COMUNICACIÓN BREVE
TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES EN COORDENADAS POLARES

William Alfredo Jimenez
Magister en Docencia de las Matemáticas
Profesor del Instituto Pedagógico Nacional
Profesor Catedrático de la Universidad Distrital
Coordinador del grupo Talento Matemático del IPN
williamajg@hotmail.com

Laura Alejandra Mayorga Cadavid, Juan Pablo Ahumada López, Alejandro Cuchigay
Estudiantes de Grado Undécimo del Instituto Pedagógico Nacional
Integrantes del grupo Talento Matemático del IPN
lauramayorgac@hotmail.com, juan_pabloahu28@hotmail.com, thekill.93@hotmail.com

Resumen

En este documento se socializan algunos resultados obtenidos por los estudiantes que conforman el grupo *Talento Matemático* del Instituto Pedagógico Nacional, del estudio de las transformaciones de funciones polares como: traslaciones, reflexiones y homotecias; haciendo uso de la calculadora TI-92, Geogebra, Derive y basados, específicamente, en el comportamiento y características que éstas mantienen a partir de las relaciones que se pueden establecer con las funciones en coordenadas cartesianas cuando se someten a transformaciones rígidas

Palabras clave: Transformaciones de funciones en coordenadas polares.

Abstract

In this document you can see the results found by students who are part of the *"Talento Matemático"* group of Instituto Pedagógico Nacional, the results of the study are about function transformations in the polar coordinate system like: translations, reflections and dilation; using TI-92 calculators, Geogebra, Derive and specifically based in the behavior and the characteristics transformations have from the relations can be established with functions in Cartesian coordinates when they are intro rigid transformations.

Key words: Function transformations in the polar coordinate system

INTRODUCCIÓN

La situación problema asociada con los resultados que a continuación se presentan consiste en comparar las transformaciones aditivas y multiplicativas de funciones, a partir de la representación gráfica de un conjunto de puntos en el sistema de coordenadas cartesianas y polares, de tal manera que se pueda establecer si las propiedades de las transformaciones de funciones en coordenadas rectangulares se mantienen o no, respecto de las transformaciones en coordenadas polares.

En el sistema de coordenadas cartesianas las transformaciones aditivas y multiplicativas, independientemente de la función a la cual sean aplicadas, se manifiestan en su representación gráfica a través de movimientos rígidos como: translaciones, reflexiones o transformaciones de expansión o compresión. Lo cual se describe de manera más formal en los siguientes párrafos.

DESARROLLO

Transformaciones Aditivas

Dada la función $y=f(x)$ en coordenadas cartesianas y las transformaciones $y_1=f(x+a)$ o $y_2=f(x)+b$, se tiene que y_1 es una translación horizontal de la función y, a unidades y, y_2 es una translación vertical de y, b unidades (Stewart, 2007).

Ahora, si se analizan este tipo de transformaciones en coordenadas polares se obtienen los siguientes resultados:

Dada la función $r=s(\vartheta)$ en coordenadas polares, la transformación $r_1= s(\vartheta)+b$ resulta ser una expansión de la función s que no mantiene constante la forma; contrario a lo que sucede en coordenadas cartesianas, ya que tal transformación sí mantiene la forma de la función y.

Al realizar un análisis de estas transformaciones en los dos sistemas de coordenadas, se concluye que la distancia entre y y y_2 es $|b|$, propiedad que se mantiene en coordenadas polares, ya que la distancia de un punto P en $r=\vartheta$, $r=sen(n\vartheta)$ o $cos(n\vartheta)$, y en $r=\vartheta+b$, $r=sen(n\vartheta) + b$ o $cos(n\vartheta)+b$, es igual al $|b|$, a pesar que la función no mantenga su forma; como se ilustra en la *figura 1*.

El corte en el eje polar se consigue remplazando a ϑ por 0 y sumando b unidades; por ejemplo, para el caso de las funciones de la forma $r=a\vartheta^n +b$ el corte en el eje polar es b, además el mayor cambio de forma de la función $r=\vartheta^n$ se presenta en $r=\vartheta^n-\pi$.

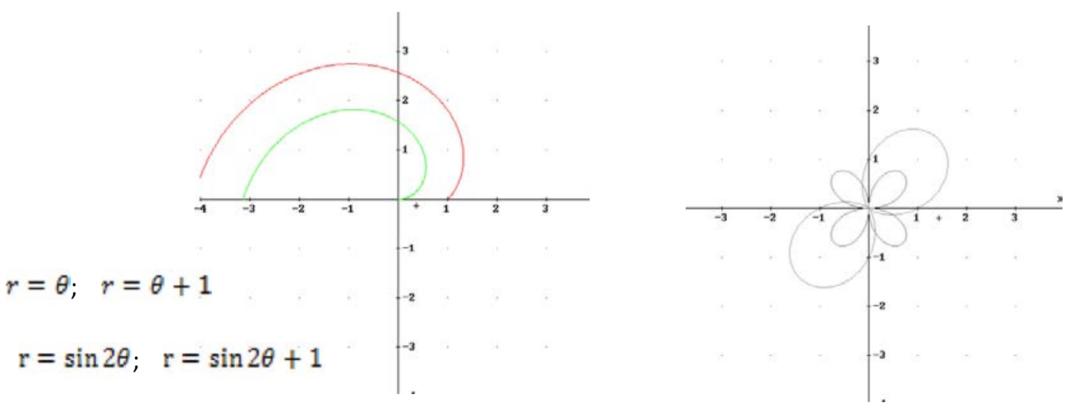

Figura 1. Transformaciones aditivas en cordenadaspolares

Transformaciones Multiplicativas

Dada la función $y=f(x)$ en coordenadas cartesianas y las transformaciones $y_1=f(xa)$ o $y_2=f(x)b$, con $a>0$ y $b>0$ se tiene que y_1 es una expansión o compresión horizontal de la función y, por un factor a y, y_2 es una expansión o compresión vertical de y, por un factor b. Si $b=-1$ entonces y_1 es una reflexión de la función con respecto al eje y, además y_2 es una reflexión sobre el eje x (Stewart, 2007)

