COMUNICACIÓN BREVE
UN APLICATIVO PARA LA ENSEÑANZA DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DEL CONSUMO EN ECONOMÍA EMPLEANDO MATHEMATICA®

Nicolás Marciales Parra
Matemático
Universidad Santo Tomás Sede Bogotá
nicolasmarciales@usantotomas.edu.co

Resumen

El presente trabajo ilustra el desarrollo de un aplicativo en Mathematica ®, para mostrar el problema de optimización del consumidor. En él se tiene una representación gráfica en el espacio y en el plano cartesiano de las funciones involucradas en el problema, junto con las variaciones de los parámetros que se trabajan en forma interactiva. Con esta herramienta computacional, se contribuye a mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de áreas relacionadas con la optimización estática para de los estudiantes de pregrado de economía e ingeniería industrial.

Palabras clave: Consumidor, Mathematica, Microeconomía, Optimización, Utilidad.

Abstract

The present work illustrates an applicative development in Mathematica® to shows the consumer optimization problem. There is a graphic representation in the space and Cartesian plane about functions involved in the consumer problem inside it, furthermore it shows variations over functions in an interactive way. Computational tool contributes to improve teaching – learning process of static optimization and related areas for economics and industrial engineering undergraduate students.

Key words: Consumer, Mathematica, Microeconomics, Optimization, Utility

INTRODUCCIÓN

La microeconomía neoclásica como parte del estudio de la economía, es un área fundamental para que el estudiante comprenda las características de los objetos económicos desde un punto de vista no agregado. Dentro de ésta, se analiza el problema que subyace por las características de cada individuo como consumidor de bienes y servicios en términos de su elección, sus preferencias y su renta.

El problema a desarrollar se plantea usualmente en un curso básico de microeconomía, sin embargo, para su análisis es necesario emplear herramientas matemáticas que se encuentran en un curso de cálculo vectorial, estas son el estudio de las funciones multivariadas y la optimización de las mismas con restricciones de igualdad.

Dado que los textos sobre los cuales se desarrolla un curso de microeconomía básico, no contienen el formalismo matemático para describir las características que subyacen dentro del uso de funciones multivariadas (no están escritos para enseñar matemáticas), se presenta la necesidad de ilustrar al estudiante la relación que existe entre las funciones económicas que él usa y las funciones en varias variables, su representación gráfica y las variaciones de los parámetros de las mismas.

Con este fin, el software Mathematica® posee dentro de sus comandos uno que puede describir las variaciones de los objetos con respecto a diferentes parámetros, el comando Manipulate, que se constituye en una base para realizar algunas de las demostraciones, con las que se puede explorar visualmente ideas en Mathematica®. Con ayuda de este comando, se crea una herramienta gráfica que puede contribuir en el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes de economía e ingeniería industrial que exploran particularmente el problema de la maximización en el contexto mencionado anteriormente.

DESARROLLO

Presentación del problema.
Conforme a la teoría microeconómica convencional, le concierne a esta el estudio del comportamiento individual de los actores económicos, la agregación de sus acciones y los posibles resultados que ellos obtienen por la acción de otros (Kreps, 1990). Desde una perspectiva tradicional, los actores económicos se pueden dividir entre consumidores y empresas (para este caso solo se tendrá en cuenta a los consumidores). Estos actores económicos tienen un comportamiento completamente racional y toman decisiones (en el caso de los consumidores, se tiene una relación de preferencia que simula el gusto entre los bienes que puede elegir para consumir). Adicionalmente, la teoría neoclásica supone que los individuos con características similares se comportan de la misma forma, lo que supone la existencia de un agente representativo, que en condiciones ideales representa a cada consumidor.

