De los sólidos platónicos a las pelotas de fútbol

Martha Cecilia Mosquera[1] Rafael Bernal[2]
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

RAE

"Es un milagro que los métodos modernos de la enseñanza,
No hayan sofocado el espíritu sagrado de la curiosidad y la investigación,
Porque ésta delicada planta necesita de la libertad lo mismo que del estímulo..."
Albert Einstein

Como es conocido por todos nosotros en este momento El Plan Sectorial de Educación 2004-2006 propuesto por la Alcaldía Distrital, nos plantea el reto de hacer de la escuela y de los procesos que en ella se realizan, algo mas pertinente, esto es: fortalecer y desarrollar una cultura académica que permita a los estudiantes desarrollar una actitud positiva y crítica frente al aprendizaje que les permita aprender a conocer y utilizar significativamente el conocimiento para producir nuevo conocimiento y desenvolverse en la vida cotidiana; es decir, que la educación sirva para mejorar la calidad de vida.

En ese orden de ideas, al desarrollar el cursillo: "DE LOS SÓLIDOS PALTÓNICOS A LAS PELOTAS DE FUTBOL" pretendo aportar al debate sobre la pertinencia de los contenidos que enseñamos, mostrando 2 la aplicación de algunos temas que estudiamos en geometría elemental en el estudio de la forma de las moléculas, (geometría molecular).

Para su desarrollo he dividido el contenido del cursillo en cuatro partes: En la primera trabajo sobre figuras y cuerpos geométricos, retículos, embaldosados y generadores de grupos de simetría; en la segunda, la estructura de los cristales mosaicos de la naturaleza, grupos

[1]Docente HC Área Matemáticas Aplicadas a la Química. Email: tangrams49@yahoo.es
[2]Docente Área Matemáticas

cristalográficos planos, en la tercera ilustro el uso de la teoría de grupos en química para determinar la forma y propiedades de las moléculas (sólidos platónicos, arquimedianos y fullerenos) y en la cuarta presento las bases geométricas de la periodicidad de los elementos.

El cursillo se enmarca en el tópico de *filosofía y didáctica de la geometría*, está dirigido al público en general, la modalidad de trabajo es el taller y como material didáctico utilizaré entre otros: el tangram triangular o juego de los ocho elementos y los modelos moleculares de pines y esferas.

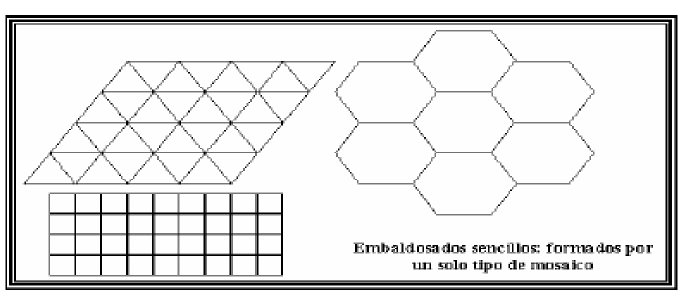
Finalmente agradezco a las personas que lean y multipliquen este trabajo, así como también a aquellos que me regalen sus sugerencias ya que éstas son fundamentales para mejorar a diario. También a los organizadores del II ENCUENTRO DE MATEMATICAS DEL CARIBE COLOMBIANO por la oportunidad que me han brindado, para socializar mi trabajo de investigación en el aula en espacios de tan alto reconocimiento para la comunidad matemática, también a las personas que después de haber asistido a otros cursillos que he desarrollado han seguido en contacto e intercambiando experiencias en busca de mejores alternativas para lograr una formación matemática mas completa desde la base, en especial a mi maestro el Dr. Carlos Luque UPN, al profesor Germán Hincapié y desde luego a mis estudiantes tanto de la universidad, como del colegio, por el entusiasmo con que asumen las jornadas de trabajo.

LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS: como decía Platón: “la geometría existe en todas partes” basta una consciente observación para lograr descubrir las formas perfectas y regulares que presentan algunos cuerpos. Las flores, las hojas y muchos animales revelan simetrías admirables que deslumbran nuestro espíritu... la geometría existe en el disco del sol, en el arco iris, en la mariposa, en el diamante, en la estrella de mar y hasta en un pequeño grano de arena... existe una infinita variedad de formas presentadas por la naturaleza. Las aves al volar lentamente por el cielo describen formas admirables; el camello es el único mamífero que tiene glóbulos de sangre de forma elíptica característica que sólo presentan las aves y los reptiles; la piedra que se arroja al aire dibuja una parábola perfecta; la abeja construye sus alvéolos en forma de prismas hexagonales y adopta esa forma geométrica para obtener mayor rendimiento y economía de material.

Podría hacer mucho más extensa esta introducción deteniendo la mirada en el legado de cualquiera de los griegos de la antigüedad... Pitágoras, Platón, Apolonio, pero para el objetivo que persigo resulta mas pertinente resaltar el interés de la cultura islámica por lo abstracto que se manifiesta también en forma artística, la diferencia es que en lugar de cuadros naturalistas, como en casi todas las demás culturas, en el Islam utilizan las expresiones con motivos geométricos, al parecer porque según afirma la tradición, el profeta Mahoma prohibió las imágenes y los ídolos que representan seres vivos, afirmando que sólo Dios puede crear y dar forma a la vida y que cualquier imitación hecha por el hombre se considera idolatría.

En la cultura islámica se utilizan dos formas artísticas: el arabesco floral y el arabesco poligonal (tauriq y tastir), en el *tauriq* se utilizan figuras y curvas geométricas en forma libre y en el *tastir* se utiliza una geometría de líneas rectas que siguen un patrón bien definido. En la Alhambra, de Granada el último de los monumentos de la civilización árabe en Europa, se encuentra la cumbre del arte islámico del arabesco poligonal. El trabajo de decoración de la Alhambra fue realizado por artistas con amplios conocimientos de las matemáticas de su tiempo, las figuras de los muros exhiben un riguroso trabajo de investigación en torno a las simetrías del espacio plano.

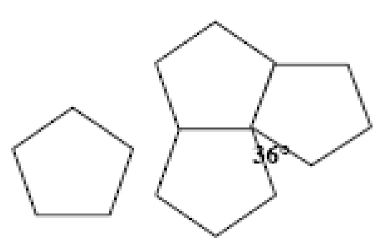
Al observar las fotografías de los mosaicos de las paredes de la Alhambra es posible ver que forman patrones repetitivos que se ven iguales luego de desplazarlos o de rotarlos. Los movimientos que dejan invariante un patrón reciben el nombre de simetrías. En dichos muros se ve claramente "DIOS fue un gran geómetra... geometrizó la Tierra y el Cielo" Platón 4 que los artistas moros consideraron todas las combinaciones de simetrías posibles, pero este arte fue poco desarrollado por las generaciones que les sucedieron, sólo hasta el siglo pasado renació el interés por estudiar seriamente los problemas que ellos en su tiempo consideraron.



Tratando de describir las formas surgieron preguntas como: ¿qué forma pueden tomar los mosaicos de un embaldosado?, ¿qué simetrías presentan?, ¿se puede cubrir la pared o el piso utilizando un sólo tipo de baldosas?. En el recuadro podemos observar los embaldosados más sencillos que es posible construir; su sencillez radica en que están formados por un solo tipo de baldosa, la que además presenta una estructura repetitiva muy clara. Si calcamos cualquiera de las tres figuras en una hoja transparente, es posible desplazarlas hasta hacerlas coincidir con cualquier porción del original, este movimiento es una *simetría de la figura*.

