13. De la ecuación a la función: las primeras huellas del análisis

Jorge Enrique Mendoza Guzmán[1]

Resumen

En este artículo se muestra un análisis histórico relacionado con el paso de la ecuación a la función y su constitución como objeto matemático. Justamente, este tránsito es permeado por líneas de causalidad que, en cierta manera, se presentan como objetos auxiliares en la creación de un concepto.

Palabras clave: Historia de las matemáticas, análisis, ecuaciones, funciones, series de potencias.

Introducción

En este capítulo se aborda el movimiento evolutivo producido por la incorporación de ecuaciones algebraicas y su relación con las curvas. El punto terminal de estos cambios desemboca en el desarrollo de la noción de función, concepto cuyos principales precursores son Newton, Leibniz, Euler, Bernoulli y Cauchy. Aunque la formalización de dicho concepto presente huellas en la obra de Cauchy, se comparte lo expresado por Youschkevitch (1975) en el sentido de que

> la idea de función entendida de una u otra manera está implícitamente contenida en las reglas para medir áreas de las figuras más simples, tales como rectángulos, círculos, etc., conocida al principio de la civilización y las primeras tablas (algunas tablas son funciones de dos variables) de adición, multiplicación, división etc. (p. 40).

Para precisar el desarrollo del concepto de función, es necesario entrar en detalle con sus elementos primigenios como el concepto de variación, dependencia entre variables y cantidades, todo esto posteriormente desemboca en la creación del análisis matemático, donde el concepto principal es la noción de función.

La primitiva idea de *Cantidad variable*

Indudablemente, la manera de reconocer las curvas geométricas a través de ecuaciones algebraicas lleva implícitamente cierto sentido de dependencia entre valores conocidos y desconocidos (segmentos, para Descartes) como los puntos de la forma , los cuales son la base del sistema referencial bien sea oblicuo o perpendicular. A raíz de esto comienza a engendrarse la idea de la variación de magnitudes, es decir, dado un valor de obtener su respectivo ; esta idea es tratada por (Descartes R. , 1637) Los elementos primigenios de esta idea surgen cuando Newton establece la idea de variación entre cantidades expresadas mediante las fluentes, es decir, cantidades que varían de posición con respecto al tiempo.

Una conexión encontrada con la idea de variación respecto del movimiento se presenta en la forma de definir las curvas mecánicas; ha que recordar que éstas son generadas por dos movimientos independientes que produce la curva punto a punto. Precisamente, la variación de sus parámetros es la que permite relacionar e inferir dicha relación. Pero quien intenta establecer una definición para cantidad variables es Euler, quien define que una cantidad variable “es una cantidad indeterminada o universal la cual comprende por sí misma todos sus valores (Youschkevitch, 1975, p. 61).

El concepto de *función* en Newton y Leibniz

Entre los siglos XVII y XVIII, Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Von Leibniz (1646-1716) sistematizaron y enriquecieron un conjunto de técnicas provenientes de sus antecesores como la geometría analítica de Descartes, las tangentes de Fermat-Descartes, entre otros. En este sentido, desarrollaron unos potentes algoritmos que permitieron la solución de problemas como los centros de gravedad, áreas, volúmenes, tangentes, radios de curvatura, longitudes de arco, etc. De esta manera el legado teórico de Descartes permitió extender los conceptos y aportes matemáticos que desencadenaron la creación de una ciencia llamada el cálculo infinitesimal.

1 Licenciado en Matemáticas, Universidad del Valle. Estudiante de la Maestría en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Valle. Docente Pontificia Universidad Javeriana Cali

En el siglo XVIII el cálculo presentó conexiones con los fenómenos físicos, permitiendo el desarrollo de la mecánica, la óptica y astronomía. Posteriormente, todos estos desarrollos fueron aumentando y abriendo nuevos caminos del conocimiento matemático. Una de las ideas claves de todo este cúmulo de conocimiento se refiere a la idea de *función*. Precisamente, a quien se le acuña por primera vez el uso de dicho término es a Leibniz, quien expresa que la relación entre la ordenada y abscisa es representada por alguna ecuación conocida, otra clase de líneas las cuales, en una figura dada, forman una función (Youschkevitch, 1975, p. 56). Este reconocimiento permite inferir que Leibniz admite el sistema coordenado y que, a partir de este, existe una ecuación que satisface una relación entre sus componentes.