El consumidor posee preferencias sobre los bienes factibles que va a consumir, esto se denomina relación de preferencia racional[18]. Basado en la relación de preferencia se construye una función de utilidad del consumidor definida de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que convierte la ordinalidad de la relación de preferencia en valores sobre $\mathbb{R}$. Esto es, si $\preccurlyeq$ representa la relación racional de preferencia del consumidor y es continua[19], entonces existe una función de utilidad definida que cumple que: $x \preccurlyeq y \Rightarrow U(x) \leq U(y)$. Esto hace que si existen dos bienes, la función de utilidad se representa como una superficie en el espacio. Las características sobre las funciones de utilidad del individuo son numerosas, conforme a lo que se desee analizar de las mismas (creciente, convexa ó cuasiconvexa, diferenciable, entre otras).

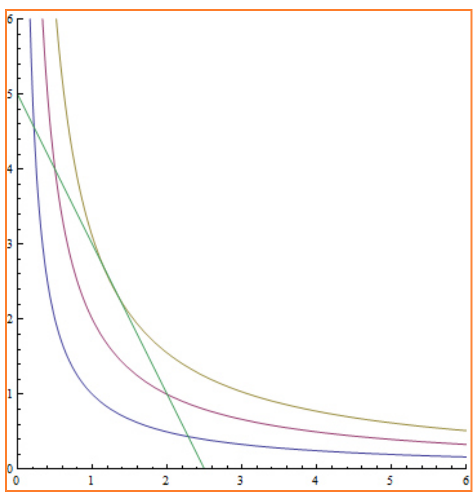

Figura 1. Un ejemplo de una gráfica similar a las propuestas por los textos de microeconomía sobre el problema de la maximización de la utilidad

Empleando la función de utilidad del consumidor, se introduce el estudio del problema de decisión del consumidor: Dada una función de utilidad $U(x)$, el problema del consumidor de buscar su cesta de consumo preferida, dado un vector de precios p y un nivel de renta m, se puede resolver mediante el problema de maximización:

[18] Relación binaria sobre vectores de $\mathbb{R}^n$ que debe cumplir completitud: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \; x \preccurlyeq y$ ó $y \preccurlyeq x$ junto con la transitividad.

[19] Para toda sucesión de parejas ordenadas (x_n, y_n) donde $x_n \preccurlyeq y_n$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$; $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ entonces se tiene que $x \preccurlyeq y$

$$\max_{x \geq 0} U(x)$$
s.a
$$x \cdot p \leq m$$

Para una simplificación del problema, suponemos que el consumidor emplea todo su nivel de renta, la restricción, llamada restricción presupuestal, se convierte en igualdad, lo que implica que el problema puede ser resuelto por el método de multiplicadores de Lagrange.

La representación gráfica usual del problema anterior, se hace a través del desplazamiento de las curvas de indiferencia (las curvas de nivel de la función de utilidad) dada la restricción presupuestal fija. Como se observa en la figura 1. En libros con rigor matemático (Mas-Colell, Winston, & Green, 1995; Jehle & Reny, 2001) el problema se resuelve analíticamente[20], sin embargo, no existen representaciones gráficas sobre las funciones de utilidad y su relación con el desplazamiento de las curvas de indiferencia.

Construcción en Mathematica.

Existen una gran variedad de software científico especializado para realizar diferentes tareas, sin embargo, existen pocos donde el usuario puede interactuar en forma tan variada como lo permite Mathematica, sin necesidad de emplear un lenguaje de programación como C o Java. Aunque otros software están en capacidad de realizar interacciones con los usuarios en diferentes formas (botones, mouse, barras de desplazamiento, etc.), Mathematica permite hacerlo en forma más sencilla[21].

El comando *Manipulate* en su forma simple viene dado por la instrucción:

Manipulate[*expr*,{u,u_{min},u_{max}}]

Donde *u* representa el parámetro que se quiere variar sobre el objeto llamado *expr*. Dado que el objetivo principal de la demostración es permitir que el estudiante observe los cambios sobre la función de utilidad, sus curvas de indiferencia y la restricción presupuestal del consumidor, lo que se desea ilustrar son los cambios en gráficas de superficies y curvas en el plano cartesiano.

