circunferencia original; la ecuación de la recta es

$$\frac{y - (2 - \sqrt{3})r/2}{r\sqrt{3/2} - (2 - \sqrt{3})r/2} = \frac{x - r/2}{-r/2 - r/2} \Rightarrow 2(\sqrt{3} - 1)x + 2y - r = 0$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 2(\sqrt{3} - 1)x + 2y - r = 0 \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

se obtiene

$$4(5 - 2\sqrt{3})x^2 - 4(\sqrt{3} - 1)rx - 3r^2 = 0,$$

de donde

$$x = \frac{r[\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{19 - 8\sqrt{3}}]}{10 - 4\sqrt{3}} = \Rightarrow 1 \begin{cases} x_1 = 0.97662710\ldots (r) \\ x_2 = -0.5\, r \end{cases}$$

y por tanto

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -0.21494070\ldots (r) \\ x_2 = 0.86602540\ldots (r) = r\sqrt{2}/2 \end{cases}$$

Se concluye que las coordenadas del punto A buscado son:

$$A(0.97662710\ldots (r), -0.21494070\ldots (r).$$

Por otra parte, la distancia entre los puntos A y B será

$$l \equiv d(A,\, B) = \sqrt{[r/2 - 0.97662710\ldots\,(r)]^2 + [r\sqrt{3}/2 + 0.21494070\ldots\,(r)]^2}$$

Luego podemos escribir que

$$l = 1.18138101\ldots\,(r) \Rightarrow \frac{r}{l} = 0.84646696\ldots$$

Como se sabe, en un pentágono regular se verifica que

$$\frac{R}{l} = 0.85065080\ldots,$$

mientras que para el pentágono inscrito de Leonardo da Vinci hemos encontrado

$$\frac{r}{l} = 0.8464696\ldots$$

Si dividimos ambas igualdades resulta

$$\frac{R}{r} = 1.00494270\ldots,$$

de donde se deduce:

$$r = 0.99508160\ldots\,(R) = (1 - 0.00491839\ldots)\,(R) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = R - 0.00491839\ldots\,(R),$$

lo que indica que el radio del pentágono construido en la Figura 16 tiene aproximadamente *5 milésimas de R* menos que el propio R (radio del pentágono regular).

Para finalizar este apartado, digamos que Leonardo afirma que *el arco PA de la circunferencia dada es la trigésima parte de la misma.* Igualmente hemos investigado este punto realizando el siguiente razonamiento: Si dividimos la circunferencia en 30 partes (360° : 30 = 12°) el ángulo central correspondiente al arco resultante expresado en radianes será $\pi/15$. Recordando que "girar" con una amplitud β un número complejo (elemento de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$), respecto del origen, equivale a multiplicarlo por otro de módulo 1 y argumento β ($e^{i\beta} \equiv \cos\beta + i\,\mathrm{sen}\beta \equiv (\cos\beta,\, \mathrm{sen}\beta)$), si tomamos el punto $P(r, 0)$ de la circunferencia y lo multiplicamos por $e^{i\pi/15} \equiv (\cos \pi/15,\, -\mathrm{sen}\ \pi/15)$, es decir:

$$(r,\, 0) \cdot (\cos \pi/15,\, -\mathrm{sen}\ \pi/15),$$

obtendremos el punto A', que será el resultado, de haber girado −12° el punto P, respecto del origen. Así pues, el arco PA' será exactamente la trigésima parte de la circunferencia, y las coordenadas de A' se obtienen efectuando el producto anterior:

$$A\ [0.9781476\ldots\,(r),\, -0.2079116\ldots\,(r)]$$

Comparando este resultado con el que hemos deducido anteriormente debido a la construcción de Leonardo:

$$A\ (0.97662710\ldots\ (r),\ -0.21494070\ldots\ (r).$$

llegamos a la conclusión que los errores cometidos en la afirmación de referencia son del orden de milésimos; concretamente:

A' tiene de abscisa 0.0015205... (r) más que A
A' tiene de ordenada 0.0070291... (r) menos que A.

