12. Grupos de simetría de los polígonos: el caso del triángulo equilátero y el pentágono regular

Diana Isabel Quintero Suica[1*]

Resumen

En el presente artículo se aborda la construcción de los grupos de simetría del triángulo equilátero y del pentágono regular, a partir de las simetrías axiales y rotaciones de estos. También se verifican las propiedades de grupo para la operación composición definida en el conjunto de simetrías y algunos otros elementos de estos grupos como, por ejemplo, los subgrupos normales.

Palabras claves: Grupo, operación composición, subgrupo, subgrupo normal.

Introducción

En el campo de la teoría de grupos se puede estudiar un ejemplo particular de construcción de estos por medio del conjunto de rotaciones y simetrías axiales de los diferentes polígonos regulares existentes, y la operación composición definida en dicho conjunto. En este caso, se tratarán los grupos construidos a partir del triángulo equilátero y el pentágono regular, los cuales muestran algunas bases para la generalización de cualquier polígono regular.

Para iniciar con el estudio de estos grupos, vale tener presente algunas definiciones como las de grupo, rotación y simetría axial. Pérez (2008) indica que *sobre un conjunto no vacío G una operación definida sobre G determina una estructura de grupo si: es asociativa, existe en G un elemento neutro y todo elemento de G admite un inverso para esta operación*, es decir que:

- $\forall\ a, b, c\ \in G: (a * b) * c = a * (b * c)$
- $\exists!\ e\ \in G$ tal que $\forall\ a\ \in G: a * e = e * a = a$
- $\forall\ a\ \in G, \exists!\ a^{-1}: a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

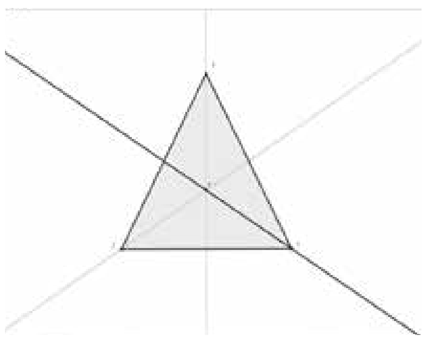
Se puede notar que la propiedad clausurativa no se encuentra explícita allí debido a que, al hablar de *operación*, se sobrentiende que ésta es cerrada en el conjunto en el que se encuentra definida.

Caro, Obonaga y Pérez (1987) definen una rotación como el movimiento de una figura respecto de un punto fijo, sobre un plano. Dicho punto fijo recibe el nombre de centro de rotación y esta se efectúa teniendo en cuenta un ángulo determinado.

Una simetría axial se define como aquella en la que un polígono al ser rotado 180 respecto de una recta, éste se superpone a sí mismo. A la recta respecto de la cual se efectúa la rotación se le denomina eje de simetría (Caro, Obonaga & Pérez, 1987).

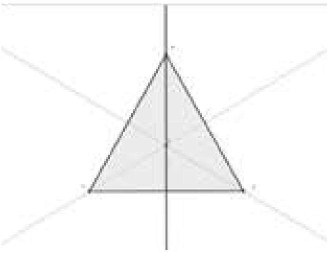
Triángulo equilátero

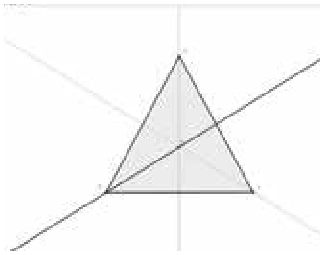
El triángulo equilátero posee unos vértices a los que se nombrarán con los tres primeros números naturales. Se denominarán *l, m* y *n* a las bisectrices de cada uno de los ángulos del triángulo y se denominará *P* al punto de intersección de las bisectrices, como se muestra a continuación.