Hay varios tipos de simetría que es posible diferenciar; en primer lugar las que dejan la figura sin girar, estas se consiguen haciendo desplazamientos verticales y horizontales, reciben el nombre de simetrías traslacionales del embaldosado y generalmente se denotan con la letra T, si t_v es un movimiento que consiste en desplazar la figura verticalmente un cuadro hacia arriba, entonces todas las simetrías verticales hacia arriba se obtienen repitiendo varias veces el movimiento t_v por ejemplo un desplazamiento de dos cuadros hacia arriba se denota por t_v^2 un movimiento hacia abajo es inverso a un movimiento hacia arriba y se denota t_v^{-1} similarmente podemos desplazar la figura hacia la derecha, para generar todas las simetrías horizontales, a las cuales podemos llamar t_h si combinamos un movimiento vertical hacia arriba con un movimiento hacia la derecha.

Cuando observamos algunos de los diseños de embaldosados planos de la Alhambra, vemos que los embaldosados presentan algunas formas regulares (triángulos, cuadrados y hexágonos), pero no otras, como por ejemplo pentágonos... resulta fácil probar que no es posible cubrir el plano utilizando solo pentágonos o como diría el profesor de Teoría de Grupos: "no hay simetrías rotacionales de orden cinco" es decir, no es ´posible construir un embaldosado que al hacerlo girar en un ángulo de 72° vuelva a coincidir consigo mismo... la ausencia de simetrías de orden cinco, no solo ocurre en el plano... también en el espacio

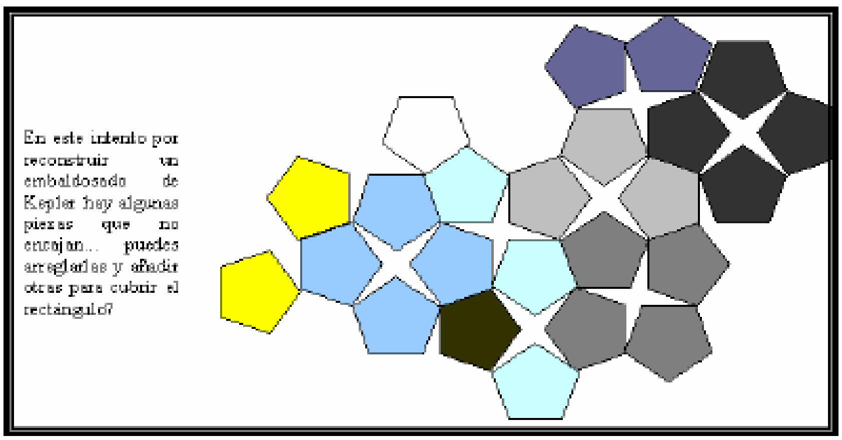


La necesidad de introducir formalismos matemáticos se debe a que por la amplia gama de posibilidades para la construcción de embaldosados y cristales debe haber una forma de estudiarlos todos a la vez para no ir caso por caso.
Un embaldosado es *cristalino* si cumple con las siguientes condiciones:

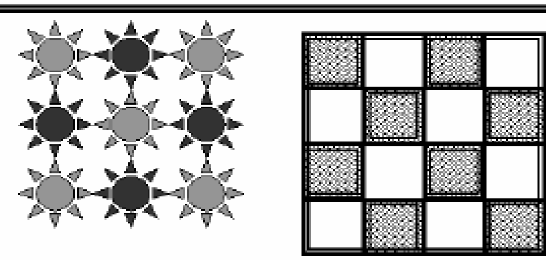
1. hay un número finito de mosaicos (baldosas) de forma que cualquier mosaico se obtiene como la imagen de alguno de ellos bajo un tipo de simetría.

2. Cada mosaico del embaldosado posee área finita y no tiene agujeros.

En el siguiente cuadro podemos observar un ejemplo de embaldosado diseñado por Kepler. ¿Es cristalino? Si no lo es ¿podría explicar cuál de las condiciones es la que no satisface?

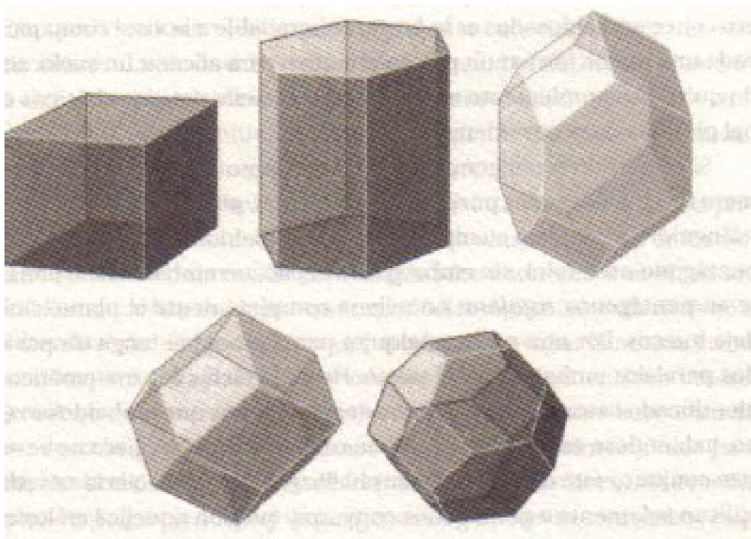


Para dejar claro el concepto veamos que el embaldosado de Kepler es cristalino porque cumple las condiciones a y b. sin embargo este no posee simetrías que lleven una estrella en la estrella que está exactamente arriba.
Observemos en el siguiente cuadro otros ejemplos de embaldosados no cristalinos...

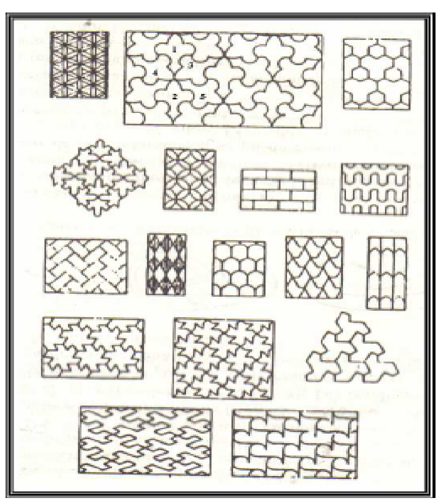


Embaldosados no cristalinos

Los embaldosados cristalinos del espacio son sólidos que se pegan en el espacio para cubrirlo.

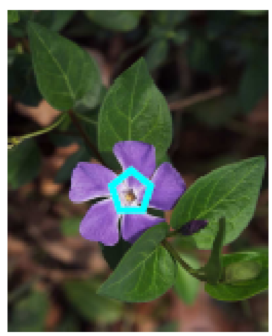


El grupo de simetrías de un embaldosado cristalino se denomina *grupo cristalográfico*. Las clasificaciones completas de los grupos cristalográficos, como ya dijimos fueron hechas por Fedorov quien en 1885 encontró que existen 230 grupos cristalográficos en tres dimensiones y en 1891 completó la teoría encontrando que para el caso bidimensional existen 17 grupos... Lo interesante del asunto es que los 17 grupos cristalográficos planos se encuentran en embaldosados de la Alhambra.
Copia de los dibujos de Polyá (1924) con ejemplos de los 17 grupos cristalográficos planos

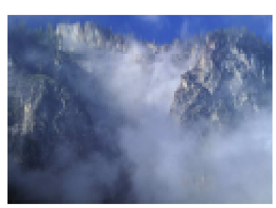


SIMETRÍAS Y GRUPOS: La noción de simetría es una de las mas antiguas en matemáticas, en el lenguaje común se habla de que un objeto es simétrico cuando está bien proporcionado, simétrico es sinónimo de bello; en la antigüedad se estudió principalmente la simetría bilateral, los griegos, por ejemplo, consideraban que solo un cuerpo simétrico en el sentido geométrico podía ser bello, sin embargo fueron ellos mismos quienes empezaron a observar otras formas de simetría.

