11. Las razones trigonométricas a través del trabajo experimental en Matemáticas: reflexiones de una indagación en el aula

William Eduardo Naranjo Triana[1]
María Angélica Triana Tobar[2]

Resumen

El objetivo de este artículo es mostrar cómo la indagación en el aula real de matemáticas ayuda al profesor a identificar problemáticas en la enseñanza y el aprendizaje, con el fin de buscar estrategias encaminadas a la superación de esas problemáticas y, en últimas, a la transformación real de la enseñanza de las matemáticas. Este trabajo coincide con el momento de realización de la práctica docente en el grado décimo por parte de la autora, quien intenta abordar la enseñanza del concepto matemático de *razón trigonométrica.* Con este trabajo de indagación en el aula—bajo el enfoque metodológico de *investigación acción*—se pudo identificar que una enseñanza de las matemáticas basada en la explicación de fórmulas y algoritmos, para que los (las) estudiantes repitan y practiquen a través de ejercicios, produce muchas dificultades de aprendizaje y genera poca comprensión conceptual de las razones trigonométricas y de las matemáticas en general. En consecuencia, se propone una enseñanza de la trigonometría donde el estudiante tome un papel más activo a través del trabajo experimental, con la ayuda de GeoGebra, para que logre descubrir y comprender conceptos matemáticos.

Definición de la problemática

La enseñanza de la trigonometría tradicionalmente está basada en la presentación de algoritmos y fórmulas que se les presentan a los (las) estudiantes, para manipular objetos que no saben qué significan, para hallar respuestas a problemas que no entienden. El currículo que opera en estas aulas de clase es un *currículo por objetivos*, en el que el profesor cumple el papel de experto que explica una serie de fórmulas y algoritmos para que los (las) estudiantes repitan y practiquen a través de ejercicios prefabricados[3] hallados en textos guía. Mi experiencia como profesor en formación inicial muestra que esta forma de abordar la enseñanza de las matemáticas no funciona; por el contrario, produce muchas dificultades de aprendizaje en los (las) estudiantes. Como una consecuencia inobjetable, los (las) estudiantes muestran poco interés y motivación por aprender matemáticas ya que, la mayoría de las veces, no le encuentran sentido a lo que hacen en esta disciplina.

El foco disciplinar de este trabajo son las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de ángulos agudos ya que, en palabras de Sicre et al. (2007), el tratamiento de estas razones resulta ser, de cierta manera, representativo de los demás casos y fácilmente transferible a casos más complejos. Además, las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo constituyen la base fundamental de los demás conceptos en trigonometría, pues resulta evidente que una pobre comprensión de las razones trigonométricas produce grandes dificultades en el aprendizaje de conceptos más complejos de la trigonometría. En este orden de ideas, para el desarrollo de este trabajo se tendrá en cuenta un proceso de aprendizaje a través de la indagación en el aula, en aras de comprender las necesidades de aprendizaje de un grupo de estudiantes cuando se encuentran resolviendo triángulos rectángulos haciendo uso de las razones trigonométricas.

Marco referencial. Dificultades y errores en el proceso de comprensión de las razones trigonométricas

Realizando una búsqueda exhaustiva en bases

1 Estudiante de décimo semestre de la Licenciatura en Matemáticas (Universidad del Tolima). e-mail: william-105@hotmail.com
2 Licenciada en Educación Básica con énfasis en Lengua Castellana (IDEAD - Universidad del Tolima). Docente de la Institución Educativa Altozano del municipio de Ortega (Tolima). e-mail: mtrianatobar@gmail.com

3 Agudelo-Valderrama (2002) habla de ejercicios prefabricados refiriéndose a aquellos ejercicios que no surgen de ningún contexto y que son propuestos por los textos guía para que los (las) estudiantes practiquen.

de datos en internet, es posible darse cuenta que no existen muchos trabajos acerca de errores y dificultades de estudiantes a la hora de trabajar con las razones trigonométricas. Sin embargo, Arenas et. al (2012) llevaron a cabo un estudio con estudiantes entre los 15 y 17 años, donde pudieron clasificar las dificultades que estos tienen en las siguientes categorías:

1. Dificultad para reconocer, construir y representar propiedades y elementos geométricos asociados a problemas, en los que se involucran las razones trigonométricas.
2. Dificultad para realizar las traducciones entre las distintas representaciones de las razones trigonométricas, a partir de los datos dados en el problema.
3. Dificultad para construir transformaciones sintácticas de las razones trigonométricas en una misma representación, a partir de los datos dados en el problema.