En cambio, Newton no realiza mención de esto, pero tiene implícitamente la dependencia entre variables y cantidades constantes; el sistema coordenado referencial no se distancia mucho del propuesto por Descartes, ni la notación usada. A los segmentos los llama usando las letras *x, y, z,* etc. mientras que las constantes *a, b, c,* etc. (Newton, 1711).

El concepto de función y el delineamiento del análisis matemático en los siglos XVIII y XIX

El desarrollo y la introducción de las curvas que involucran senos, cosenos y, en general, las correspondientes a las curvas mecánicas, abrió la posibilidad relacionada con la representación. Esto representó un problema puesto que el representar una cantidad expresada mediante una serie infinita permitía conocer una expresión analítica. A partir de esto surge cierto interés por encontrar expresiones más generales que permitan relacionar cantidades[2]. Precisamente, Johann Bernoulli (1694- 1718) encuentra una de estas representaciones la cual denota una fórmula general que relaciona todas las cuadraturas.[3]

$$int.\,n\,dz = nz - \frac{1}{2}zz\frac{dn}{dz} + \frac{1}{1.2.3}\frac{z^3ddn}{dz^2} - \frac{1}{1.2.3.4}\frac{z^4dddn}{dz^3} + \cdots$$

Aparentemente esta serie admite la expansión de una cantidad como una expresión analítica arbitraria; sin embargo, la fórmula presenta problemas en el caso de considerarse ecuaciones de la forma $\frac{a}{x^n}, a \neq 0$ (Mendoza-Guzmán, 2013, p. 4) Una de las primeras definiciones dadas acerca de que es una función, fue establecida por Johann Bernoulli en 1718, quien define una función en lo siguientes términos:

Definición 1. Se llama función de una o varias variables a una cantidad compuesta de cualquier manera. Se llama función de una variable a una cantidad compuesta, de manera que sea, por esa variable y por constantes (citado por Youschkevitch, 1975, p. 60).

Esta definición admite la manera de crear funciones bajo condiciones de composición entre cantidades variables y constantes; sin embargo, cabe preguntarse si las series de potencias constituían en sí una función. Precisamente, quien considera que las series de potencias son funciones es Leonhard Euler (1707-1783); él brinda una segunda definición de lo que es función, aunque, si se le analiza respecto de la dada por Bernoulli, discrepa un poco debido a que admite el término *función analítica*. En términos generales, pareciera ser que las funciones podían ser obtenidas mediante la aplicación de las propiedades aritméticas conocidas (suma, multiplicación, división y radicación) sin importar si la cantidad de términos era finita o infinita.

Definición 2. Una función de cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera por esta cantidad variable y por números o cantidades constantes (citado por Youschkevitch, 1975, p. 61).

El desarrollo del concepto de función ha estado amarrado a la forma de quienes han intentado y establecido una definición (explícita, implícita o intuitivamente) de acuerdo con sus líneas de desarrollo, su aplicabilidad en la resolución de problemas y formalización del análisis matemático. A continuación se han recogido las diferentes definiciones que se han dado de función a lo largo de

2 En el sentido de Newton, se habla de encontrar fórmulas generales, como el binomio, que permiten acoger un gran número de curvas.

