5. La letra como número generalizado: algunos errores de estudiantes de grado noveno

William Eduardo Naranjo Triana[1]

Resumen

Esta ponencia tiene como objetivo mostrar los resultados obtenidos en la aplicación de unas actividades cuya finalidad es caracterizar los errores y las dificultades evidenciadas por estudiantes de grado noveno al usar letras para representar números generalizados en contextos de resolución de problemas. Para llevar a cabo este proyecto se realizó una actividad escrita a treinta y cuatro estudiantes, además de la aplicación de algunas entrevistas clínicas. Principalmente se encontró que existe una gran dificultad en los estudiantes al usar y asignarle significado a las letras en el álgebra escolar, lo cual se debe en gran medida a las prácticas tradicionalistas de una enseñanza sin sentido y significado desarrollada por los profesores de matemáticas en la escuela, en los niveles de básica primaria y básica secundaria. Por otro lado, este trabajo es el resultado final de una experiencia educativa y se constituye como posible respuesta a problemas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje del álgebra escolar.

Introducción

Los resultados de las pruebas nacionales (específicamente las pruebas SABER de 2009) y las comparaciones internacionales del desempeño de estudiantes del nivel escolar en Matemáticas (véase por ejemplo las pruebas del *Programme for International Student Assessment* de 2006 y la evaluación del *Trends in International Mathematics and Science Study* de 2007) señalan que una gran proporción de los estudiantes colombianos de los grados 7º, 8º y 9° muestran índices muy bajos de comprensión conceptual del álgebra escolar (Agudelo-Valderrama, 2002). El pensamiento algebraico constituye el centro principal del quehacer matemático (Mason, Graham, Pimm & Gowar, 1999) y posibilita una actividad típica de éste: expresar generalidad. Por estas y otras razones resulta relevante hacer un profundo análisis acerca de las dificultades en el aprendizaje del álgebra, específicamente en el uso de las letras. En este trabajo se mostrará algunas dificultades y errores evidenciados por estudiantes de grado 9° (que tienen entre 13 y 15 años de edad) al usar letras para representar números generalizados en contextos de resolución de problemas.

Metodología

Para llevar a cabo este proyecto, en primera medida, se desarrolló una actividad con los estudiantes en donde el objetivo principal era construir la representación algebraica de una función cuadrática a partir de una situación problémica, utilizando la representación tabular e identificando regularidades dentro de la misma. La actividad que se llevó a cabo es la siguiente:

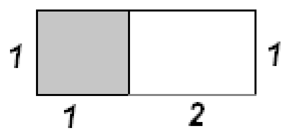
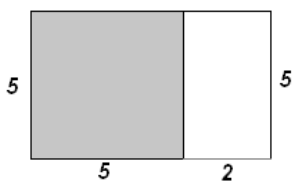
Actividad. ***Situación problema:*** *un albañil desea pañetar una pared rectangular como la que se muestra en la siguiente imagen, de tal manera que la figura sombreada sea un cuadrado, el borde rojo debe medir exactamente dos (2) metros y mantenerse fijo durante todo el proceso.*

¿Cuánto mide el área de toda la pared (lo sombreado y lo no sombreado) si la longitud del lado de la figura sombreada es: cero metros, un metro, dos metros, tres metros, cuatro metros, cinco metros?

Organice los datos en la siguiente tabla:

---

1 Estudiante de X semestre de la Licenciatura en Matemáticas. Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad del Tolima. e-mail: william-105@hotmail.com

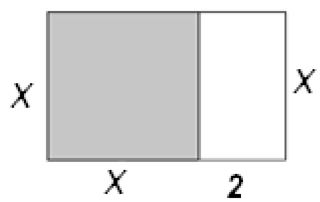
PARED	LONGITUD DEL LADO DEL CUADRADO	PROCEDIMIENTO	ÁREA DE LA PARED
	0 METROS	**(0).(0) +(2).(0)**	**0 METROS CUADRADOS**
	**1 METRO**	**(1).(1) + 2(1)**	**3 METROS CUADRADOS**
…	…	…	…
	**5 METROS**	**(5).(5) + 2(5)**	**35 METROS CUADRADOS**

Nota: esta tabla es un ejemplo de los registros que deben hacer los estudiantes, los espacios se le presentan en blanco y ellos mismos deben realizar sus propios procedimientos.