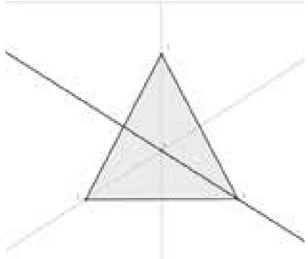


A partir de lo anterior se construye el conjunto de rotaciones del triángulo, teniendo en cuenta un ángulo de 120º cada vez. Las tres rotaciones se muestran a continuación:

1 Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.
e-mail: dma_dquintero472@pedagogica.edu.co







Rotación 120º

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotación 240º

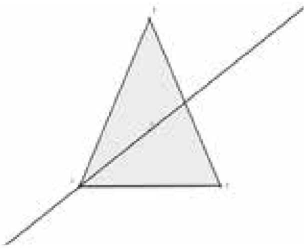
$$r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

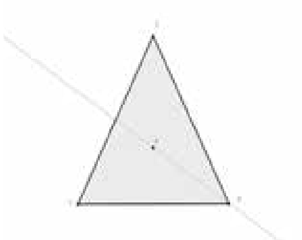
Rotación 360º

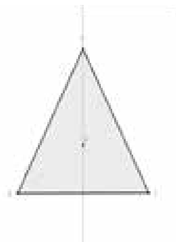
$$r_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

En la tercera fila de la tabla anterior se representaron las rotaciones con una notación particular. Para entenderla se tomará por ejemplo la rotación . Al efectuarla, todos los vértices del triángulo rotaron un ángulo de 120º. El vértice que se había bautizado con el número 1 (primer número de la primera fila) es ahora el vértice denotado con el número 2 (primer número de la segunda fila). El vértice denominado como número 2 (segundo número de la primera fila) ocupa ahora la posición del vértice número 3 (segundo número de la segunda fila). Por último, el vértice nombrado como número 3 (tercer número de la primera fila) es ahora el vértice denotado con el número 1 (tercer número de segunda fila).

Para construir las simetrías axiales, se va a rotar el triángulo respecto de cada una de las bisectrices, de forma que siempre quede superpuesto. A continuación se muestran dichas simetrías:







Respecto de la recta *l*

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Respecto de la recta *m*

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Respecto de la recta *n*

$$s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A partir de lo anterior, el conjunto que determinará el grupo de simetrías del triángulo equilátero se conforma con y . Se requiere, entonces, definir la operación en este conjunto con la cual se tendrá un grupo. La operación será la composición de elementos de este conjunto y se denotará con el símbolo .

Para efectuar la composición de dos elementos de este conjunto se tendrá en cuenta, como analogía, la forma de composición de funciones. Es decir, por ejemplo, las rotaciones y . El resultado de la operación será entonces:

En la rotación el vértice denominado con el número 1 es ahora el vértice número 3, pero en la rotación el vértice denominado con el número 3 es el mismo. Algo similar sucede con cada uno de los vértices del triángulo, por lo cual la composición da como resultado la rotación.

Efectuando cada una de las operaciones con cada pareja de elementos del conjunto y se obtiene la siguiente tabla:

$\circ$	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
r_1	r_2	r_3	r_1	s_2	s_3	s_1
r_2	r_3	r_1	r_2	s_3	s_1	s_2
r_3	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
s_1	s_3	s_2	s_1	r_3	r_2	r_1
s_2	s_1	s_3	s_2	r_1	r_3	r_2
s_3	s_2	s_1	s_3	r_2	r_1	r_3

En la tabla anterior se pueden confirmar que las propiedades para un grupo algebraico se cumplen. Por ejemplo, el elemento idéntico es la rotación . Para la rotación y la simetría su inverso es sí misma. El inverso de la rotación es , y viceversa. Lo mismo sucede con las simetrías y : el inverso de una es la otra. Por último, es fácil verificar que para cada terna de elementos la operación es asociativa.

También se puede observar que, en general, la operación no es conmutativa. Por ejemplo,

$$r_2 \circ r_3 = r_3 \circ r_2$$

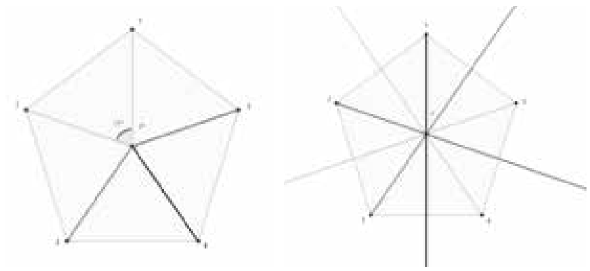
Pero

$$s_1 \circ s_2 \neq s_2 \circ s_1$$

Por lo cual se concluye que el grupo no es un grupo conmutativo o abeliano.