Todo ello permite afirmar que el arco PA' que divide a la circunferencia en exactamente 30 partes, tiene una longitud "algo" menor que la del arco PA. (Obviamente el hecho de que el error sea despreciable o no, dependerá del valor de r.

2.5 MÉTODO DE LA SUCESIÓN

Dado un segmento $\overline{AB}$, construir un pentágono de lado $l \equiv \overline{AB}$, y su circunferencia circunscrita.

Este método *original* está basado en ciertas construcciones de nuestra figura, realmente inexactas, y que se utilizan en el Dibujo Técnico, tanto en la E.G.B. como en el bachillerato (en España). La idea básica del mismo consiste en construir una sucesión de pentágonos equiláteros tal que su límite, o algún término (pentágono) avanzado del mismo se aproxime, con errores menores que los de los pentágonos de los apartados anteriores, al equiángulo.

Primera descripción

Tal como se observa en la Figura 17 se construye el triángulo equilátero ABC de lado l y se traza la altura correspondiente a $\overline{AB}$. A partir del vértice superior C se determina el punto O_1 tal que $\overline{CO_1} = \frac{1}{5}\,l$, *(una quinta parte de l)*. $\overline{BO_1} = r_1$ será el radio del pentágono equilátero P_1 de la futura sucesión, y en consecuencia O_1 el centro de la circunferencia circunscrita al mismo.

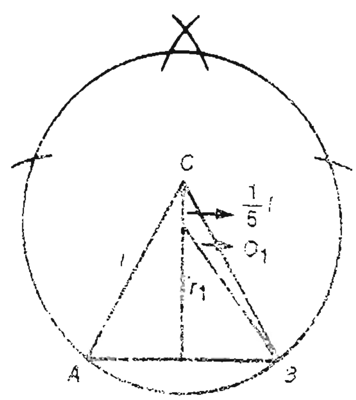


Figura 17

Primera inexactitud

En primer lugar se demuestra que

$$\frac{r_1}{l} = \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^{1/2} = 0.83282041\ldots,$$

y si hacemos uso de la razón (4.1), podemos eliminar l y obtener

$$\frac{r_1}{R} = 0.97903912\ldots,$$

de donde

$$R = r_1 + 0.020960\ldots(R) \Rightarrow r_1 < R$$

Por ello puede afirmarse que para que O_1 fuera el auténtico centro de la circunferencia circunscrita debería estar situado *algo más arriba* del lugar que ahora ocupa (véase el corte superior de la Figura 17).

Segunda descripción y segunda inexactitud

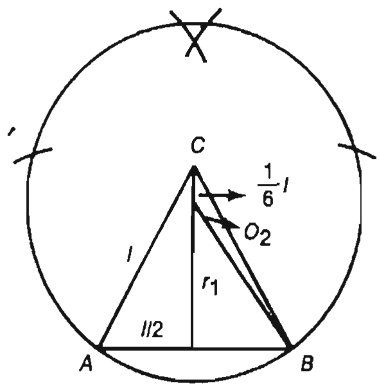


Figura 18

Si reiteramos el proceso de la primera descripción, pero con la diferencia de que ahora se determina O_2, tal que $\overline{CO_2} = \frac{1}{6} l$,
obtenemos, según se desprende de la Figura 17, para P_2

$$\frac{r_2}{l} = \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^{1/2} = 0.85971079\ldots,$$

y haciendo uso de (4,1)

$$\frac{r_2}{R} = 1.0106506\ldots \Rightarrow R = r_2 - 0.0106506\ldots(R) \Rightarrow r > R$$

de donde se deduce que O_2, para que fuera realmente el centro de la circunferencia circunscrita debería estar situado *algo más abajo* (véase el corte de la Figura 18).