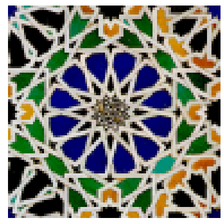
En el perfil de un caracol es posible ver la "hélice cónica" y en el perfil de ciertas palmeras "la espiral logarítmica" esta curva es adoptada por principio de economía, pues el vegetal de este modo, con menos cantidad de material, resiste mejor el impulso del viento. Los ingenieros después de hacer un minucioso análisis a la luz del cálculo infinitesimal, demostraron que la curva logarítmica es el perfil más conveniente para los faros.
Resulta admirable la simetría pentagonal con que están dispuestos los elementos en algunas flores, en la estrella de mar y en otros elementos de la naturaleza.



La mas curiosa observación permite ver que las simetrías de orden impar sólo se presentan en los elementos dotados de vida ...
La materia inorgánica sólo presenta simetrías de orden par
Los copos de nieve, que se presentan en una variedad infinita, presentan siempre simetría hexagonal (un giro de 60° los hace verse iguales)



Para elaborar los embaldosados de la Alhambra, los moros seguramente contaron con una idea clara de simetría y probablemente con muy buenos métodos de análisis, sin embargo, la noción matemática de grupo de simetría se desarrolló mucho tiempo después; la noción de grupo *abstracto*, por ejemplo, se debe al matemático francés Evariste Galois (1832).

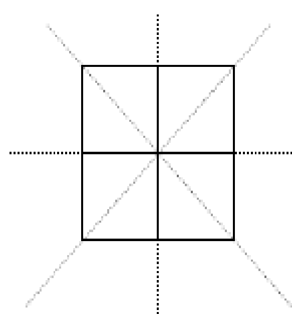


Recordemos que en términos generales un *grupo* es un conjunto G, en el cual se define una operación que cumple las siguientes propiedades:

- Es asociativa
- Existe un elemento neutro
- Cada elemento de G tiene un inverso

Hay muchos ejemplos de grupos que podemos construir, por ejemplo, el conjunto de los números enteros con la suma forman un grupo, también, los enteros módulo n con la suma módulo n.

Para construir el grupo de simetrías de una figura regular, han de tenerse en cuenta las líneas ideales (internas o ejes de reflexión) que en el caso de los cristales reciben el nombre de *ejes cristalográficos o axones* y los puntos de rotación.



Para el caso del cuadrado, por ejemplo, se pueden considerar primero las rotaciones que lo envían en sí mismo, estas tienen por eje de rotación el centro del cuadrado y son tres:

90°, 180° y 270° (r_1, r_2, r_3) la cuarta es la trivial 0° ó 360° (e) que deja el cuadrado intacto esa es la identidad; luego, las reflexiones con diferentes ejes de simetría: el eje vertical, el eje horizontal y las dos diagonales, todas ellas por el centro del cuadrado (s_1, s_2, s_3 y s_4) con ellas el grupo de simetrías del cuadrado queda así:

	e	r1	r2	r3	s1	s2	s3	s4
e	e	r1	r2	r3	s1	s2	s3	s4
r1	r1	r2	r3	e	s3	s4	s2	s1
r2	r2	r3	e	r1	s2	s1	s4	s3
r3	r3	e	r1	r2	s4	s3	s1	s2
s1	s1	s4	s2	s3	e	r2	r3	r1
s2	s2	s3	s1	s4	r2	e	r1	r3
s3	s3	s1	s4	s2	r1	r3	e	r2
s4	s4	s2	s3	s1	r3	r1	r2	e

Algoritmo de clasificación de los grupos cristalográficos planos. **Para obtener los 17 grupos cristalográficos planos** se toma como base un grupo por ejemplo S asociado a un embaldosado plano, también el grupo de traslaciones T y el grupo de rotaciones R del embaldosado que deja un punto fijo. T y R son subgrupos de S. Además T es un subgrupo normal de S y el cociente S/T es isomorfo a R, esto se puede representar por medio de la siguiente sucesión:

$$0 \to T \to S \to R \to 1$$

Debido a las condiciones a y b (de los grupos cristalográficos) hay dos traslaciones t y t' en T que son linealmente independientes. Resulta fácil comprobar que T es un grupo abeliano libre generado por t y t' y también que R es un grupo cíclico generado por un elemento r tal que $r^n = e$, para alguna $n = 1, 2, 3, 4, 6$ (recordemos que no puede ser $n = 5$). Resultando así los primeros cinco grupos cristalográficos:

GRUPO	GENERADORES	ECUACIONES QUE SATISFACEN LOS GENERADORES
T	$t,\ t'$	$tt' = t't$
S_{2222}	$t,\ t',\ r = 180^{\text{o}}$	$tt' = t't,\ r^2 = e$
S_{333}	$t,\ r = 120^{\text{o}}$	$r^3 = e$
S_{442}	$t,\ r = 90^{\text{o}}$	$r^4 = e$
S_{632}	$t,\ r = 60^{\text{o}}$	$r^6 = e$

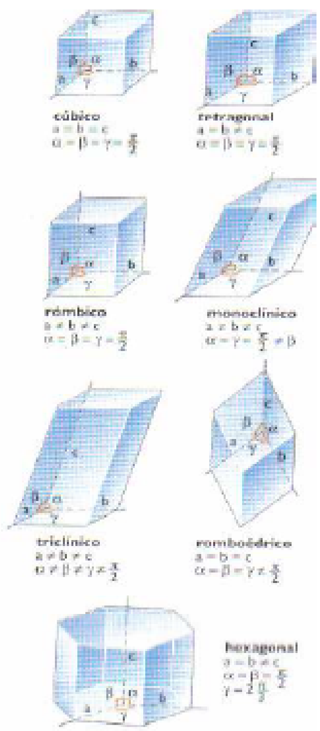
Estas simetrías preservan la orientación. Cuando consideramos también movimientos que incluyen reflexiones alrededor de ejes aparecen nuevos grupos cristalográficos hasta completar los 17.