Fíjese muy bien en la columna de los procedimientos y responda las siguientes preguntas:

- ✓ ***¿Qué varía de un procedimiento al otro? ¿Qué permanece fijo o constante de un procedimiento al otro?***
- ✓ Con tus propias palabras, describe el método o procedimiento que llevas a cabo para hallar el área total de la pared, es decir, ¿cómo haces para hallar el área de la pared?
- ✓ ***¿Cómo se hallaría el área de la pared para cualquier longitud del lado del cuadrado?***

Sugerencia: represente la longitud del lado del cuadrado con una letra, por ejemplo "X":

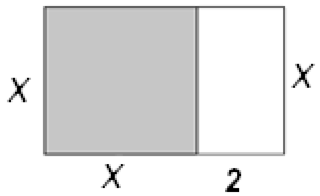


- ✓ Escriba una expresión algebraica que represente el área de total de la pared para cualquier longitud del cuadrado.

Para finalizar la actividad, los estudiantes debían representar en el plano cartesiano los datos obtenidos en la tabla, y luego tabular para valores positivos y negativos la función cuadrática obtenida anteriormente.

Luego de esto se realizó una pregunta dirigida a todos los (las) estudiantes, de acuerdo con la siguiente figura:

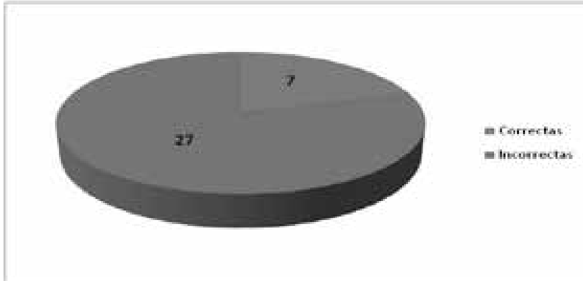
¿A qué es igual la base del rectángulo? ¿Cuánto mide la base de este rectángulo? Justifique su respuesta.



Las respuestas dadas por los (las) estudiantes a esta pregunta fueron muy variadas, aún más las justificaciones presentadas por ellos; para organizar estos datos se clasificaron de acuerdo con la naturaleza de la respuesta dada y, para poder entender un poco más acerca de lo que piensan los estudiantes cuando dan sus justificaciones, se decidió realizar dos (2) entrevistas clínicas intencionales, a dos casos que presentaban características muy particulares.

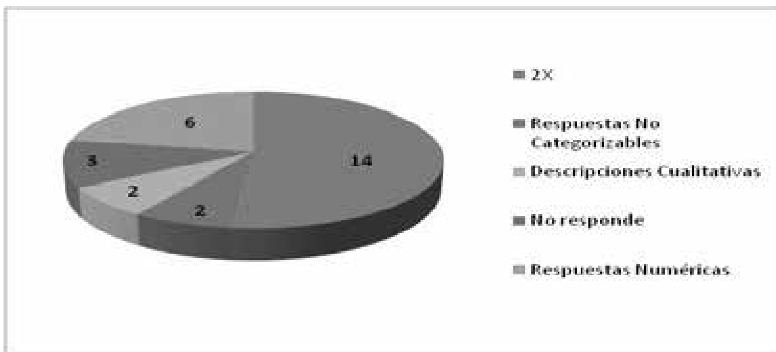
Los resultados obtenidos de la última pregunta hecha a los (las) estudiantes fueron los siguientes:

Tipo de Respuesta	N° de Estudiantes	Porcentaje
Correctas	7	20,58 %
Incorrectas	27	79,42 %
TOTAL	**34**	



Los 27 estudiantes que dieron una respuesta incorrecta o incompleta fueron clasificados en las siguientes categorías, de acuerdo con las características similares que presentaron entre sí, como se muestra en la siguiente tabla:

Tipo de Respuesta	N° de Estudiantes	Porcentaje
2X	14	41,18%
Respuestas No Categorizables	2	5,88%
Descripciones Cualitativas	2	5,88%
No responde	3	8,82%
Respuestas Numéricas	6	17,65%
TOTAL	**27**	



Respuesta "2x"

En esta categoría los (las) estudiantes responden que la base del rectángulo mide "2X" y dan distintas justificaciones que se pueden agrupar en las siguientes sub- categorías:

- ✓ Responden que la base mide X+2 y que esto a su vez es igual a "2X", es decir, tienen la necesidad de dar una respuesta simplificada o un sólo término.
- ✓ Responden que la base mide "2X" y no justifican su respuesta, posiblemente conciban las letras como objetos que se pueden coleccionar o juntar.
- ✓ Responden que la base mide "2X", justificando que "X" y "2" no se pueden sumar y, por lo tanto, la base mide "2X".