Al hacer una transformación multiplicativa en el plano polar tal que $a < 0$; se obtiene la gráfica de la función con $|a|$, y se le aplica una reflexión en el eje polar y otra sobre la recta perpendicular al eje polar que pasa por el origen.

Si analizamos este tipo de transformaciones en coordenadas polares, se observa que la representación gráfica de la función en cuanto a su forma se mantiene exactamente igual, pero es mas grande; lo que se presenta en la *figura 2* en donde se ilustra la función y su transformación con diferente *zoom* en coordenadas polares.

Los cortes en el eje polar al aplicar este tipo de transformaciones se obtienen, al igual que en el caso anterior, remplazando a ϑ por *0* y multiplicándole *a* unidades, por ejemplo en el caso de las funciones de la forma $r=\vartheta^n$ es *0*.

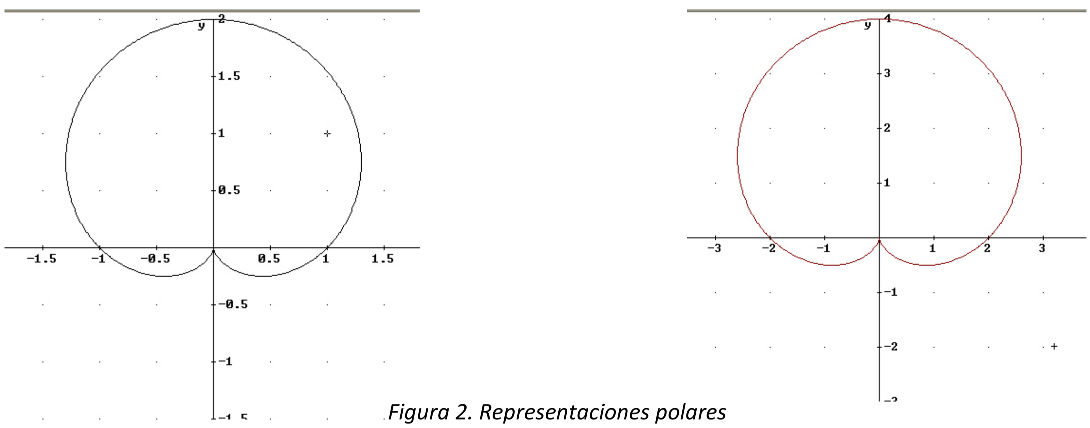

Figura 2. Representaciones polares

CONCLUSIONES

Sea $r = s(\theta)$ y $r_1 = s(\theta) + b$; Las coordenadas polares de r y r_1 son respectivamente $(s(\theta), \theta)$ y $(s(\theta) + b, \theta)$; es decir (r, θ) y $(r + b, \theta)$, entonces la distancia entre r y r_1 en la recta imaginaria θ es $|b|$ y el corte en el eje polar de r_1 es $(s(0) + b, 0)$.
"UNA TRANSFORMACIÓN ADITIVA EN EL EJE CARTESIANO SE PRESENTA COMO UNA DEFORMACIÓN EN EL EJE POLAR"

Sea $r = s(\theta)$ y $r_1 = a\, s(\theta)$, la grafica de r_1 será a veces mas grande que la grafica de r *si* $|a| > 1$ y será $1/a$ veces más pequeña que r si $|a| < 1$ y si $a < 0$, entonces la grafica será una reflexión en "el eje y" y en el "eje x" y a veces o $1/a$ veces mas grnde o mas pequeña según corresponda y el corte en el eje polar de r es $(a\, s(0), 0)$.
"UNA EXPANSIÓN O COMPRESIÓN EN EL EJE y EN LAS COORDENADAS CARTESIANAS SE PRESENTA COMO UN UNA EXPANSIÓN O COMPRESIÓN GENERAL DE LA GRAFICA QUE NO CAMBIA DE FORMA"

Sea $s(\theta)= \sin\theta$ o $\cos\theta$, $r = s(\theta)$ y $r_1 = s(a\theta)$, entonces r_1 es la grafica de una flor con $2a$ petalos si $a = 2n$ o a pétalos si $a = 2n + 1$.
"UNA EXPANSIÓN O COMPRESIÓN EN EL EJE x DE LAS FUNCIONES $\sin x)$ Y $\cos(x)$ EN LAS COORDENADAS CARTESIANAS SE PRESENTA COMO EL CAMBIO DE NUMERO DE PÉTALOS DE LA FLOR"

BIBLIOGRAFÍA

Muñoz, J. (2006). Introducción a la teoría de conjuntos. Ed. Universidad Nacional de Colombia

Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2007). Precálculo. Ed. CENGAGE Learning. Quinta edición.