3 Otro de los resultados que giran alrededor de este trabajo y que apoyan nuestra tesis principal es la publicación de otro artículo “A generalization of integrals by the formula of integration by parts” (ANEXO I) en el cual se encuentra una manera alternativa para deducir la fórmula de Bernoulli. Se ha encontrado que ésta fórmula, para algunas funciones presenta problema respecto a la convergencia. La serie hallada puede reescribirse como $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f^n(x) x^{n+1}}{(n+1)!} + C$ (Mendoza- Guzmán II, 2013, p. 4).

un periodo de 200 años. Entre éstas se destacan las definiciones dadas por Nicolás de Condorcet (1743-1794), Joseph Lagrange (1736-1813), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768- 1830), Gustave Dirichlet (1805-1859), Augustin Louis Cauchy (1789- 1857) y Nicoles Bourbaki (1939- 1967).

Por ejemplo, Nicolás de Condorcet (1743-1794) intenta dar una definición de función en la que ofrece una caracterización de la dependencia entre y ciertas cantidades.

Definición 3. Asumo que tengo un cierto número de cantidades *x, y, z …* y para cada valor definido de *x, y, z,, F* tiene uno o más valores definidos correspondientes a ellos; yo digo que es una función de *x, y, z* (Condorcet, citado por Youschkevitch, 1975, p. 75).

Joseph Lagrange expone que

Definición 4. A cualquier expresión del cálculo en la cual esas cantidades entran de manera cualquiera, mezcladas o no con otras cantidades que miramos como teniendo valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones consideramos solo las cantidades que suponemos variables sin ninguna mirada a las constantes Lagrange, citado por (Youschkevitch, The Concept of function up to the Middle of the 19th Century, 1975)

En palabras de Jean Baptiste Joseph Fourier,

Definición 5. En general, la función $f(x)$representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario. Dados una infinidad de valores de la abscisa , hay un número igual de ordenadas f $f(x)$. Todas tienen valores numéricos, ya sean positivos, negativos o cero. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen unas a otras de una forma cualquiera y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad sola (citado por Ruthing, 1984, p. 73).

Ahora bien, para Peter Lejeune Dirichlet

Definición 6. *y* es una función de una variable en un intervalo $a < x < b$, si para cada valor de la variable *x* en este intervalo corresponde un valor definido de la variable *y*, sin importar de qué forma esta correspondencia es establecida. (Dirichlet, citado por Youschkevitch, 1975, p. 78).

Augustin Louis Cauchy plantea que

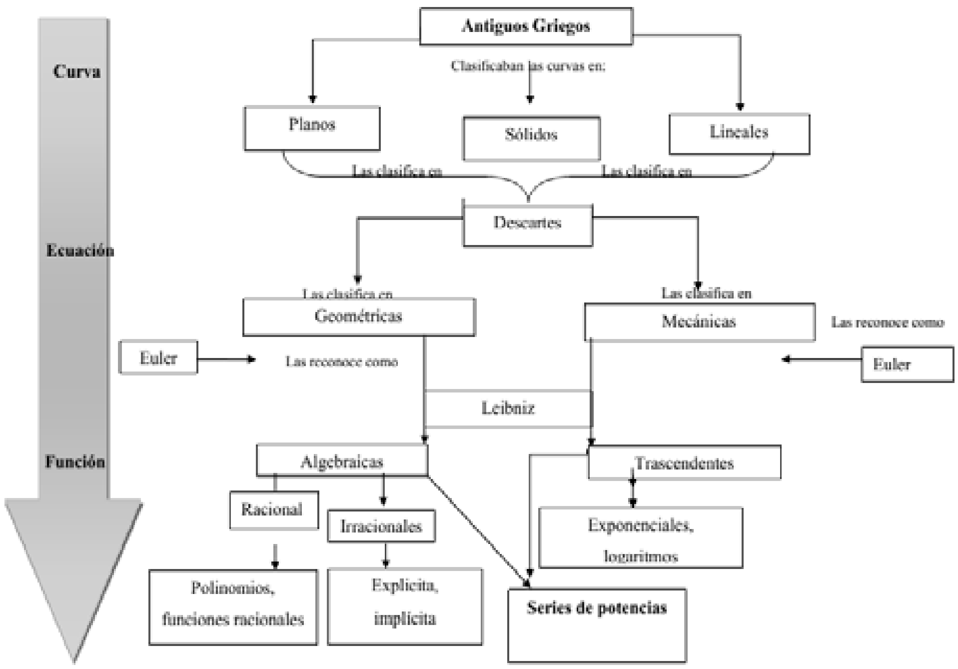
Definición 7. Cuando cantidades variables están relacionadas entre sí de tal manera que los valores de algunos de los unos se dan, puede encontrar todos los demás, consideramos estas distintas cantidades que se expresa por medio de varios de ellos que, por lo tanto, toman el nombre variables independientes. Las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente se denominan funciones de esas mismas variables (Cauchy, 1821, p. 17).