Tercera descripción y tercera inexactitud

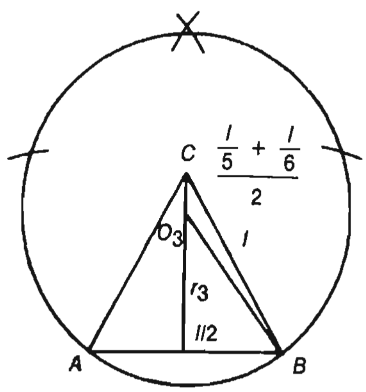


Figura 19

Se determina O_3 tal que $\overline{CO_3} = (l/5 + l/6)/2$ (O_3 es el punto medio entre los centros O_1 y O_2) (Fig. 19). Haciendo operaciones llegamos a

$$\frac{r_3}{l} = \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{11}{60}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^{1/2} = 0.8462082\ldots,$$

y se elimina l mediante (4.1), de donde

$$R = r_3 + 0.005222\ldots(R) \Rightarrow r_3 < R \Rightarrow$$

y O_3 debe estar situado *algo más arriba.*

Cuarta descripción; Cuarta inexactitud

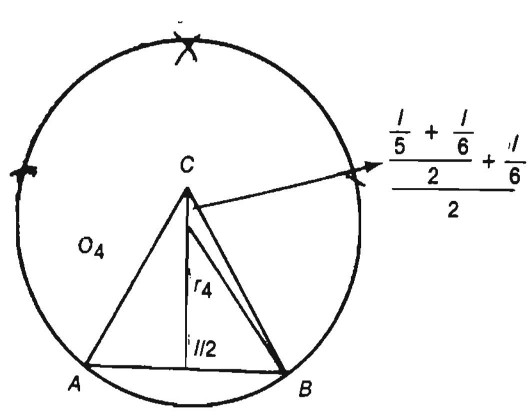


Figura 20

O_4 se toma como el punto medio entre O_2 y O_3, o lo que es lo mismo: $\overline{CO_4} = [(l/5 + l/6)/2 + l/6]/2$, Así llegamos a

$$\frac{r_3}{l} = \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{21}{120}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^{1/2} = 0.8529455\ldots,$$

y eliminamos l ayudándonos de (2, 1), de donde

$$R = r_4 + 0.002697\ldots (R \Rightarrow r_4 > R \Rightarrow$$

y O_4 debe estar situado *algo más abajo.*[1]

Si seguimos este proceso obtendremos una sucesión de pentágonos aproximados: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_n, \ldots$, tales que

$$\frac{r_1}{l} = \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^{1/2} = 0.83282041\ldots = t_1$$

$$\frac{r_2}{l} = \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^{1/2} = 0.85971079\ldots = t_2$$

$$\frac{r_3}{l} = \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{11}{60}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^{1/2} = 0.8462082\ldots = t_3 \qquad (2,2)$$

$$\frac{r_4}{l} = \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{21}{120}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^{1/2} = 0.8529455\ldots = t_4$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 8495733\ldots = t_5$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donde $l > 0$, lado de todos los pentágonos, es constante.

Cabe pues preguntar:

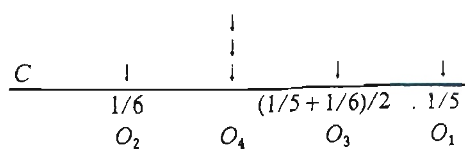
¿Tendrá esta sucesión como límite

$$\frac{R}{l} = \frac{1}{\sqrt{3 - \phi}} = 0.85065080\ldots ?$$

En caso afirmativo el límite sería un pentágono regular. Para una respuesta a esta cuestión estudiemos la sucesión numérica de (2, 2) en letra **negrita:**

$$\mathbf{\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{11}{60}, \frac{21}{120}, \frac{43}{240}, \ldots}$$

[1] Este cuarto elemento de la sucesión de pentágonos tiene un error menor del orden de una milésima) que los pentágonos obtenidos con Leonardo da Vinci por sus métodos aproximativos.