La primera dificultad hace referencia a la estructura conceptual de las razones trigonométricas de un ángulo y las dos últimas a la relación entre los diferentes sistemas de representación.

Matemática experimental

Durante las últimas décadas ha surgido una línea de investigación en educación matemática que se encuentra en estrecha relación con una perspectiva constructivista de los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje. Esta línea sugiere una explicación epistemológica de cómo se hace matemática, es decir, una explicación desde la naturaleza del conocimiento matemático. Este último aspecto constituye un punto clave para decidir lo que sucederá en el aula de clase entre el profesor y los estudiantes pues~~, en palabras~~ de Stenhouse (1991), un proyecto curricular, sin importar el área del conocimiento, debe respetar la naturaleza del conocimiento y vincular este aspecto tanto a la enseñanza como al aprendizaje.

Vasco (1978) argumenta que la producción matemática (es decir, la forma como se hace matemática) parte de actividades, manipulaciones, movimientos. Esta producción activa es análoga al trabajo experimental de otros tipos de producción científica, como por ejemplo el caso de las ciencias naturales. En el proceso de producción matemática, la manipulación y la asignación de significado de símbolos es muy importante, es decir, el uso de cualquier tipo de representación material. Dos aspectos son claves en la postura del profesor Vasco: por un lado, la producción matemática parte de actividades y no de la repetición de algoritmos; estas actividades son, por ejemplo, identificación de regularidades, formulación de hipótesis y conjeturas, manipulación y experimentación con los objetos matemáticos, justificación, demostración, entre otras. Por otro lado, el uso de símbolos para representar objetos matemáticos es de vital importancia en el proceso de producción matemática y, además, el uso de estos surge de manera natural de acuerdo con las actividades (anteriormente mencionadas), llevadas a cabo por el encargado de la producción matemática (los y las estudiantes).

Esta explicación de la forma como se producen los conocimientos matemáticos, trasladada a las aulas de clase, sugiere un cambio radical en los roles que deben asumir el profesor y el estudiante. Este último se convierte en un ente activo ya que él mismo es el encargado de la producción de conocimientos matemáticos, a partir de las actividades estratégicamente diseñadas por el profesor y su orientación a través de preguntas, sin necesidad de decirle al estudiante lo que tiene que hacer.

Las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas

Durante los últimos 20 años, una línea de investigación en didáctica de las matemáticas se ha venido fortaleciendo, a tal punto de que hoy en día son muchos los autores (por ejemplo, Gómez, 1997; Ortíz & Arias, 2012; Artigue, 2007; entre otros) que defienden su pertinencia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Ortíz y Arias (2012) comentan que una de las ventajas que ofrece el uso de las TIC en el aula de clase es la posibilidad de implementar una perspectiva constructivista de la enseñanza de las matemáticas, lo cual resulta coherente con el enfoque experimental de la enseñanza de este trabajo.

Por otro lado, Gómez (1997) subraya que el uso de las TIC para la enseñanza de las matemáticas posibilita a los (las) estudiantes la manipulación dinámica de los objetos matemáticos en distintos sistemas de representación, lo cual a su vez permite vivir nuevas experiencias matemáticas que resultarían difíciles y engorrosas a través de medios tradicionales como el lápiz y el papel. Además, otra ventaja de las TIC es que permiten la creación de ambientes de exploración, promoviendo de esta manera un enfoque experimental del proceso de producción matemática.