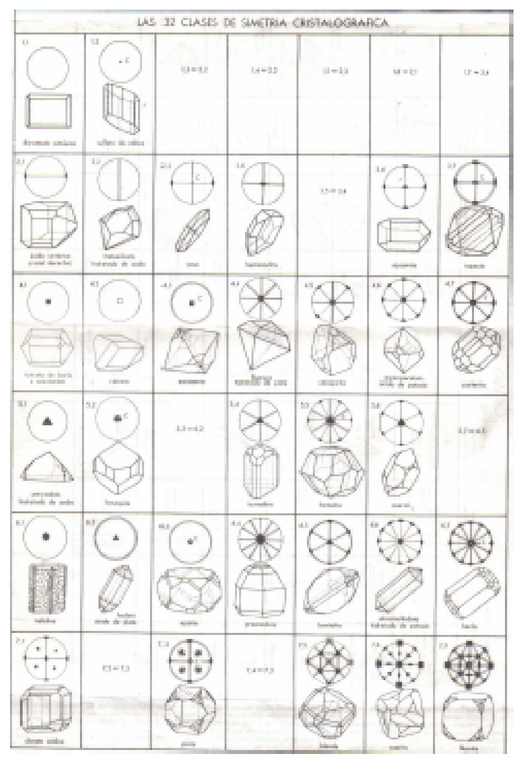
El algoritmo de clasificación se resume en la tabla siguiente: Lo primero que debemos observar es el orden máximo de los giros que aparecen en el grupo de simetría. Recordemos que por la restricción cristalográfica sólo puede ser 1, 2, 3, 4 ó 6. Según sea este máximo orden aplicamos la tabla que corresponda:

El máximo orden de los giros es 1				
¿Hay ejes de simetría?				
SI			NO	
¿Hay un eje de simetría con deslizamiento que no es eje de simetría?			¿Hay ejes de simetría con deslizamiento?	
SI		NO	SI	NO
Cm		pm	pg	p1
El máximo orden de los giros es 2				
¿Hay ejes de simetría?				
SI			NO	
¿Hay dos ejes de simetría perpendiculares entre sí?			¿Hay ejes de simetría con deslizamiento?	
SI		NO	SI	NO
¿Por todos los 2-centros pasan ejes de simetría		pmg	pgg	p2
SI	NO			
Pmm	cmm			
El máximo orden de los giros es 3				
¿Hay ejes de simetría?				
SI			NO	
¿Por todos los 3-centros pasan ejes de simetría?			p3	
SI		NO		
p3m1		p31m		
El máximo orden de los giros es 4				
¿Hay ejes de simetría?				
SI			NO	
¿Por todos los 4-centros pasan ejes de simetría?			p4	
SI		NO		
p4m		p4g		
El máximo orden de los giros es 6				
¿Hay ejes de simetría?				
SI		NO		
p6m		p6		

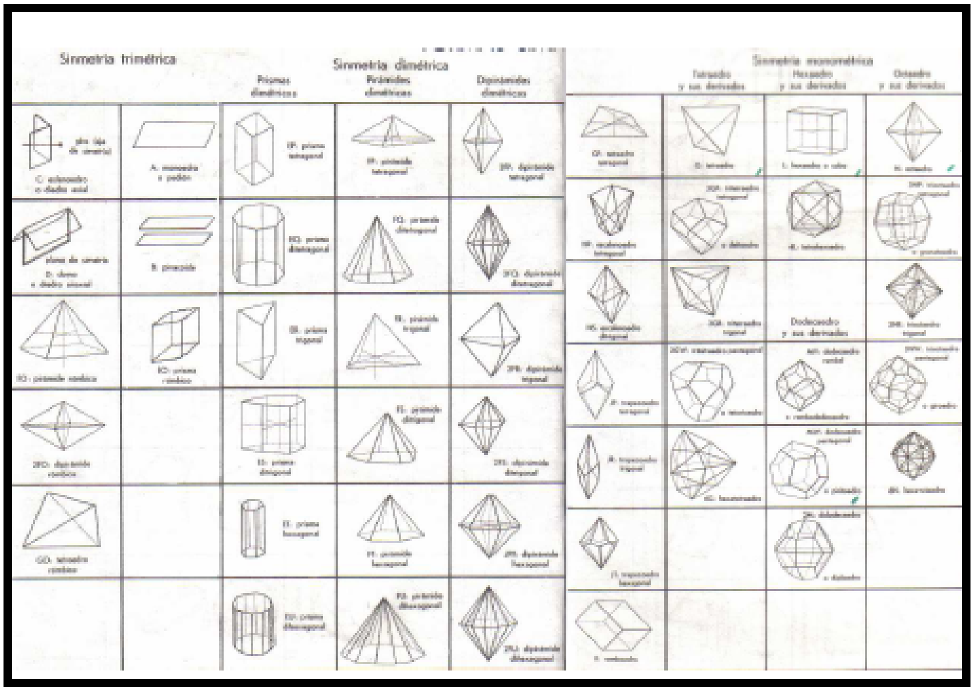
LOS SÓLIDOS: Como dije anteriormente, los químicos empezaron por clasificar los grupos cristalográficos en tres dimensiones, la teoría de Fedorov completó las hipótesis de

Bravais (quien afirmó que la materia cristalina estaba formada por conjuntos reticulares, cuyos nudos eran ocupados por los centros de gravedad de los poliedros moleculares) y la de Groth y Schncke (quienes supusieron que dichos nudos eran el asiento de átomos) con su teoría de los paraleloedros, según la cual puede dividirse el reticulado espacial en cuerpos geométricos iguales entre sí y paralelos, de esta manera llegó a la conclusión de que sólo podían existir cuatro modos distintos de paraleloedros y dentro de ellos distintas variantes según la inclinación y largo relativo de las aristas...





A modo de resumen, resulta claro que los químicos han hecho uso de la teoría de grupos en forma más general, para determinar las propiedades de las moléculas. Desde el punto de vista matemático, la mayoría de los grupos que pueden aparecer como grupos de simetrías de moléculas aisladas son muy sencillos, exceptuando el grupo alternante A_5^3 (de manera teórica se dice que todos estos grupos -salvo A_5 - son solubles).



Formas simples de los cristales

LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS: los cinco sólidos platónicos (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro) definen una especie de límite a lo que puede construirse de manera perfecta en el espacio tridimensional. Son los únicos que pueden formarse con caras planas iguales y regulares (triángulo equilátero, cuadrado y pentágono regular) y ángulos sólidos iguales.

Hace aproximadamente dos mil cuatrocientos años ya se conocía que únicamente existen estos cinco poliedros regulares convexos.

Los restos arqueológicos más antiguos en los que aparecen figuras poliedrales, de los que se tiene noticia, son estas piedras talladas del neolítico (aproximadamente 2000 a. C.)

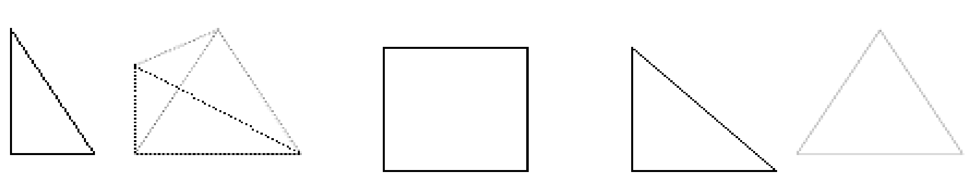
encontradas en Escocia.

En el libro $XIII$ de los “Elementos”, de Euclides (300 a. C.) aparece la construcción de los cinco poliedros regulares; la cual se le atribuye a Teeteto (417-369 a. C.), personaje que aparece en los Diálogos de Platón (400 a. C.) como símbolo de la inteligencia.

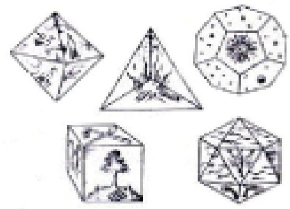
A los cinco poliedros regulares se les llama ***Cuerpos Platónicos*** porque Platón en uno de sus diálogos más significativos, el “Timeo”, en el que se explica la construcción del universo, establece una asociación entre ellos y los elementos fundamentales de los que éste está compuesto, que según sostenían los griegos estaba hecho con átomos de agua, aire, tierra y fuego.