Cada elemento de esta sucesión indica la distancia a la cual están situados los centros de los respectivos pentágonos medida desde el vértice superior del triángulo equilátero: un quinto de *l*, un sexto de *l*, ..., y por tanto, la sucesión es tal que cada término es la media aritmética de los dos precedentes, o si se quiere, es del tipo

$$\begin{array}{cccccccc} a_1, & a_2, & \dfrac{a_1 + a_2}{2}, & \dfrac{a_1 + 3a_2}{4}, & \dfrac{3a_1 + 5a_2}{8}, & \dfrac{5a_1 + 11a_2}{16}, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5, & b_6; & \ldots, \end{array}$$

donde $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, en nuestro caso, son conocidos: 1/5 y 1/6, por tanto podemos cuantificar términos avanzados de la misma:

$$b_{12} = \frac{341a_1 + 683a_2}{1024} = 0.177766927\ldots$$

$$b_{13} = \frac{683a_1 + 1365a_2}{2048} = 0.177782303\ldots$$

....

....

$$b_{20} = \frac{87381a_1 + 174763a_2}{262144} = 0.177777735\ldots$$

Es pues evidente que esta sucesión $(b_i)_{i \in N}$ tiene como límite

$$0.17777777777\ldots = 0.1\overline{7} = \frac{8}{45}$$

Estamos ahora en condiciones de contestar a la pregunta que nos hicimos anteriormente. Recordémosla en forma esquemática:

$$\lim_{i \to \infty} \left(\frac{r_1}{l}\right) = \lim_{i \to \infty} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - (b_i)\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^{1/2} = \frac{R}{l} = \frac{1}{\sqrt{3 - \phi}}$$

$$= 0.85065080\ldots$$

En este momento podemos afirmar:

$$\lim_{i \to \infty} \left(\frac{r_1}{l}\right) = \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{8}{45}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^{1/2} = 0.85069665\ldots,$$

de donde se deduce que el pentágono límite de esta sucesión no es exacto, aunque como se verá, con error despreciable, esto permitirá introducir al final de este párrafo un nuevo método de construcción.

Para nuestro pentágono límite se tiene

$$\frac{r}{R} = 1.0000539.... \Rightarrow r = R + 5 \text{ cienmilésimas de } R$$

Igualmente podemos afirmar que a partir del cuarto término de la sucesión de pentágonos los errores son insignificantes.

NOTA: *Para que se hubiera verificado*

$$\lim_{i \to \infty} \frac{r_1}{l} = \frac{R}{l} = \frac{1}{\sqrt{3 - \phi}} = 0.85065080...$$

la sucesión $(\mathbf{b}_i)_{i \in N}$ tendría que haber sido convergente hacia

$$\frac{\sqrt{3} - \phi\,(3 - \phi)^{-1/2}}{2} = 0.17783445...$$

¿Le corresponderá este valor 0.17783445... con algún término de la sucesión $(b_i)_{i \in N}$ Si damos valores a la misma tenemos

Se observa que el término de la sucesión más aproximada al pentágono regular, es el noveno, incluso más aproximada que el pentágono límite, puesto que

$$R/r_9 = 1.00002821... \Rightarrow r_9 = R - 0.00002821.... (R).$$

Para finalizar este apartado y a título de conclusión, se introduce un método práctico, rápido y exacto para construir un pentágono regular dado su lado.

(1) Se construye un triángulo equilátero de lado l y se traza su altura
(2) Se multiplica por 0.17783445... la longitud del lado.
(3) Se mide la cantidad resultante desde el vértice, en la altura trazada, determinándose así el punto O, centro de la circunferencia circunscrita al pentágono regular (Fig. 21).