El software educativo GeoGebra, además de ser un software libre, de fácil acceso, con una interfaz bastante sencilla, posibilita la experimentación en matemáticas gracias a que permite la iteración de las manipulaciones sobre los objetos matemáticos, lo cual se constituye en un aspecto fundamental para el proceso de experimentación en matemáticas. La fecundidad del uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas no está en comprobar respuestas, sino más bien en construir conceptos matemáticos a través de la exploración, la experimentación, el uso de símbolos, la formulación y comprobación de conjeturas, entre otros procesos típicos del pensamiento matemático.

Metodología

Para llevar a cabo este proyecto de indagación en el aula, se propone trabajar bajo el enfoque de investigación-acción (IA), pues éste se constituye en una potente herramienta para el perfeccionamiento profesional del profesor, es decir, el perfeccionamiento de la autonomía y el juicio profesional del docente, para tomar decisiones acerca de su trabajo en el aula real de matemáticas. Además, el enfoque de IA surge en oposición a la metodología tradicional en investigación educativa, donde los encargados de hacer investigación son expertos altamente cualificados para esto, pero ajenos al aula real de clases. Esto produjo una brecha enorme entre teoría y práctica, es decir, entre investigación y enseñanza, pues la teoría que se producía estaba lejos de llegar a las aulas de clases y beneficiar a los que, en teoría, dice servir la investigación educativa: a los profesores.

Martínez (2000) describe brevemente el proceso de indagación en el aula (investigación-acción) como un medio para identificar uno o más problemas de las prácticas de enseñanza del profesor, elabora un plan de acción, lo pone en marcha, evalúa la eficacia del plan de acción en la superación del problema inicial y posteriormente repite este ciclo cuantas veces sea necesario. Por estas razones considero que el enfoque de IA es pertinente para la metodología de este trabajo y, además, es oportuno para el perfeccionamiento de las propias prácticas de enseñanza como docente en formación inicial.

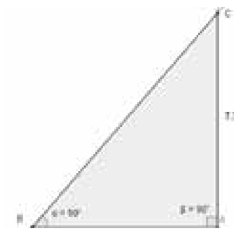
"Enseñanza" inicial de las razones trigonométricas

En primer lugar se comenzará describiendo la forma como decidí abordar la "enseñanza" de las razones trigonométricas. Considero que es importante mencionar este aspecto, pues permitirá en una fase ulterior identificar el proceso de evolución de las propias prácticas de enseñanza y, en cierta medida, rastrear posibles causas de las dificultades y necesidades evidenciadas por los estudiantes, con el propósito de diseñar un plan de acción que coadyuve a la superación de la problemática identificada anteriormente.

El tema de las razones trigonométricas lo comencé explicando conceptos como ángulo agudo, cateto opuesto y cateto adyacente. Vale la pena aclarar que antes de comenzar con el tema de las razones trigonométricas, los estudiantes habían estado trabajando el teorema de Pitágoras, sistemas de medida angular y conversiones entre ellos, y otros conceptos básicos de trigonometría. Posteriormente, se escribieron en el tablero las seis razones trigonométricas y se plantearon varios ejercicios de solución de triángulos rectángulos, con el fin de explicar la forma como se usaban las razones trigonométricas, principalmente seno, coseno y tangente. Finalmente, se explicaron de la misma forma las funciones trigonométricas inversas (sen^{-1}, cos^{-1}, tan^{-1}) y su uso para hallar ángulos internos de un triángulo. Después de esto, se propuso un taller a los (las) estudiantes para que practicaran resolviendo ejercicios y problemas asociados a las razones trigonométricas.