Según lo que allí se expone, el mundo real es una copia imperfecta del mundo de las ideas hecha por el Demiurgo, ser inteligente y bueno al que le atrae la belleza y trata de recrearla. Este personaje crea en primer lugar el alma del mundo y la esfera celeste (lo hace dándole forma esférica, la más perfecta) en cuyo centro está la Tierra. Después se ocupa de la materia con la que está hecho el mundo; se compone de cuatro elementos: fuego, tierra, aire y agua, que han de tener la propiedad de ser “sólidos” (pues las cosas no solamente son planas sino que tienen profundidad) y han de ser capaces de recomponerse unos en otros. Puesto que han de ser sólidos, esto es, limitados por planos y un plano está compuesto por piezas sencillas (triángulos).

El Demiurgo elige de éstos los más bellos: el triángulo rectángulo isósceles (con dos piernas -catetos- iguales) y el triángulo rectángulo escaleno (cojo) que posee la propiedad de tener la hipotenusa de doble longitud que uno de sus catetos. A partir de dos de estos triángulos construye el triángulo equilátero; con cuatro de estas piezas, el tetraedro; con ocho el octaedro y con veinte el icosaedro. Con cuatro triángulos rectángulos isósceles construye el cuadrado y con seis cuadrados el cubo.

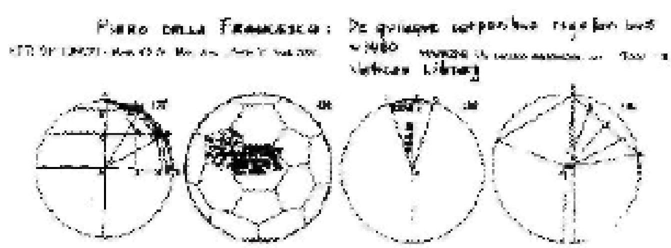


Queda una única combinación, el dodecaedro, que lo reserva para el universo. En la Figura podemos ver los dibujos de Kepler basados en esa asociación.

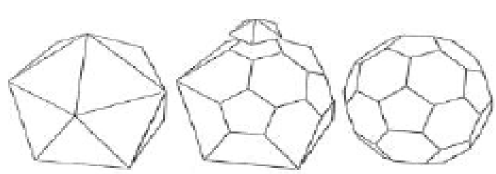


De estos se derivan **LOS SÓLIDOS DE ARQUÍMEDES** que son una serie de poliedros semirregulares cuyas caras combinan dos o tres polígonos regulares distintos; este tipo de poliedros ocupa un lugar destacado entre los artistas del renacimiento cuya fascinación por los poliedros les condujo a estudiar y desarrollar propiedades de antiguos y nuevos poliedros.

Mención especial merece el pintor y matemático Piero De La Francesca (1416-1492), considerado actualmente como uno de los primeros artistas del renacimiento. Uno de sus libros, "Libellus de quinque corpibus regularibus" (1480), conservado en la Biblioteca Vaticana, contiene la figura más antigua que se conoce de un poliedro cuyas sesenta caras son pentágonos y hexágonos en la misma distribución que ahora se utiliza para construir balones de fútbol.



A éste poliedro en especial, Kepler le dió el nombre de icosaedro truncado, porque puede obtenerse truncando un icosaedro por cada uno de sus vértices.

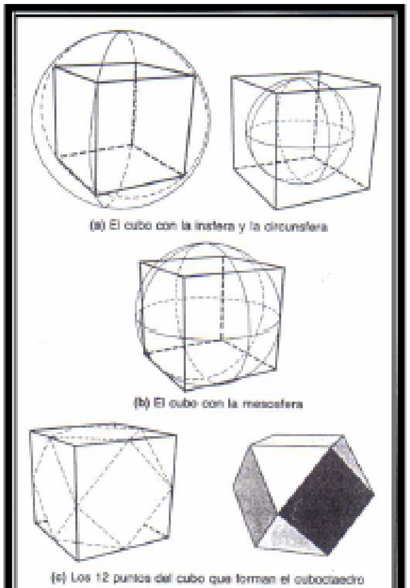


Parece que no sólo influido por los trabajos de Piero De La Francesca, sino plagiándolos en parte, Fra Luca Pacioli (1445-1509) escribió un libro acerca de las maravillosas propiedades del número áureo titulado "De divina proportione". En este libro aparecen numerosas ilustraciones de poliedros con dibujos hechos por su amigo el gran artista Leonardo da Vinci (1452-1519).

Es notable la atracción que sentía Leonardo por los poliedros, para los que construyó modelos de sus esqueletos, con tiras de madera como aristas, que dejaban huecos todo el interior del poliedro y las caras del mismo. Cuando un modelo así se observa en perspectiva con el ojo del observador muy pegado a una de las caras huecas, ésta aparece como un polígono grande que en su interior contiene el resto de las caras. Pintada esta configuración sobre un plano, es una buena representación en dos dimensiones del poliedro en cuestión, que se denomina diagrama de Schlegel del mismo. Los dibujos de Leonardo han sido una referencia y fuente de inspiración para numerosos artistas y científicos tanto de su época como posteriores. En la ilustración de la figura podemos contemplar el diseño de Leonardo de dos poliedros, uno de ellos el icosaedro truncado.

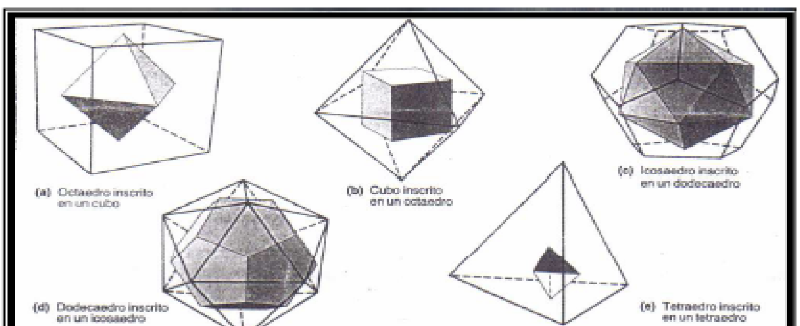
POLIEDROS Y ESFERAS: Ambas especies de sólidos (los platónicos y los arquimedianos), pueden inscribirse en una esfera, llamada *circunsfera*, de tal manera que todos sus vértices tocan la superficie de ésta, los sólidos platónicos son los únicos que circunscriben una esfera *la insfera*, cuya superficie es tangente a cada una de sus caras.

Una tercera esfera *la mesosfera*, es la que define el radio que conecta el centro del sólido con el punto medio de cualquiera de las aristas, y se Las encuentra tanto en los sólidos platónicos como en los arquimedianos. La superficie de la mesosfera se cruza con las caras del sólido, extendiéndose tanto hacia adentro, como hacia fuera. Dos de los sólidos de Arquímedes están definidos por la mesosfera de sólidos platónicos, ellos son: el cuboctaedro y el icosidodecaedro.



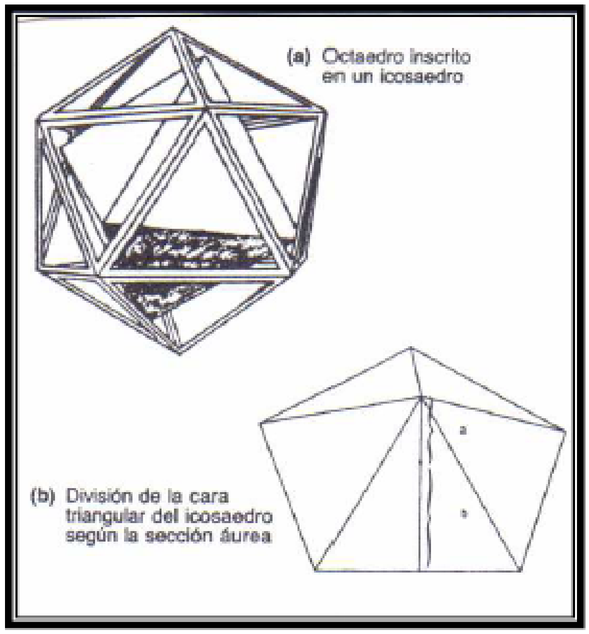
FORMACION DEL CUBOCTAEDRO A PARTIR DEL CUBO
Se muestra el cubo (a) con la circunsfera, en la que inciden sus 8 vértices, y la insfera, tangente a sus 6 caras. La mesosfera (b) es tangente a las doce aristas del cubo, en sus puntos medios. Cuando se conectan estos 12 puntos, se forma el sólido de Arquímedes conocido como el cuboctaedro. La mesosfera del cubo es la circunsfera del cuboctaedro.