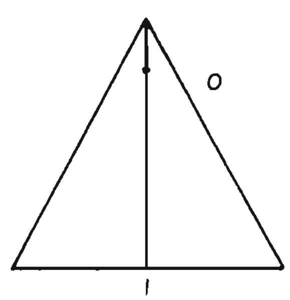


Figura 21

2.6 Método del ángulo de diez grados

Construir un pentágono de lado dado $AB \equiv l$.

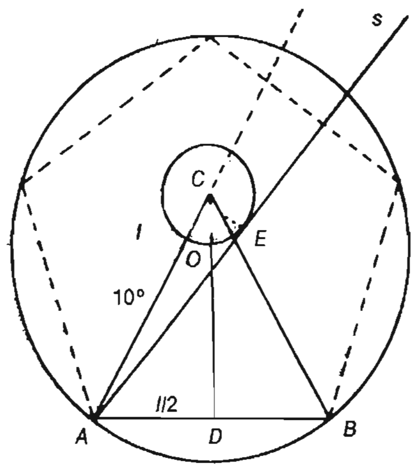


Figura 22

Descripción del método (Fig. 22)

Se construye un triángulo equilátero ABC de lado l, y se traza una semirrecta s de origen A, tal que forme un ángulo de diez grados sexagesimales (10°) con la que pasa por C y del mismo origen. A continuación se dibuja una circunferencia de centro C y tangente a s. El punto de corte O, de esta circunferencia con la altura $\overline{CD}$, será el centro de la circunferencia circunscrita al pentágono requerido.

Demostración de la inexactitud

$$\overline{CE} = \overline{CO} = l \operatorname{sen} 10° \Rightarrow AO = r = \sqrt{(\overline{CD} - \overline{CO})^2 + \overline{DB}^2} =$$

$$\sqrt{(l\sqrt{3}/2 - l \operatorname{sen} 10°)^2 + (l/2)^2} \Rightarrow$$

$$r/l = 0.85404111.... \Rightarrow r/R = 1.00398554.... \Rightarrow$$
$$r = R + 0.00398554...(R)$$

Puede verse que la aproximación de esta construcción es algo mejor que las de las construcciones de Leonardo da Vinci (unas 4 diezmilésimas), pero bastante peor que las aproximaciones obtenidas mediante el método de la sucesión.

2.7 Método de inscripción de la segunda división

Inscribir un pentágono en una circunferencia de radio r.

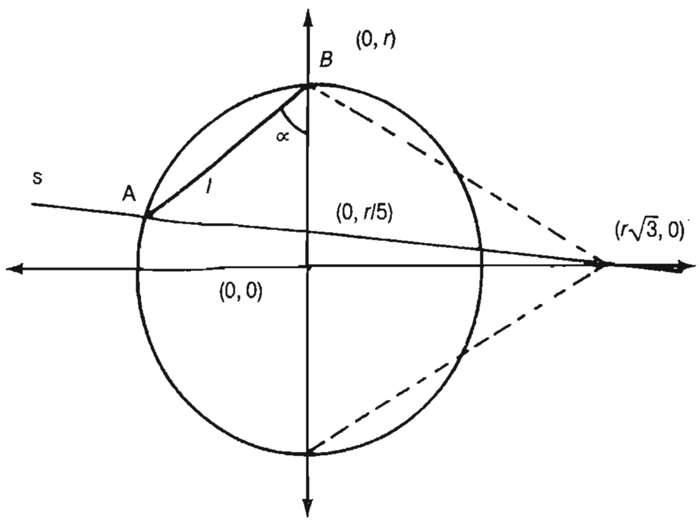


Figura 23

Descripción del método (Fig. 23)

El diámetro $\overline{BD}$ de la circunferencia dada se divide en cinco partes iguales. Haciendo centro en B y D respectivamente, y con radio $2r$ se determina el punto C. La recta s que pasa por los puntos C y E (segunda división del diámetro), corta a la circunferencia en los puntos A y A' $\overline{AB}$ será el lado l del pentágono inscrito en la misma.