Identificación de dificultades y necesidades de los estudiantes

Con el fin de identificar algunas concepciones erradas que tienen los (las) estudiantes acerca de las razones trigonométricas, se aplicó un test que constaba de tres ítems, justo después de haber explicado el tema de razones trigonométricas: el ítem A propone resolver un triángulo rectángulo dado el valor de un ángulo agudo y la longitud del cateto opuesto a este ángulo; el ítem B pide construir y resolver un triángulo rectángulo dada una razón trigonométrica, en particular tangente; por último, el ítem C propone resolver un problema asociado a las razones trigonométricas, incluyendo el concepto de ángulo de depresión. A continuación se presentan los ítems A, B y C del test de diagnóstico:

Ítem A	Ítem B	Ítem C
 Resuelva el triángulo rectángulo, es decir, halle la longitud de sus tres lados y sus tres ángulos internos.	$\text{Tan (A)} = \frac{5}{3}$ Dada la anterior razón trigonométrica, construya el triángulo rectángulo que la representa y resuélvalo.	Desde el último piso de la Torre Colpatria, una persona observa un automóvil con un ángulo de depresión de 30° ¿A qué distancia se encuentra el automóvil de la base de la torre? Recuerde que la altura de la Torre Colpatria es de 206 metros.

Luego de aplicar este test al grupo de 41 estudiantes, se pudo identificar ciertas dificultades y concepciones erradas que evidencian los (las) estudiantes a la hora de utilizar las razones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos:

- ✓ *Los estudiantes no le encuentran sentido a las respuestas que obtienen:* por ejemplo hallan el valor de la hipotenusa y, por algún error de procedimiento, obtienen un valor incorrecto menor al valor de los catetos; aun así siguen resolviendo el triángulo.

- ✓ *Despejan la incógnita de manera incorrecta:* luego de plantear la razón trigonométrica, tienden a dejar la incógnita a un lado de la ecuación y multiplican los valores conocidos.

$$\boldsymbol{Tan\ 50°} = \frac{\mathbf{7,7}}{\boldsymbol{c}}$$

$$(\mathbf{7,7}).\boldsymbol{Tan\ 50°} = \boldsymbol{C}$$

$$(\mathbf{7,7}).\mathbf{1,19} = \boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{C} = \mathbf{9,16}$$

- ✓ *Usan de manera incorrecta la notación de la trigonometría:* por ejemplo, conciben la notación Sen (30°) como un producto entre “30” y “Sen”, y no como el argumento de la función seno.

$$Tan\ A = \frac{206\ m}{x}$$

$$Tan\ x = \frac{206\ m}{A}$$

$$Tan\ x = \frac{206\ m}{30°}$$

$$Tan\ x = 6.8$$

$$Tan^{-1} Tan\ x = Tan^{-1}\ 6.8$$

$$x = 81,6$$

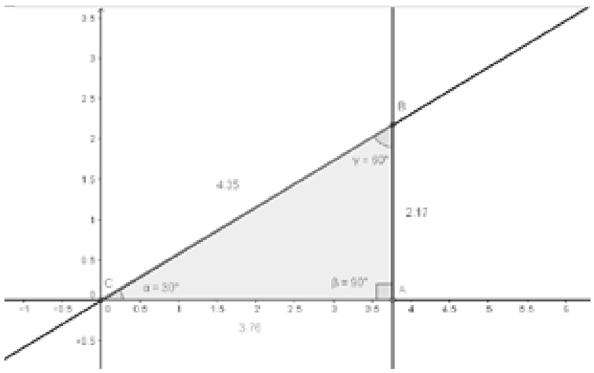
- ✓ *Al usar las razones trigonométricas confunden lados con ángulos:* por ejemplo, escriben Sen A = 206 / 30º

- ✓ *Al usar las razones trigonométricas confunden cateto opuesto con cateto adyacente.*

Estas dificultades y concepciones erradas evidenciadas por los (las) estudiantes, sirvieron de referente y punto de partida para diseñar la secuencia de actividades que más adelante se presentará. Como se puede observar en líneas anteriores, la forma como se abordó la enseñanza de las razones trigonométricas no fue la más adecuada. Muchos estudiantes tuvieron grandes dificultades para comprender las razones trigonométricas y cometieron muchos errores a la hora de resolver triángulos rectángulos. Por un lado, no comprendieron lo que significaba una razón trigonométrica y, por otro, no comprendieron la notación usada en trigonometría. Gracias a este trabajo de indagación en el aula se pudo identificar como problemática la forma de enseñar las razones trigonométricas, pero además se pudo diseñar una secuencia de actividades que busca desarrollar en los (las) estudiantes una comprensión profunda de las razones trigonométricas.