Todas estas definiciones muestran que el concepto de función ha ido evolucionando, pasando por consideraciones como expresión analítica con dependencia e independencia de sus términos (constantes y variables). Pero a raíz de la admisión de ciertas funciones como las trascendentes y de funciones definidas a trozos, se comienzan a clasificar las funciones.

Descartes (1637) es el primero en dar una clasificación para las curvas conocidas: geométricas y trascendentes (p. 44). Pero el clasificar las curvas no implicaría necesariamente clasificar funciones; sin embargo, es Euler quien brinda una clasificación un poco más formal para las curvas, todo esto precedido por la clasificación de Leibniz. Si se analizan las líneas de desarrollo para el objeto curva proveniente desde la concepción de los antiguos hasta Descartes, estas corresponden al primer movimiento curva-ecuación, sumado al segundo movimiento correspondiente desde Descartes a ecuación y función. El siguiente cuadro muestra las líneas de desarrollo desde los antiguos, pasando por Descartes hasta Euler y la instauración de la función que ha sufrido el objeto curva. Como base se toma el itinerario curva-ecuación- función.

El siguiente cuadro muestra la forma como las curvas comienzan a caer y a tener acogida bajo ciertas líneas que permitieron un desarrollo más formal.

Como primera parte, la concepción de los griegos hacia las curvas permitió distinguir la primera clasificación de la curvas (problemas planos, sólidos y lineales). Posteriormente, Descartes acoge esta concepción y clasifica las curvas geométricas y mecánicas, mientras que en la línea de desarrollo de las curvas geométricas se conciben las curvas algebraicas, racionales, irracionales, polinomios infinitos (series de potencias) caracterizadas por Euler y, por otra parte, la línea de desarrollo de las curvas mecánicas (trascendentes) nombradas por Leibniz e identificadas por Euler que sucumben los logaritmos, exponenciales, así como las series infinitas y de potencias. Notemos como este desarrollo se encuentra enmarcado en el itinerario curva, ecuación y función, las series de potencias aparecen como una herramienta alternativa que acogen gran cantidad de curvas que los matemáticos usan actualmente.



Fuente: Elaboración propia

La convergencia de las series en Cauchy

En su curso de análisis de 1821, Augustin-Louis Cauchy (1821) sistematiza el conocimiento matemático que desemboca en la creación del análisis. En su libro, dedica un capítulo especialmente al formalismo de las series infinitas y a definir mediante supuestos algebraicos, un tanto alejados de lo geométrico, cuándo una serie converge o diverge.

Primero que todo, Cauchy considera una serie como una secuencia indefinida de cantidades que siguen una determinada ley de formación. Bajo esta concepción define la suma de la serie S_n, la cual se constituye como la suma de los primeros n elementos de las cantidades dadas, de la forma $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$. Si esta suma tiende a un cierto límite S, entonces converge; de lo contrario, diverge. Todo esto permite evidenciar que el tratamiento inicial para las series en Cauchy está determinado a separar las series en dos grupos: convergentes y divergentes. Con Cauchy se desliga la idea de obtener nuevas representaciones de ecuaciones amarradas a las cuadraturas; por ello, una de las ideas claves se da cuando se establece que, si se tiene la serie de cantidades de la forma $1.x, x^2, x^3, \ldots$, su respectiva suma corresponderá a $\frac{1}{1-x}$.