Demostración de la inexactitud

Hemos centrado la circunferencia de radio r en el origen de un sistema de referencia cartesiano, y por tanto los puntos B, C y E tienen coordenadas $(0, r)$, $(r\sqrt{3}, 0)$ y $(0, r/5)$, respectivamente. Como nuestro objetivo es encontrar la longitud de $\overline{AB}$, las coordenadas de A se determinan con la intersección de la recta s con la circunferencia dada; esto es:

$$\underbrace{\{rx + 5r\sqrt{3}y - r^2\sqrt{3} = 0\}}_{\text{Ecuación de la recta que pasa por } (r\sqrt{3},\, 0) \text{ y por } (0,\, r/5).} \cup \underbrace{\{x^2 + y^2 = r^2\}}_{\text{Ecuación de la circunferencia}}$$

Haciendo operaciones:

$$38x^2 - r\sqrt{3}x - 36r^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.996385....(r) \\ x_2 = -0.950805...(r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0.08495...(r) \\ y_2 = 0.30979...(r) \end{cases}$$

por lo que las coordenadas de A serán

$$A(-0.950805...(r), 0.309790...(r)$$

Así, la distancia entre A y B toma la forma

$$d(A, B) = r\sqrt{(0.950805...)^2 + (1 - 0.309790...)^2} = 1.174912...\ (r) = l \Rightarrow$$

$$r/l = 0.85112702...\ ,$$

y por ello podemos afirmar que

$$r/R = 1.000560... \Rightarrow r = R + 0.000560...\ (R),$$

con lo que hemos demostrado que el error es del orden de diezmilésimas. Esta aproximación es más exacta que las de todas las construcciones anteriores, exceptuando las del método de la sucesión.

Indicar por último que el ángulo $\measuredangle B$ del pentágono, 2α, es 108,04662... °, puesto que si hacemos uso de la fórmula del ángulo que forman dos rectas (en este caso las rectas $x = 0$ y la que pasa por los puntos A y B) llegamos a

$$\cos\alpha = \frac{r(1 - 0.309790...)}{1.174912...\ (r)} = \frac{0.69021...}{1.17491...} = 0.587456... \Rightarrow$$

$$\alpha = \text{arc cos } 0.587456... \Rightarrow \alpha = 54{,}02331...\ ^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \measuredangle B = 2\alpha = 108.04662...\ ^\circ.$$

Método de la doble inscripción

Inscribir simultáneamente un pentágono y un hexágono en una circunferencia de radio r.

La originalidad de este método radica en hacer uso de un hexágono inscrito en una circunferencia, para inscribir al mismo tiempo un pentágono de lado a determinar.

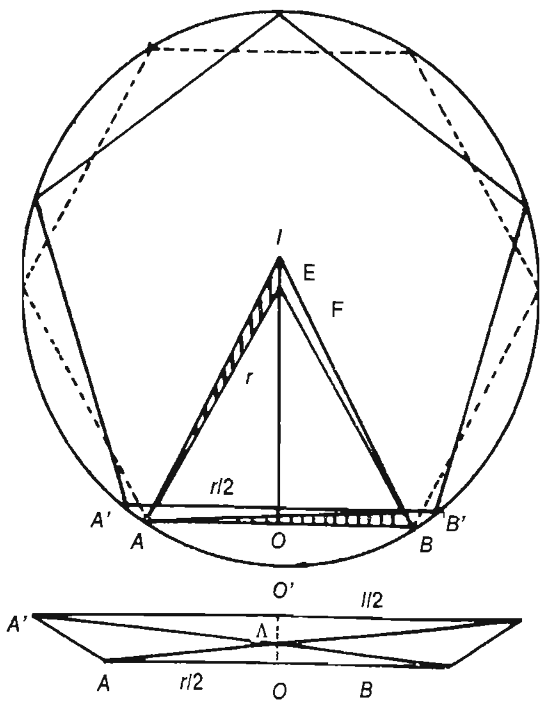


Figura 24

Descripción del método (Fig. 24)