Las funciones de utilidad para dos bienes frecuentemente usadas en microeconomía son de tres tipos[22]:

1. Cobb – Douglas: $f(x,y) = A\,x^{\alpha}y^{1-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$.
2. CES: $f(x,y) = (x^{\alpha} + y^{\alpha})^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$
3. Leontieff[23]: $f(x,y) = \min\ \left\{\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}\right\}$, con $0 < \alpha, \beta < 1$

Donde x e y corresponden a las cantidades consumidas de los bienes 1 y 2. Se supone además que se tiene un nivel de utilidad constante para construir una curva de indiferencia, esto es un plano paralelo al plano *xy*, y para complementar el problema una restricción presupuestal:

[20] En economía se llaman demandas marshallianas a la funciones solución del problema de maximización de la utilidad en términos de los precios y la renta.

[21] Aunque posee una estructura diferente a la mayoría, algunos procesos se pueden realizar en menor cantidad de líneas de código.

[22] En algunos apartes de la teoría microeconómica se requiere que las funciones sean homogéneas de grado 1, por tanto los parámetros de las funciones deben ajustarse para tal fin, aunque no siempre se tienen.

[23] En Varian(1996) la función Leontieff viene dada por: $f(x,y) = \min\ \{ax, by\}$, sin embargo la presentación dada es más conveniente para unificar parámetros.

$p_1 x + p_2 y = m$

Donde p_1, p_2 representan los precios de los bienes 1 y 2, y una renta m.

Como se quiere que el estudiante pueda elegir entre los tres tipos de funciones, se construyen dos listas de tres elementos cada una, donde la primera está compuesta por las superficies respectivas, y la segunda por las curvas de nivel de cada una en forma paramétrica (Mathematica no permite expresar relaciones que no son funciones de forma directa y por ello es necesario escribirlas paramétricamente principalmente por la curva de nivel de la función de utilidad de tipo Leontieff, la cual no es en sentido estricto, una función $y = f(x)$ en el plano cartesiano, a diferencia de las otras dos).

Finalmente se ubican y etiquetan los controles que permiten interactuar con los parámetros de las funciones y sus curvas de nivel. El resultado es el siguiente código en Mathematica:

```
Manipulate[
 funciones =
  List[2 x^alfa*y^(1 - alfa), (x^alfa + y^alfa)^(1/alfa),
   Min[x/alfa, y /beta]];
 curvasindiferencia =
  List[{t, (curva/(2 t^alfa))^(1/(1 - alfa))}, {t, (curva^alfa -
      t^alfa)^(1/alfa)}, {{curva*alfa + t, curva*beta}, {curva *alfa,
     curva*beta + t}}];
 Grid[{{
    Show[
     Plot3D[funciones[[tipo]], {x, 0, 10}, {y, 0, 10},
      PlotStyle -> FaceForm[Yellow, Orange], PlotRange -> {0, 20},
      Mesh -> 7, ImageSize -> Medium],
     Plot3D[curva, {x, 0, 10}, {y, 0, 10},
      PlotStyle -> FaceForm[Red, Orange], PlotRange -> {0, 20},
      Mesh -> 7, ImageSize -> Medium],
     ParametricPlot3D[{t, -(p1/p2)* t + presupuesto/p2, z}, {t, 0,
       20}, {z, 0, 20}, PlotRange -> {{0, 10}, {0, 10}, {0, 10}},
      Mesh -> 7]
     ],
    ParametricPlot[{curvasindiferencia[[
       tipo]], {t, -(p1/p2)* t + presupuesto/p2}}, {t, 0.01, 15},
     ImageSize -> Medium, PlotRange -> {{0, 15}, {0, 15}}]
    }}],
 {{tipo, 1, "Función de Utilidad"}, {1 -> "Cobb-Douglas", 2 -> "CES",
   3 -> "Leontieff"}, ControlType -> PopupMenu},
 {{alfa, 0.5}, 0.01, 0.99, 0.01, Appearance -> "Labeled"},
 {{beta, 0.5}, 0.01, 0.99, 0.01, Appearance -> "Labeled"},
 {{curva, 1, "Nivel de Utilidad"}, 1, 20, Appearance -> "Labeled"},
 {{p1, 1, "Precio del bien 1"}, 0.1, 5, Appearance -> "Labeled"},
 {{p2, 1, "Precio del bien 2"}, 0.1, 5, Appearance -> "Labeled"},
 {{presupuesto, 0, "Renta"}, 0, 50, Appearance -> "Labeled"},
 ControlPlacement -> Left
 ]
```