La representación de un objeto estaría amarrada a establecer y asociarle una cantidad para ciertos valores de x. Uno de los hechos de gran importancia respecto del tratamiento de las series es el reconocimiento entre los distintos valores que puede adquirir una serie. Para ello Cauchy realiza un análisis particular para los valores que puede tomar la siguiente serie y se pregunta por su respectiva suma: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 0$ (Modernamente sabemos que). El análisis, en este caso, corresponde a suponer cuando *x>1,x=1,x<1,* en los dos primeros casos la serie diverge, mientras que en el tercer caso realiza la siguiente cadena de comparaciones.

Cauchy aprovecha el hecho de tomar valores menores que uno, puesto que estos permiten obtener que, a medida que *n* sea muy grande, la suma sea infinitamente pequeña. Con esto se comienza a evidenciar la idea de límite.

$$x^n < x^n + x^{n+1} = x^n\frac{1-x^2}{1-x} < x^n + x^{n+1} + x^{n+2} = x^n\frac{1-x^3}{1-x} < \cdots$$

Cauchy caracteriza las series de términos positivos y establece algunos teoremas de convergencia. Históricamente, la propuesta de Cauchy constituye un punto de quiebre en la constitución del análisis como rama de las matemáticas, al cimentarla sobre unas bases sólidas a partir del concepto de función y límite.

Al introducir una definición de límite que prefigura su tratamiento en términos de inecuaciones, se puede afirmar que los trabajos de Cauchy abren perspectivas del desarrollo de las funciones en series de potencias. A partir de Cauchy empieza a discutirse el problema de la convergencia puntal y la convergencia uniforme.

Como antesala a esta discusión, Cauchy establece y demuestra los criterios de convergencia para series de términos positivos. A continuación se muestra algunos conocidos:

- El criterio de la raíz (Cauchy, 1821, p. 91), en el que se establece que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ es convergente si $\limsup \sqrt[n]{|u_n|} < 1$ y es divergente si $\limsup \sqrt[n]{|u_n|} > 1$

- El Criterio de la razón (Cauchy, 1821, p. 92) establece que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ es convergente para valores crecientes de *n* en la proporción $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ cuando el $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, cuando *k<1*; en caso contrario, diverge.

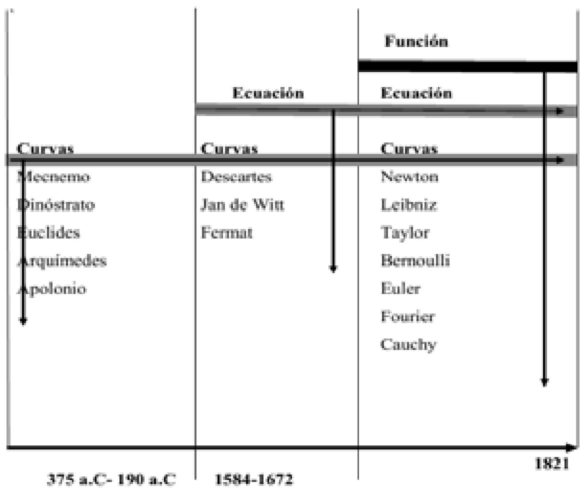
- El Criterio de comparación (Cauchy, 1821, p. 93) establece que si $u_{n+1}>u_n>0$ entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n u_{2^{2n}}$ converge; en caso contrario, no.

- El Criterio del logaritmo (Cauchy, 1821, p. 94) establece que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ es convergente para $\frac{\ln u_n}{\ln(\frac{1}{n})}$ cuando el límite es un valor finito *h*, para valores crecientes de *n*. Converge cuando *h<1* ; diverge cuando *h>1*

Finalmente, el Criterio de la serie alterante (Cauchy, 1821, p. 98) establece que si el valor numérico del término general u_n decrece constantemente e indefinidamente para valores crecientes de *n* y si además los diferentes términos son alternados positivos y negativos, entonces la serie converge.