En primer lugar se inscribe un hexágono en la circunferencia de centro F y radio r ($\overline{AB} \equiv \overline{AF} = r$ es el lado del hexágono referido). Acto seguido se traza la altura, $\overline{OF} \equiv r\sqrt{3}/2$, del triángulo equilátero ABF, correspondiente al lado $\overline{AB}$, la cual se prolonga de modo que $\overline{OI} \equiv r$. A continuación se determina el punto E, el cual resulta de restar de $\overline{OI}$ la media aritmética entre la cuarta y quinta parte del segmento $\overline{IF}$. Por último, haciendo centro en A y B, con radio $\overline{AE}$ se encuentran los puntos A' y B'. $\overline{A'B'}$ será el lado l del pentágono requerido.

Demostración de la inexactitud

De la Figura 24 se infiere que

$$\overline{IF} = \overline{OI} - \overline{OF} = r - r\sqrt{3}/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{OE} \equiv \overline{OI} - \left[\frac{1/4 + 1/5}{2}\right] \cdot \overline{IF} = r - \left[\frac{1/4 + 1/5}{2}\right] (r - r\sqrt{3}/2 =$$

$$\frac{62r + 9\,r\sqrt{3}}{80} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{AE} = \overline{AB'} = \frac{r}{80} \cdot \sqrt{5687 + 1116\sqrt{3}}$$

Del triángulo rectángulo OAE se tiene, por una parte,

$$\cos(60 + \Lambda) = \frac{r/2}{\overline{AE}} \Rightarrow \Lambda = 2.727056\ldots\,°,$$

y por otra

$$\cos\Lambda = \frac{r/2}{\overline{AO'}} \text{ (véase el trapecio } \overline{AA'}\,\overline{BB'}),$$

de donde deducimos

$$\overline{AO'} = 0.500566\ldots(r) \Rightarrow \overline{O'B'} = = \overline{AB'} - \overline{AO'} = r(1.091155\ldots - 0.500566\ldots) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{O'B'} = 0590588\ldots(r)$$

Ahora podemos afirmar que

$$\cos\Lambda = \cos \measuredangle B' = \frac{l/2}{0.590588\ldots(r)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2.727056\ldots\,° = l/(2r) \cdot 1/0.590588\ldots \Rightarrow$$

$$r/l = 0.8475716\ldots$$

De esta relación y de (4.1) llegamos a

$$r/R = 0.9963811... \Rightarrow r = R - 0.00361887... (R)$$

y por tanto, el error cometido en esta construcción es del orden de 3 milésimas.

Indiquemos finalmente que este método es usado por algunos profesores de dibujo técnico de Bachillerato, con la variante siguiente: A la hora de determinar los puntos A' y B' hacen centro, como nosotros, en A y B pero con radio $\overline{AI}$ en lugar de $\overline{AE}$. Si se hace así, el error cometido es bastante significativo. La rectificación efectuada en nuestra construcción, hace que el pentágono en cuestión se pueda inscribir en la circunferencia de radio r con gran precisión.

Bibliografía

[1] **Boyer, Carl.** *Historia de las Matemáticas.* Alianza Editorial.

[2] **Fourrey, E.** *Constructions geometriques.* París 1924.

[3] **Ghyka, Matila C.** *El número de oro I y II.* Poseidón. Barcelona 1984.

[4] **Harold R., Jacobs.** *Mathematics, A human endeavor.* W. H. Freeman and Company. Nueva York.

[5] **Plasencia, I. y Dorta, J.A.:** "Algunas consideraciones sobre la sección áurea". *Revista de la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de E. G. B. de Melilla.* Universidad de Granada (España). Junio de 1989.