POLIEDROS "DUALES" se denominan así dos sólidos platónicos que pueden inscribirse uno dentro de otro. Por ejemplo: el par del cubo y el octaedro y el par del icosaedro y el dodecaedro, son duales porque cualquiera de los dos sólidos de cada par cabe dentro del otro, en tal forma que sus vértices caen en los centros de las caras del otro, el tetraedro es dual consigo mismo.



DUALIDAD DE LOS SOLIDOS PLATONICOS
El cubo y el octaedro son duales, o sea que el uno se inscribe en el otro (a, b). Lo mismo el icosaedro y el dodecaedro (c, d). El tetraedro es dual consigo mismo (e).

¡UNA BELLA COINCIDENCIA! Se consigue al inscribir el octaedro en el icosaedro, sí... el octaedro cabe en el icosaedro de tal manera que cada uno de sus seis vértices, divide la altura de la cara triangular correspondiente según la sección áurea, es decir $a/b = b/(a+b)$.



La unión de ciencia y belleza, simbolizada en polígonos y poliedros, ha sido una constante en la obra de muchos científicos y artistas. Una muestra de ello está en la construcción que Euclides hizo del pentágono regular, en el que la diagonal y el lado están en proporción áurea $\tau : 1$, siendo $\tau = [(1+\sqrt{5})/2]$ el número áureo o la divina proporción, llamado así por la belleza que genera en los objetos que lo contienen.

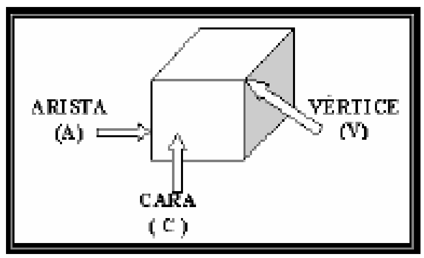
Y otra feliz coincidencia la encontramos en los pares de poliedros duales, en los cuales el lado de la figura mayor y el de la figura menor se encuentran en proporción áurea.

SÓLIDOS PLATÓNICOS, ARQUIMEDIANOS... MOLÉCULAS Y PELOTAS DE FÚTBOL... ¿PARA QUÉ?

En la primera parte de éste trabajo vimos las figuras geométricas, sus simetrías y los grupos cristalográficos; luego, los poliedros platónicos y arquimedianos, en breves líneas he tratado de contar sobre la forma como los científicos, los matemáticos y los artistas los han utilizado.

En esta segunda parte del trabajo mostraré algunas aplicaciones que se han hecho a través de la historia de los sólidos platónicos y arquimedianos.

INVARIANTE TOPOLÓGICO DE LOS SÓLIDOS PLATÓNICOSLA CARACTERÍSTICA DE EULER. Aunque los griegos ya sabían y habían logrado probar por métodos empíricos que sólo existen cinco poliedros regulares, Descartes y más tarde Euler se hicieron la pregunta sobre la existencia de alguna característica común a todos los poliedros simples4 y que por ende permitiera distinguirlos, llegando a la conclusión de que en un poliedro simple: el número de vértices, menos el número de aristas más el número de sus caras siempre es igual a dos.

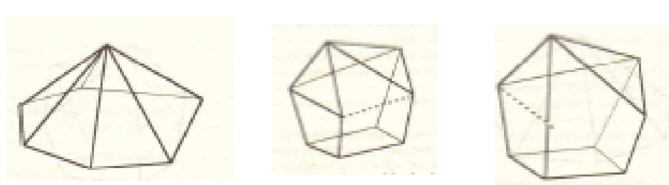


Lo que ellos lograron descubrir es que si para un poliedro se define:

$$\chi = V - A + C$$

el número χ (ji) se conoce como **la característica de Euler del poliedro**. entonces, para cualquier poliedro simple $\chi = 2$.

La idea de la demostración de éste resultado consiste en ir transformando el poliedro original en otros poliedros más sencillos, suprimiendo vértices, aristas y caras del poliedro sin cambiar la característica de Euler5, como el número de aristas es finito, este proceso siempre conduce a un tetraedro (no necesariamente regular) A manera de ejemplo



podemos transformar una pirámide. Con este resultado a mano, procedemos a escribir las ecuaciones correspondientes a las características de los poliedros; si a y l representan respectivamente: el número de aristas y el número de lados de cada cara del poliedro, la geometría del problema nos permite establecer las siguientes relaciones: (a y l están bien definidas pués nuestra hipótesis es la de que el poliedro es regular)

$$\begin{aligned} aV &= 2A \text{ pues cada arista tiene dos vértices} \\ lC &= 2A \text{ porque cada arista es común a dos caras} \\ V - A + C &= 2 \text{ la fórmula de Euler} \end{aligned}$$

Como nuestro poliedro no es plano $a \geq 3$ y A, C, V, a y l son números enteros positivos, además $l \geq 3$ porque cada cara tiene al menos tres lados. Resolviendo el sistema de ecuaciones llegamos a la relación:

$$C(2l + 2a - al) = 4a$$

Como consecuencia ya que $4a \geq 12$ obtenemos las siguientes relaciones: $2l + 2a - al > 0$; $2a > l(a-2)$ y como $l \geq 3$ y $(a-2) > 0$ entonces: $2a > l(a-2) \geq 3(a-2)$ y esto implica que $a < 6$, o sea que $a = 3$, 4 o 5. Y las posibilidades se resumen en la tabla siguiente:

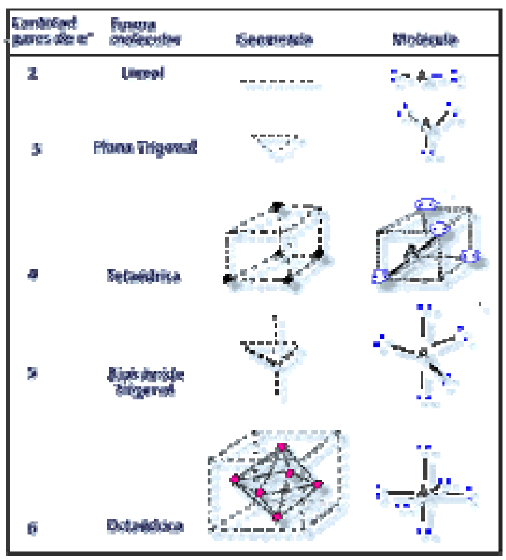
a	**l**	**C**	**El poliedro tiene**	**Y es un**
3	3	4	Cuatro caras triangulares	Tetraedro
	4	6	Seis caras cuadradas	Hexaedro
	5	12	Doce caras pentagonales	Dodecaedro
4	3	8	Ocho caras triangulares	Octaedro
5	3	20	Veinte caras triangulares	Icosaedro

Con esto concluimos la demostración de que sólo existen cinco poliedros simples y regulares, que corresponden a los sólidos platónicos.