Respuesta "numéricas"

En esta categoría se ubicaron aquellas respuestas que correspondían a un número en particular, con procedimientos y justificaciones que se pudieron clasificar en las siguientes subcategorías.

- ✓ Reemplazan la letra por un número en particular (es decir, letra evaluada) y realizan el respectivo procedimiento (e.g, X+2 = 3, reemplazando la letra por 1).
- ✓ Ignoran la letra; por ejemplo la base del rectángulo mide 2, haciendo caso omiso a la letra.
- ✓ Ignoran el número 2 y reemplazan la letra por el número 1.

Al analizar las justificaciones dadas por algunos (as) estudiantes, se pudo observar que existe la tendencia a reemplazar la letra por el número 1 ya que este es su coeficiente, es decir, evalúan la letra de acuerdo con el coeficiente de ésta.

Descripciones cualitativas

En esta categoría se ubicaron aquellas respuestas que describen cualitativamente la forma como varía la base de todo el rectángulo en relación con la base del cuadrado, pero no son capaces de declararlo en símbolos , como se puede observar en los siguientes ejemplos:

"*la base de la figura varía de acuerdo con la base del cuadrado"; "La base mide cualquier número porque de ahí se guían para los demás valores".*

Respuestas no categorizables

En esta categoría se ubicaron aquellas respuestas cuyos errores no provenían de las concepciones erradas acerca de la letra, sino que eran producto de la falta de comprensión de la pregunta, la desatención de los (las) estudiantes, los errores aritméticos (por ejemplo, para hallar la base del rectángulo se debe multiplicar); en otras palabras, son errores que no provienen de las distintas interpretaciones de las letras, sino de otros factores que para este trabajo no resultan de tanta importancia.

No responde

En esta categoría se ubicaron los (las) estudiantes a quienes no les interesaba la actividad y, por lo tanto, no respondieron a la pregunta hecha acerca de la base del rectángulo.

Entrevistas

Con el fin de obtener una mejor comprensión de algunas respuestas dadas por los (las) estudiantes para poder caracterizar los errores y las dificultades evidenciadas por ellos, se realizaron tres entrevistas clínicas (intencionales) a algunos casos que presentaban características muy particulares. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Respuestas fundadas en el dilema "proceso-producto"

Al entrevistar algunos(as) estudiantes, es posible inferir que estos(as) tienen una gran dificultad para aceptar respuestas que no sean números o términos simplificados. A esto Matz y Davis (citados por Pretexto) lo llamaron el dilema "proceso-producto" (1996, p. 25), el cual debe ser superado para dar paso a lo que Collis (citado por Pretexto) denomina "Aceptación de la falta de cierre" (1996, p. 25).

Declaraciones como las siguientes (extraídas de las entrevistas hechas a algunos estudiantes. Véase anexo 1), dan cuenta que los (las) estudiantes entrevistados(as) presentan dificultades con el uso de las letras, posiblemente porque aún no aceptan que la respuesta a un problema de matemáticas sea distinto a un número o a una expresión simplificada; por lo tanto, inventan reglas y manipulaciones erróneas, muchas veces fundadas desde su trabajo aritmético escolar para poder dar una respuesta que se acomode a las concepciones que tienen acerca de lo que debe ser una respuesta bien dada:

Nota: Las declaraciones del entrevistador se identifican por la letra "E" y las del estudiante por la letra "A".

Caso número 1

E: Si yo le digo a usted que la respuesta a la pregunta ¿cuánto mide la base? es x+2; ¿cuánto mide la base de ese rectángulo? Yo digo que x+2 podría ser (o no ser) la respuesta.

A: Sí

1: Porque podría ser

A: Porque uno puede dejar la incógnita a la persona va calificar el trabajo o algo así, o sea es una forma de hallar la verdadera respuesta

E: Sí es una forma de hallar la base sumar x+2

E: Pero, entonces esta es la respuesta a cuánto mide la base

A: Pues en parte sí, por que si yo digo x+2 me va a dar la respuesta

E: Pero entonces, ¿qué faltaría?

A: La respuesta

E: ¿Cuál sería la respuesta?

A: 2x

Caso número 2

E: Si yo le digo a usted que la respuesta a la pregunta ¿cuánto mide la base? es x+2? Y yo digo x+2, ¿podría ser esta la respuesta o no podría ser?

E: O, ¿tiene que ser un sólo elemento, un sólo término?

A: Yo creo que tiene que ser un sólo elemento.

E: ¿Por qué?

A: Porque pues está pidiendo un número como tal, o sea cuánto mide la base, no podríamos decir.