Conclusiones

Una de las características más importantes encontradas en el trabajo es la aparición reincidente de las curvas (tanto geométricas como mecánicas), provenientes de la antigüedad hasta nuestros días. Precisamente, el siguiente diagrama permite ver un poco esto y evidencia la forma como la noción de curva se encuentra presente a lo largo del desarrollo del análisis:



Fuente: Elaboración propia

En el cuadro anterior se han delimitado tres espacios temporales relacionados con la aparición de este estudio: la curva, la ecuación y la función. La primera etapa corresponde al periodo entre 375 a.C y 190 a.C, donde justamente se permea el objeto curva y la manera como los antiguos la utilizaban para resolver problemas. El segundo periodo corresponde que abarca entre 1584 y 1672, donde se tienen indicios de la aparición de la representación de curvas mediante ecuaciones algebraicas.

El tercer periodo abarca hasta el año 1821 con el primer curso de análisis propuesto por Cauchy. Posteriormente se identifican las respectivas líneas de desarrollo de cada concepto amarradas a los diferentes aportes de sus autores. Esto se constituye en algo de gran importancia en la instauración del concepto de función.

De esta manera, en la línea de desarrollo del análisis se distingue la curva como un objeto presente en toda su línea de desarrollo, después aparece la ecuación algebraica que subsidia las curvas y al final *la función*, la cual estaría en la intersección de la curva y la ecuación. En todo este desarrollo presentado a lo largo del trabajo siguiendo el circuito curva-ecuación-función se evidencia que el objeto serie se vuelve transversal cuando las técnicas y métodos desarrollados no son suficientes en el sentido de producir y resolver problemas.

Todo esto gradualmente va permeando el desarrollo de la matemática de cierta manera transversal, es decir, existen unos saltos temporales y cognitivos que no permitieron que dicho desarrollo fuese continuo; conviene reconocer que las dificultades encontradas en la línea de evolución del concepto son determinantes en la transversalidad. Por ejemplo, al objeto curva le correspondió un gran salto temporal respecto de su representación, el paso de lo sintético a lo analítico y la manera de amarrar ecuaciones a las curvas.

La linealidad de su desarrollo se ve frenada en función de la solución de los tres problemas clásicos de la antigüedad griega. Sin embargo, es Descartes quien soluciona este impase. Por otra parte, el problema de realizar cuadraturas de figuras curvilíneas comienza a gestarse en Wallis y su manera de operar razones de series numéricas. Pero este a su vez tiene una idea intuitiva de convergencia, la cual representa cierto problema de rigor. Posteriormente, Newton y Leibniz inauguran la introducción de las series de potencias para resolver cuadraturas, pareciera ser que las series representan una herramienta que permite dar solución a problemas que los métodos tradicionales no podían sustentar.

REFERENCIAS

Cauchy, A. (1821). *Cauchy´s Course d´analyse.* (J. Buchwald, Ed., R. E. Bradley, & C. E. Sandifer, Trans.) New York: Springer.

Descartes, R. (1637). *La geometría.* (J. M. Ron, Ed., & G. Quintás, Trans.) España: Opera Mundi.

Ferraro, G. (2008). *The rise and development of the Theory of Series up to the Early 1820s.* New York: Springer.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A Brief Survey. College Mathematical Journal.

Mendoza- Guzmán II, J. E. (2013, Mayo). A generalization of integrals by the formula of integration by parts. *Revista Digital 360°, 8*.

Newton II, I. (2001). *Tratado de método de series y fluxiones.* (M. Panza, Ed.) México: Mathema.

Newton III, I. (1711). *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias con una enumeración de las líneas de tercer orden.* (A. J. Duran Guardeño, F. J. Pérez Fernandez, Eds., & J. L. Arantegui Tamayo, Trans.) Real Sociedad Matemática Española SAEM " Thales".

Ruthing, D. (1984). Some Definitions of the Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki. *Math Intelligencer, 6*, 72-77.

Youschkevitch, A. (1975). The concept of function up to the Middle of the 19th Century. Moscow : Institute for History of Science and Technology editorial.