Con el código anterior, se obtiene una demostración en Mathematica que tiene la siguiente presentación:

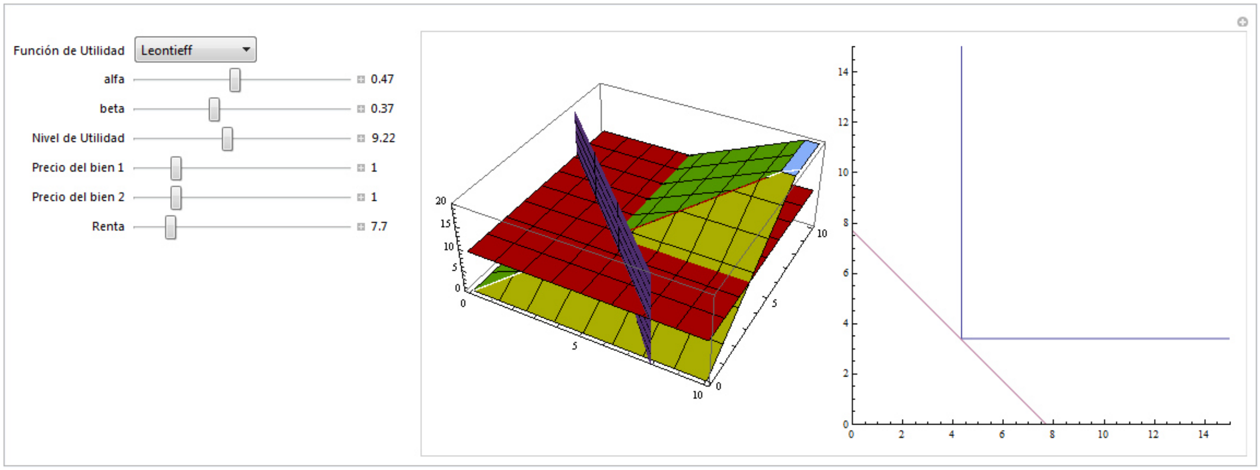

Figura 2. Función de Utilidad Leontieff

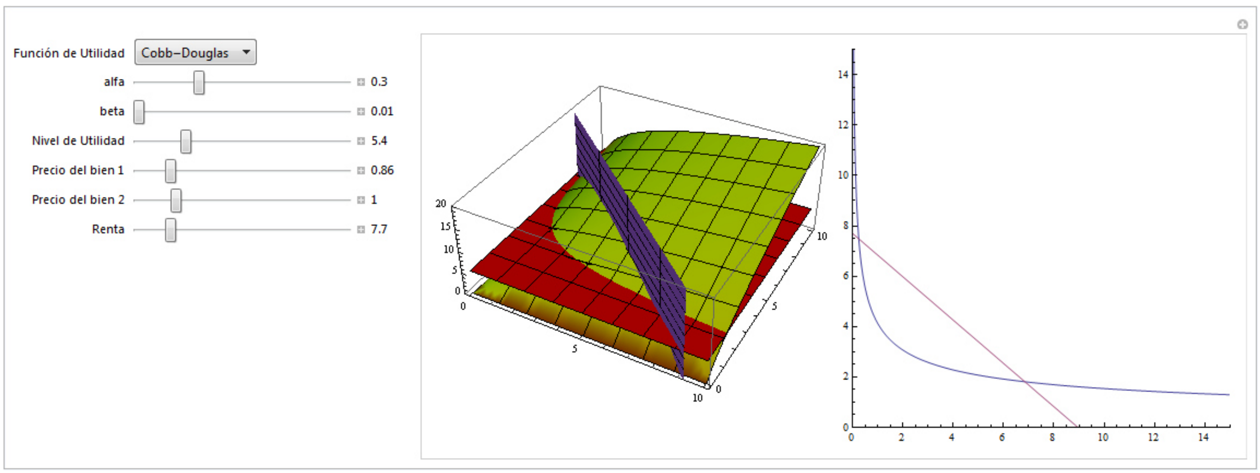

Figura 3. Función de utilidad Cobb – Douglas

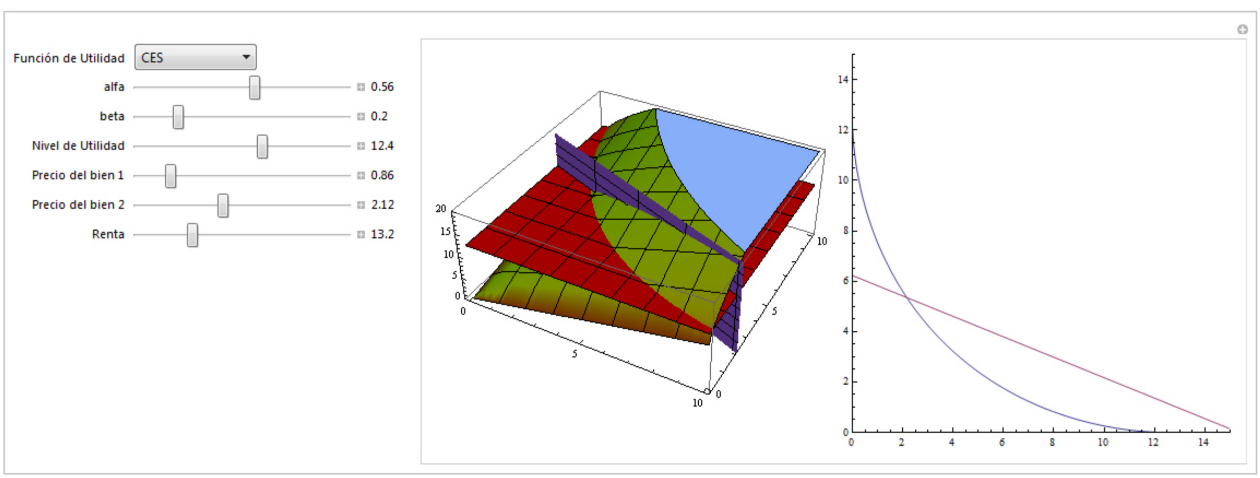

Figura 4. Función de utilidad CES

CONCLUSIONES

El uso de las TICs para la enseñanza todavía tiene muchas ramas abiertas, más cuando las herramientas son interactivas para el usuario. Se ha elaborado una demostración en Mathematica el cual es un software que tiene un gran potencial para elaborar demostraciones para complementar la enseñanza universitaria de muchas áreas del conocimiento, y que para el caso particular, permite complementar la teoría usual de los textos en microeconomía. Esto no significa que sea una única herramienta para enseñar el problema del consumidor, es fundamental que un docente explique el problema en forma apropiada y rigurosa, pero esta herramienta puede contribuir a afianzar al estudiante conceptos que son de gran importancia en las áreas del conocimiento que se trabajan.

Visto desde la perspectiva de la teoría microeconómica, es un aplicativo que ilustra una primera aproximación al problema del consumidor, por tanto, futuros trabajos pueden complementarse con la ubicación interactiva del punto óptimo de la solución del problema, ilustrar las demandas marshallianas, el efecto sustitución y efecto renta, así como la tasa marginal de sustitución y otros conceptos económicos que se derivan del problema de elección del consumidor y de su función de utilidad, sin dejar de lado el rigor que demandan.

BIBLIOGRAFÍA

Jehle, G., & Reny, P. (2001). Advance Microeconomic Theory. Addison Wesley.

Kreps, D. M. (1990). A Course in Microeconomic Theory. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Mas-Colell, A., Winston, M., & Green, J. (1995). Microeconomic Theory. New York: Oxford University Press.

Varian, H. R. (1996). Microeconomia Intermedia. Un Enfoque Actual. Cuarta Ed. Barcelona: Antoni Bosch Editor S.A.