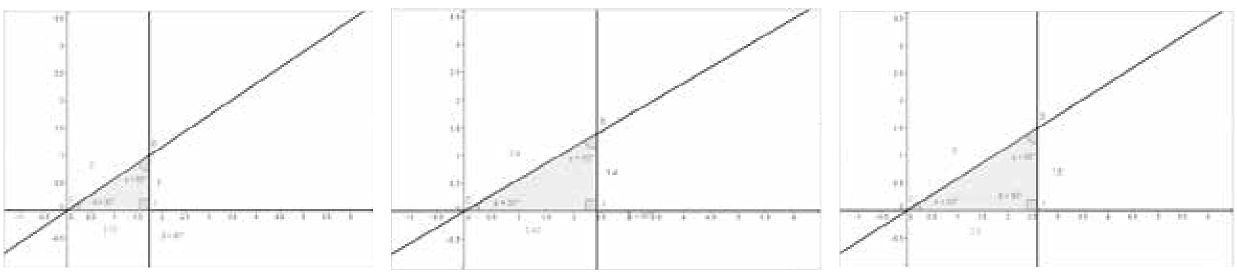
Las razones trigonométricas a través del trabajo experimental en Matemáticas

Como se vio en líneas anteriores, una enseñanza de las razones trigonométricas—y de las matemáticas en general— basada en la explicación de fórmulas y algoritmos para que los (las) estudiantes repitan y practiquen, genera muchas dificultades de aprendizaje y una baja comprensión de los conceptos matemáticos. Por esta razón, se propone una enseñanza de las razones trigonométricas basada en el trabajo experimental en matemáticas, esto es, en la identificación de relaciones y regularidades entre las longitudes de los lados y la amplitud de los ángulos internos de un triángulo rectángulo. En este enfoque de enseñanza, el estudiante se convierte en un productor de conocimiento matemático más que en un repetidor de fórmulas, definiciones y teoremas. Por su parte, el profesor debe tener un conocimiento profundo de las matemáticas, y motivar a sus estudiantes a indagar y a buscar relaciones entre variables, lo cual implica enseñar a través de métodos de descubrimiento y exploración, y no explicando una serie de definiciones y teoremas.



La actividad comienza presentando el siguiente objeto virtual[4] en el software GeoGebra a los (las) estudiantes. La idea es que ellos(as) puedan identificar que existe una relación entre la longitud del cateto opuesto a 30º y la longitud de la hipotenusa. Se escogió iniciar la actividad con el ángulo de 30º, ya que , lo que implica que la hipotenusa es el doble del cateto opuesto, facilitando la identificación de la relación.

La experimentación con el objeto virtual le permite al estudiante poder observar varios triángulos y comenzar a identificar regularidades,con el fin de formular hipótesis y conjeturas.

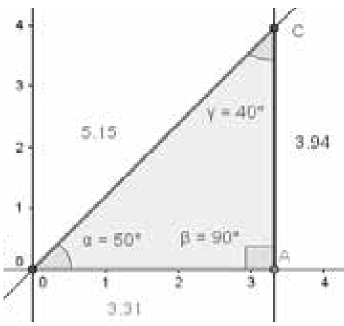


A través de preguntas orientadoras (por ejemplo,al mover el punto “A”, ¿qué varía y qué se mantiene constante en el triángulo ABC?, ¿qué relación encuentras entre la longitud de la hipotenusa y del cateto azul?, ¿se cumple siempre esta relación?, ¿bajo qué condiciones?) formuladas por el profesor sobre proceso experimental que tiene el estudiante con el objeto virtual, se busca que éste sea capaz de comunicar con sus propias palabras que, por ejemplo, “*el cateto que no hace parte del ángulo de 30º es la mitad de la hipotenusa”*[5]. Como se observa aquí, esta conjetura describe fielmente lo que significa la razón trigonométrica “Sen 30”.