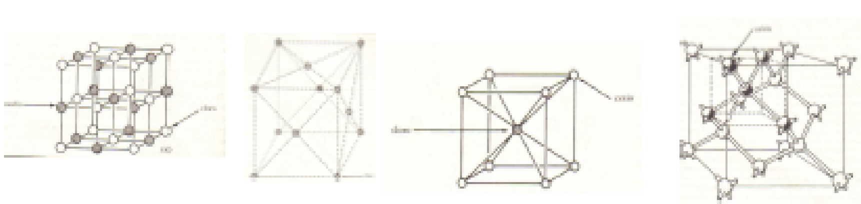
OTRA BELLA COINCIDENCIA! Se obtiene cuando unimos los centros de las caras (baricentros) de un sólido platónico... al hacerlo, de nuevo obtenemos un sólido platónico *su dual!* Como consecuencia de esto la mayoría de las propiedades de un sólido se reflejan en las propiedades de su dual.

Los sólidos platónicos llaman la atención por su belleza y perfección geométrica, otro estudio mucho mas interesante es el de sus simetrías, éste como dije anteriormente, ha sido ampliamente utilizado por los químicos inicialmente para determinar la forma de los cristales.

LA FORMA DE LAS MOLÉCULAS: el uso de la teoría de grupos por los químicos para estudiar las propiedades de las moléculas es un procedimiento muy interesante, una vez establecidos los criterios para asociar una estructura poliedral a una molécula o a una sustancia, se tiene que algunas de las propiedades quedan reflejadas en la estructura poliedral asociada y, en general, ésta puede ser más compleja que un solo poliedro y contener subpoliedros asociados con grupos funcionales determinados. En muchas ocasiones la estructura poliedral correspondiente está inmersa en el espacio euclídeo, lo que permite, estudiando sus grupos de simetría, analizar diversas cuestiones como por ejemplo la estructura de los empaquetados de los átomos y moléculas.



La disposición ordenada de cationes y aniones está relacionada con las propiedades magnéticas de la sustancia considerada. La disposición de los enlaces en varias capas planas o en redes espaciales tiene que ver con la dureza del material considerado.



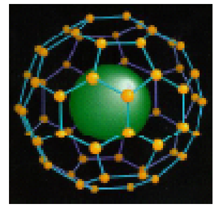
En la figura podemos observar la estructura de algunos cristales, obtenidas por análisis de difracción de rayos X; la primera el cloruro de sodio es cúbica, la del cobre también es cúbica pero se encuentra centrada en las caras del cubo, el cloruro de cesio es cúbica también pero centrada en el cuerpo y finalmente el diamante, que es la sustancia mas dura que existe. Es justamente a causa de la forma tetraédrica del carbono que encontramos diamantes en formas octaédricas, las cuales resultan de dos tetraedros tocando sus bases.

Otro aspecto interesante es el de la isomería, es decir, aquellos fenómenos asociados con substancias que tienen esencialmente los mismos componentes pero éstos admiten distintas disposiciones geométricas, lo que puede originar diferentes propiedades. Por ejemplo, dos núcleos con igual masa y número atómico pueden presentar distintas propiedades, a causa de una estructuración diferente de sus componentes.

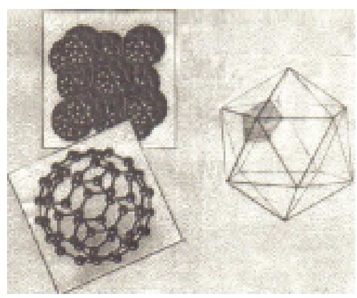
De modo general destacaré que en la estructura poliedral intervienen decisivamente el tamaño de los átomos y de los cationes y aniones y el tipo y capacidad de enlace que tengan los elementos que forman la sustancia a analizar. Además, a veces es interesante tener en cuenta que el tamaño y tipo de enlaces puede ser modificado por la temperatura, presión u otros factores que afecten al material considerado.

El uso de la tecnología en la búsqueda de herramientas que permiten desvelar la estructura poliedral de las substancias ha tenido un avance vertiginoso, en la actualidad se dispone de diferentes tipos de rayos, aceleradores, microscopios electrónicos, reactores nucleares y otras técnicas de tipo físico o químico, para lograr tal fin.

LOS FULLERENOS: una reciente rama de la química, especialmente rica en investigación y en la que el uso de técnicas poliedrales es muy amplio, es la de los fullerenos. Este campo se inició con el descubrimiento en 1985 de la molécula C60, que fue bautizada con el nombre de buckminsterfullereno, y abreviadamente se le llama fullereno, en honor del arquitecto R. B. Fuller. Esta molécula consiste en 60 átomos de carbono unidos mediante doce pentágonos y veinte hexágonos. Su forma es la misma que la de un balón de fútbol y aproximadamente su tamaño es al del balón como el de éste es al de la Tierra; en este caso la estructura poliedral es muy simple, en el sentido de que consta de un solo poliedro que es un icosaedro truncado.



La molécula C60, llamada por muchos "la más bella molécula", fue descubierta por los investigadores H. W. Kroto, R. E. Smalley y R. F. Curl en 1985 cuando hacían estudios sobre la composición química de las estrellas. Al analizar las imágenes obtenidas por los telescopios de los observatorios astronómicos, ellos sospechaban, al igual que otros científicos, que tal composición tenía que ver con largas cadenas de moléculas de carbono. En lugar de obtenerlas por simulación mediante experimentos con técnicas convencionales, los investigadores señalados decidieron pasar un haz de láser sobre el vapor de carbono; al hacerlo, no



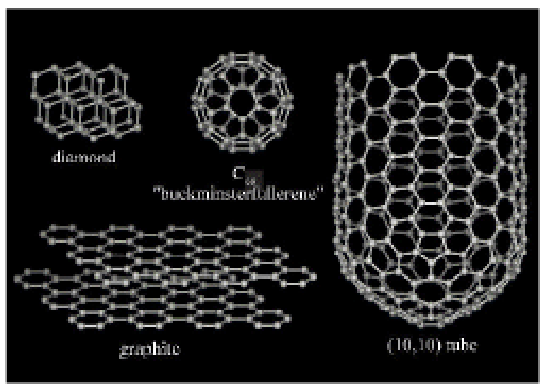
sólo aparecieron las cadenas de moléculas que esperaban, sino que observaron que éstas tenían una forma poliédrica totalmente inesperada, como la de un balón de fútbol. Así se descubrió el C60.

Estas moléculas de C60 se condensan en una forma nueva de carbono sólido, una forma cristalina de carbono puro diferente de los conocidos diamante o grafito.

Aunque inicialmente el C60 sólo podía producirse en muy pequeñas cantidades, lo cuál restringía su uso para otros experimentos, W. Krätschen, L. Lamb, K. Fostiropoulos y D. Huffman descubrieron en 1990 el modo de producirlo en mucha mayor cantidad, lo que abrió nuevas posibilidades para las investigaciones experimentales.

El descubrimiento del C60, hecho por el cuál sus descubridores recibieron el Premio Nobel de Química en 1996, ha sido el inicio de un periodo de gran actividad en la química de los llamados fullerenos (compuestos de moléculas de carbono formadas con diferente número de átomos que generan estructuras poliedrales con caras pentagonales, hexagonales o incluso heptagonales). Posteriormente también se han sintetizado otros muchos fullerenos: C70, C76, C78, C82, C84, etc. Muchos trabajos se centran en los fullerenos debido a que al añadirles ciertos átomos alcalinos se obtienen compuestos superconductores eléctricos.