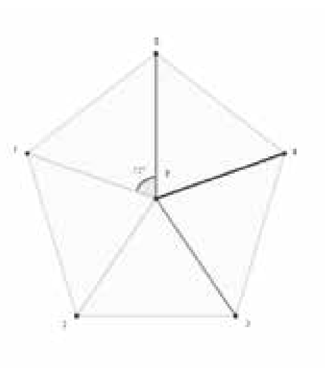
Pentágono regular

En el pentágono los vértices se nombran con los números naturales del 1 al 5. Para efectuar las rotaciones, esto se hará con un ángulo de 72º. Además, se trazaron las rectas *l, m, n, o* y *p* a cada uno de los puntos medios de los lados de éste, como se ilustra en las siguientes imágenes.



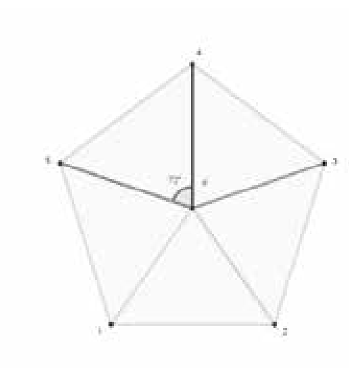
A continuación se muestran las rotaciones y simetrías axiales con las que se conforman el conjunto necesario para construir el grupo:

Rotaciones



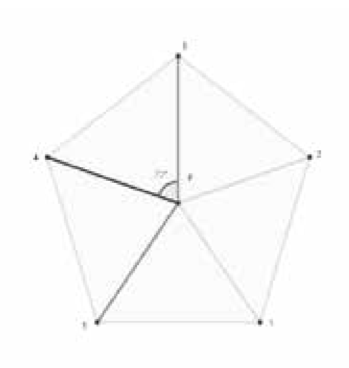
Rotación 72º

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$



Rotación 144º

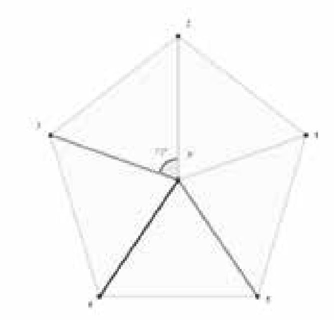
$$r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



Rotación 216º

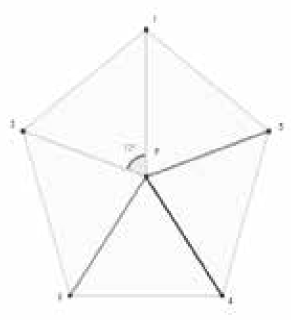
$$r_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Revista EJES



Rotación 288º

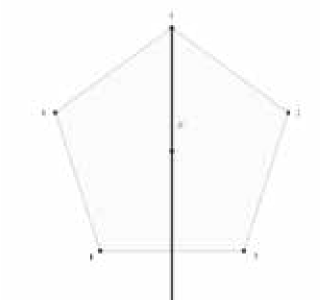
$$r_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



Rotación 360º

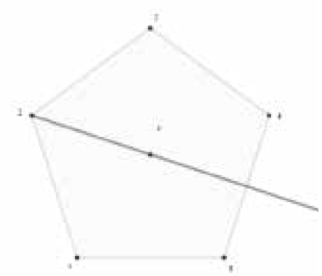
$$r_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Simetrías axiales



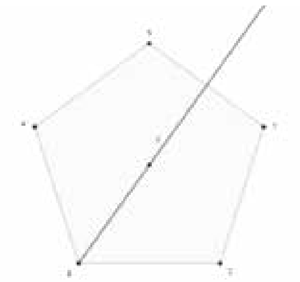
Respecto a la recta *l*

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



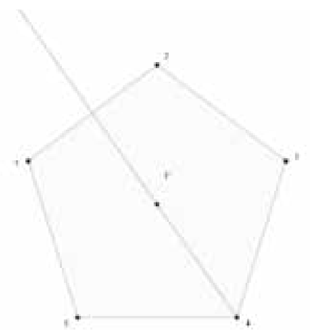
Respecto a la recta *m*

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



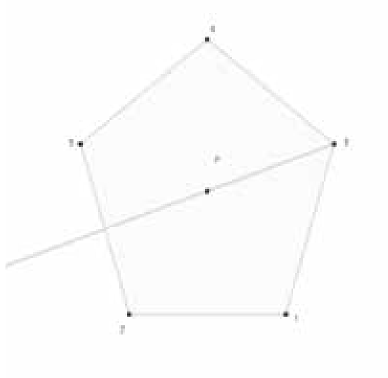
Respecto a la recta *n*

$$s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Respecto a la recta *o*

$$s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$



Respecto a la recta *p*

$$s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Teniendo los diez elementos del conjunto y , utiliza la misma operación del conjunto de simetrías del triángulo equilátero, obteniendo la siguiente tabla:

$\circ$	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_1
r_2	r_3	r_4	r_5	r_1	r_2	s_3	s_4	s_5	s_1	s_2
r_3	r_4	r_5	r_1	r_2	r_3	s_4	s_5	s_1	s_2	s_3
r_4	r_5	r_1	r_2	r_3	r_4	s_5	s_1	s_2	s_3	s_4
r_5	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1
s_2	s_1	s_5	s_4	s_3	s_2	r_1	r_5	r_4	r_3	r_2
s_3	s_2	s_1	s_5	s_4	s_3	r_2	r_1	r_5	r_4	r_3
s_4	s_3	s_2	s_1	s_5	s_4	r_3	r_2	r_1	r_5	r_4
s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	s_5	r_4	r_3	r_2	r_1	r_5

Esto es un grupo cuyo elemento idéntico es la rotación . También es fácil verificar los elementos inversos y verificar que la operación definida es asociativa. En general, tampoco se cumple la propiedad conmutativa, por lo cual no es un grupo conmutativo o abeliano.

Subgrupos y subgrupos normales

Un subgrupo de un grupo *G* es un subconjunto que se comporta como grupo algebraico para la misma operación de *G* (Pérez, 2008). Además, un subgrupo *H* de un grupo *G* es un subgrupo normal si para todo y para todo , los conjugados (Pérez, 2008).

Un ejemplo es el triángulo equilátero. En la tabla construida anteriormente se puede observar que las rotaciones forman un grupo con la misma operación en el conjunto de las simetrías del triángulo equilátero. El elemento idéntico de este subgrupo es . Los inversos de , y son , y , respectivamente. La operación es asociativa y además conmutativa, por lo cual este subgrupo es además abeliano.

$\circ$	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
r_1	r_2	r_3	r_1	s_2	s_3	s_1
r_2	r_3	r_1	r_2	s_3	s_1	s_2
r_3	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
s_1	s_3	s_2	s_1	r_3	r_2	r_1
s_2	s_1	s_3	s_2	r_1	r_3	r_2
s_3	s_2	s_1	s_3	r_2	r_1	r_3

Este subgrupo $H = \{r_1, r_2, r_3\}$ también es normal. Esto se verifica fácilmente efectuando las operaciones.

$$
\begin{array}{llllll}
r_1 \circ s_1 \circ r_2 = r_1, & r_1 \in H & r_1 \circ s_2 \circ r_2 = r_1, & r_1 \in H & r_1 \circ s_3 \circ r_2 = r_1, & r_1 \in H \\
r_2 \circ s_1 \circ r_1 = r_2, & r_2 \in H & r_2 \circ s_2 \circ r_1 = r_2, & r_2 \in H & r_2 \circ s_3 \circ r_1 = r_2, & r_2 \in H \\
r_3 \circ s_1 \circ r_3 = r_3, & r_3 \in H & r_3 \circ s_2 \circ r_3 = r_3, & r_3 \in H & r_3 \circ s_3 \circ r_3 = r_3, & r_3 \in H
\end{array}
$$

Un análisis similar se puede hacer con el grupo de simetrías del pentágono regular. En este caso el subgrupo normal estará conformado por los elementos $H = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$.

A partir de todo lo anterior se espera que el lector interesado pueda generalizar el procedimiento para polígonos regulares diferentes y verificar algunas otras propiedades. Además, puede estudiar el caso de polígonos como el triángulo isósceles y el rectángulo, definiendo, en caso de ser posible, una operación que, con el conjunto resultante de las rotaciones y simetrías (o algún otro movimiento en el plano) de estos polígonos, sea alguna estructura algebraica conocida.

REFERENCIAS

Caro, V., Obonaga. E. & Pérez, J. (1983). *Matemática 2: Aritmética y Geometría.* Bogotá: PIME Editores.

Pérez, E. (2008). *Estructuras algebraicas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.