4 El punto “A” en el objeto virtual es un deslizador que permite crear varios triángulos rectángulos semejantes entre sí con distintas medidas.

5 Ejemplo de posible conjetura que podría comunicar un estudiante con sus propias palabras.

La segunda parte de la actividad consiste en poner a prueba las conjeturas formuladas por los (las) estudiantes en la fase anterior. Vale la pena decir que el profesor debe tener la habilidad de orientar a los (las) estudiantes a que formulen conjeturas, las registren por escrito y finalmente las pongan a prueba. También debe ser consciente que el proceso de identificar y expresar conjeturas no es inmediato y los (las) estudiantes requieren de tiempo para poder ver una regularidad y expresarla. En este sentido, para la segunda fase de la actividad se les presenta a los (las) estudiantes el siguiente objeto virtual, para que pongan a prueba sus conjeturas, confirmen su validez o, en su defecto, las refuten y reestructuren.



Como se puede observar, esta actividad pretende enseñar a través de métodos de exploración e indagación y no simplemente mediante la explicación de fórmulas y algoritmos descontextualizados. Los (las) estudiantes son quienes producen el conocimiento matemático y tienen control sobre éste, no como ocurre en la enseñanza y el aprendizaje tradicionalista, donde el conocimiento matemático controla a los (las) estudiantes, generando en ellos (as) temor, incertidumbre y, en la mayoría de los casos, desmotivación por aprender matemáticas.

Conclusiones

Con esta propuesta de enseñanza no se pretende presentar una receta que pueda ser aplicada por otros profesores en el aula de clase, sino más bien mostrar una manera distinta de abordar la enseñanza de las Matemáticas con base en el modelo curricular por *procesos* propuesto por Stenhouse (1991). No se trata entonces de replicar en el aula de clase las propuestas hechas por otros profesores, sino más bien prestar atención a los rasgos y principios fundamentales de estas propuestas, con el fin de tomar decisiones autónomas en el aula de clase, teniendo en cuenta los procesos y las necesidades de aprendizaje de los (las) estudiantes. Gracias a este trabajo de indagación en el aula se pudieron identificar problemáticas de la propia práctica de enseñanza y se logró aprender bastante acerca de los procesos de aprendizaje de los (las) estudiantes cuando estos(as) se encuentran resolviendo triángulos rectángulos, haciendo uso de las razones trigonométricas. Así, se puede observar el papel educativo que tiene la investigación en el aula, pues permite el perfeccionamiento de las prácticas de enseñanza del profesor y con esto la transformación real de la enseñanza de las matemáticas en las aulas de clase.

REFERENCIAS

Agudelo-Valderrama, C. (2002). Promoción del pensamiento algebraico en la escuela primaria: una propuesta que cobra sentido de acuerdo con nuestras concepciones obre el conocimiento matemático. *Aula Urbana*. No 37.

Arenas, F., Becerra, M., Morales, F., Urrutia, L. & Gómez, P. (2014). Razones trigonométricas. En P. Gómez. *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 359-435). Bogotá: Ediciones Uniandes.

Artigue, M. (2007). *Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental*"; CIAEM XII-Querétaro México.

Gómez, P. (Ed.).(1997). *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1*.. Bogotá: Universidad de los Andes. pp. 342-414.

Martínez, M. (2000). La investigación-acción en el aula. *Agenda académica*, 7(1), 27.

Ortiz, A. & Arias, R. (2012) GeoGebra como herramienta para la enseñanza de la Matemática: resultados de un curso de capacitación.

Sicre, O. & Munguía, J. (2007). Construcción de significados para las razones trigonométricas mediante un aparato virtual diseñado con cabri. *XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas– Universidad de Sonora. México*.

Stenhouse, L. (1991). *Investigación y desarrollo del currículum*. Madrid: Ediciones Morata.

Vasco, C. (1978). Estratificación conceptual del proceso de producción de conocimientos matemáticos. *Ideas y Valores*, 27(53-54), 99-112.