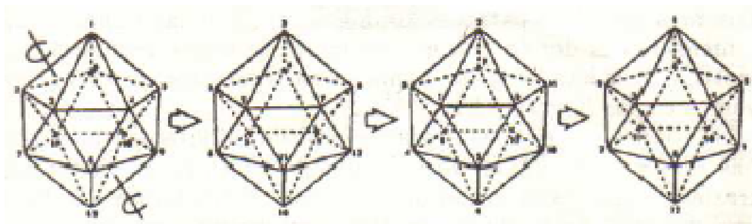
Actualmente hay abierto un nuevo campo de investigación que permite el estudio de los posibles fullerenos a través de herramientas matemáticas tales como la teoría de grafos, poliedros, topología algebraica, teoría de grupos y geometría diferencial; en este sentido, existe una importante relación entre la clase de superficies orientadas y conexas regulares con caras pentagonales, hexagonales y heptagonales, módulo isomorfismos poliedrales, y los posibles compuestos de carbono puro del tipo anterior.



Estos descubrimientos cierran de nuevo el círculo en torno a Kepler, quien ya había hablado de los poliedros truncados, haciendo referencia a los sólidos Arquimedianos.

Entre los fullerenos el mas estable es el carbono 60 C60 que tiene una superficie casi esférica con 12 pentágonos y 20 hexágonos unidos en su superficie y los átomos de carbón en los vértices.

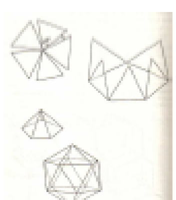
La estructura del C60 se obtiene a partir del icosaedro por medio de truncamientos, dividiendo cada una de sus aristas en tres partes iguales, los cinco puntos que quedan marcados sobre las aristas que son más cercanos a un vértice forman un pentágono regular. Si cortamos el icosaedro por medio de los doce planos que contienen estos pentágonos obtenemos el icosaedro truncado, esta figura tiene 5x12=60 vértices, y sus caras son 12 pentágonos (los de los cortes) y 20 hexágonos (que se forman de cada una de las veinte caras del icosaedro al cortar).

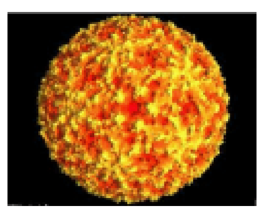


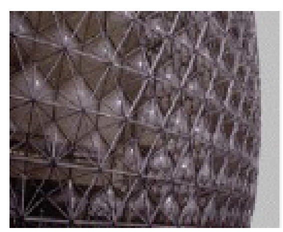
Algunas simetrías del icosaedro

El grupo de simetrías del icosaedro es A_5 , como los cortes que hemos hecho para obtener el icosaedro truncado son estables con respecto a este grupo (es decir, un corte va a parar en otro corte cuando se aplica una simetría en el icosaedro) entonces A5 es el grupo de isometría del C60. No podría terminar esta exposición sin hacer una breve alusión (aunque solo sea por medio de imágenes) al uso de las estructuras poliedrales en arquitectura y en virología... e indicar que este campo es lo bastante extenso e interesante de estudiar, que definitivamente no vale la pena que sigamos engañando a nuestros aprendientes con el cuento de que "los únicos sólidos que existen son los sólidos platónicos"...

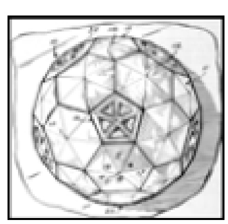
Martha Cecilia Mosquera Urrutia.

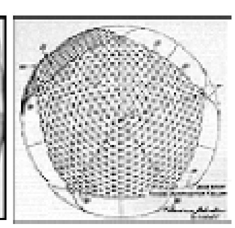






Armado del icosaedro **Virus: fiebre aftosa**





Diseños de Buckminster Fuller

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Para elaborar este trabajo utilicé textos, de la colección "la ciencia para todos" del Fondo de Cultura Económica, un texto de química elemental, algunos libros de divulgación y consulté varias páginas Web, no puedo desconocer el gran aporte que día a día recibo de mis estudiantes de la licenciatura en química de la Universidad Distrital y de mis aprendientes del Rafael Bernal, quienes en su afán por construir el hipertexto han emprendido caminos de consulta verdaderamente interesantes. En lo que refiere a las imágenes, algunas las he dibujado o copiado de algunos textos, pero admito que no pude evitar la tentación de bajarlas por Internet, ya que la belleza y colorido que contienen supera cualquier otra de las que pude conseguir... al final presento los enlaces y páginas que consulté y de las cuales bajé las imágenes que están a color.

Textos de la colección La Ciencia Para todos. Fondo de Cultura Económica. México, D.F.

BRAUN Eliezer. Arquitectura de sólidos y Líquidos. #26 en este texto el autor se ocupa de mostrar la composición de algunos sólidos y líquidos, y explicar la forma como se usan los rayos X para determinar las estructuras microscópicas.

BRAUN Eliezer. Un Movimiento En zigzag. #13 Aunque muchos que lean el título y la conformación por capítulos de este texto, lo consideren poco pertinente, para este caso pues el autor se enfoca en la explicación del movimiento browniano; hacia el final del texto trabaja aspectos fundamentales y prácticos sobre este tipo de movimiento y sus usos prácticos en la vida cotidiana, además de que explica la forma de utilizar los rayos X en el estudio de algunos fenómenos. Aún si no contribuyese en nada para trabajar el tema de las formas, este texto resulta muy interesante por el lenguaje claro y elemental que el autor utiliza para explicar este tipo de movimiento.

DE LA PEÑA José A. Álgebra En Todas Partes. #166 Este texto le ha servido de columna vertebral a mi trabajo, además de que es fascinante la forma como el autor presenta los conceptos, contiene un barrido muy interesante sobre el álgebra y sus campos de aplicación. Me parece muy importante la parte final del libro dedicada por el autor a presentar algunos algebristas y sus teoremas, ya que los muestra no solo como científicos sino también como personas, este aspecto me ha ayudado bastante para motivar a mis

aprendientes a emprender trabajos de consulta.

FUENTES Sergio y DIAZ Gabriela. Catalizadores. #59 En este interesante texto los autores muestran la estructura de algunos catalizadores y sus aplicaciones industriales, hecho que me ayudó a buscar nuevas rutas de información.

GARCÍA COLIN S, Leopoldo. Y Sin Embargo Se Mueven... #36 En este texto dedicado a estudiar la teoría cinética de la materia, el autor nos explica como es la estructura interna de ella y presenta variados ejemplos que nos explican como es eso que no vemos de las cosas que vemos.

ONGAY Fausto. Mathema El Arte Del Conocimiento. #177 En este libro el autor se ocupa de algunos aspectos estéticos del desarrollo de las matemáticas, y allí encontré detalles valiosos referentes a la forma de las moléculas, y los sólidos platónicos.

- Entre los muchos textos que inundan hoy el mercado buscando que si los lectores no se enamoran de las matemáticas, por lo menos comprendan la importancia de su estudio y multiplicidad de aplicaciones se encuentra **El Lenguaje De Las Matemáticas de Keith Devlin**. Que como bien dice su autor es un fascinante y clarificador viaje por la historia y el sentido actual de la matemática. En sus entretenidas páginas encontré una amplia información no sólo sobre aspectos históricos, sino también sobre aplicaciones en diversos campos.

ABAUD Aquilino y otros. Hacia La Química 2. Editorial Temis S.A. Bogotá-Colombia. 2000.