E: O sea [que] cuando yo pregunto cuánto, ¿estoy preguntando por un número?

A: Sí

E: Ok, eso es cierto, o sea que ésta no sería la respuesta (dice mientras señala con el dedo la expresión x+2), porque ésta no es un sólo número

Caso número 3

E: Entonces, ¿1x + 2 es igual a 3?

A: 3, porque acá hay un número invisible que es 1 (señala la letra X), entonces al sumarlos x +2 es 3.

E: ¿Ésta podría ser la respuesta del ejercicio? O sea [que] la base mide x+2, esa podría ser la respuesta.

A: Mmm no, porque debe ser un número y ahí (dice mientras señala con el dedo X+2) no están sumados X y 2

Significado que tienen las letras

La mayor dificultad que tienen los (las) estudiantes respecto del uso de las letras radica precisamente en el significado que éstas tienen (Mason, 1999). Esto es, los estudiantes no saben lo que significan o representan las letras en matemáticas, especialmente en el álgebra escolar, razón por la cual crean reglas falsas para manipular expresiones algebraicas tales como: evaluar la letra, es decir, asignarle un valor numérico arbitrario; ignorar la letra, pues los estudiantes obvian la letra y operan sólo con los coeficientes numéricos; juntan las letras como si fueran objetos, entre otros errores que son producto del desconocimiento de los (las) estudiantes de lo que representan y significan las letras.

Dificultades provenientes del trabajo aritmético escolar

Algunos errores evidenciados por los (las) estudiantes relacionados con el uso de las letras, estaban fundados en concepciones erróneas provenientes del trabajo aritmético escolar. Para ilustrar un poco más esto, véase el siguiente extracto de la entrevista clínica del caso número 1:

Nota: Se utiliza la letra E para identificar las declaraciones del entrevistador y la letra A las del entrevistado.

E: Aquí ya están sumados X y 2 (dice mientras señala con el dedo la expresión X+2) o, ¿no los ha sumado?
A: No los he sumado
E: O sea que tendría que sumarlos para hallar la respuesta
A: Tendría que sumarlos para hallar la respuesta

Como vemos aquí, el estudiante ve la expresión X+2 como dos cosas separadas, es decir, no le encuentra ningún significado al signo más (+), tal vez como consecuencia del dilema "proceso-producto" y la "negación de la falta de cierre"; en otras palabras, el estudiante concibe que una suma tienen que dar como resultado obligatoriamente un solo número o una sola expresión. Esto obedece a que en su trabajo aritmético escolar sus profesores le decían que sumara 3+2, sin hacer énfasis en que con el hecho de tener el signo más ya estaban sumados, solo bastaba simplificar la expresión. Este tal vez sea uno de los mayores obstáculos al que se enfrentan los estudiantes novicios en lo que refiere al álgebra escolar.

Conclusiones

Los (las) estudiantes de grado noveno presentan una gran dificultad con el uso de las letras para representar números generalizados. Las principales interpretaciones erradas de las letras que tienen los estudiantes son: la letra como objeto, le letra ignorada y la letra evaluada.

- ✓ El dilema "proceso-producto" se constituye como una de las principales dificultades que presentan los (las) estudiantes al trabajar con letras como números generalizados. Esta dificultad proviene del trabajo aritmético escolar que se desarrolla bajo una enseñanza tradicionalista, la cual solo se preocupa por hallar resultados numéricos.

- ✓ Otra dificultad principal que tienen los (las) estudiantes con el uso de las letras, radica precisamente en el significado que éstas tienen; esto es, los estudiantes no saben qué significan ni qué representan las letras en álgebra.

- ✓ El inicio del trabajo algebraico escolar desde la escuela primaria a través del reconocimiento y de la expresión de generalidad, desarrolla en los estudiantes habilidades de pensamiento matemático y contribuye al uso de las letras con comprensión y significado.

REFERENCIAS

Agudelo-Valderrama, C. (2002). *Promoción del pensamiento algebraico en la escuela primaria: una propuesta que cobra sentido de acuerdo con nuestras concepciones sobre el conocimiento matemático*. Aula Urbana. No 37, pp- 18-19

Pretexto, Grupo (1996). *La variable en matemáticas como problema puntual. Búsqueda de causas en octavo grado*. Informe final de investigación Cód. 11301004-92 (no publicado). Universidad Distrital, Colciencias, Bogotá.

Mason, J.; Graham, A.; Pimm, D. & Gowar, N. (1999). *Raíces del álgebra y rutas hacia el álgebra*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.