COMUNICACIÓN BREVE
LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA EN UNA CLASE DE GEOMETRÍA CON ESTUDIANTES EN EDAD EXTRAESCOLAR BAJO LA APROXIMACIÓN METODOLOGICA PROPUESTA POR EL GRUPO Æ•G.

Carolina María Luque Zabala
Licenciada en Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional
carolina.luque@live.com

Luis Alejandro Robayo León
Licenciado en Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional
luisalejandroleon@yahoo.com

Resumen

A través de esta comunicación, queremos socializar un avance de nuestro trabajo de grado que tiene como objetivo evidenciar la actividad demostrativa en estudiantes en edad extraescolar. Específicamente pretendemos dar cuenta de algunos de los aspectos metodológicos que han guiado la realización del proyecto, considerando dos referentes teóricos (Actividad Demostrativa y fases de Boero), que son la base de las categorías de análisis.

Palabras clave: Actividad demostrativa, fases de Boero, geométrica dinámica.

Abstract
Through this communication, we socialize a preview of our degree work that aims to demonstrate the demonstration activity in school with aged students. Specifically we intend to account for some of the methodological issues that have guided the project, considering two theoretical reference (demonstration activity and Boero phases), which are the basis of the categories of analysis.

Key words: Demonstration activity, Boero phases, Dynamic Geometry.

INTRODUCCIÓN

El grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), ha centrado su interés en el aprendizaje y la enseñanza de la demostración en geometría. A través del proyecto de investigación Geometría dinámica en la formación del profesor de matemáticas, que impulsó una reforma curricular dirigida a cambiar un curso de geometría plana centrado en la enseñanza directa de contenidos geométricos por uno centrado en el aprendizaje de la práctica de demostrar en el campo de la geometría, los miembros del grupo identificaron que por medio de tareas especificas y especialmente diseñadas, la interacción social de la clase y el uso de la geometría dinámica, los futuros profesores se involucraban en una actividad demostrativa (constructo que han elaborado a partir del diseño experimental), y reconocían en esta práctica una actividad fundamental del que hacer matemático que permitía la comprensión y la argumentación dentro de una comunidad (Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2007). Los resultados de la innovación curricular en términos de la manera cómo los estudiantes para profesor se involucraban en la actividad de demostrar, llevó a los miembros del grupo Æ•G a cuestionarse por la posibilidad de la enseñanza de la demostración a nivel escolar. Según Camargo, Samper y Perry (2006) la enseñanza de la demostración es un tema en permanente debate, en el

que se cuestiona acerca de la pertinencia de su enseñanza en la educación básica y media. Los especialistas en didáctica de la geometría, frente a este debate, han tomado dos posiciones: los que consideran que a nivel escolar no es pertinente su enseñanza y los que por el contrario, creen que esta es un práctica particular de las matemáticas que conduce a la comprensión de los objetos de esta disciplina y por tanto debe enseñarse en la escuela. El grupo de investigación Æ•G, basado en su experiencia con profesores en formación, ha optado por la segunda posición, partiendo del supuesto de que la enseñanza de la demostración resulta pertinente en la escuela si se direcciona hacia la comprensión y la comunicación de ideas matemáticas y no solo se presenta como un mecanismo de validación. Nuestro proyecto de grado, como tesis asociada a la línea de investigación en geometría de la UPN, tiene como propósito indagar a cerca de la posibilidad de la actividad demostrativa en la educación básica en particular con personas en edad extraescolar. Dado que la enseñanza de la demostración no es una práctica habitual en este nivel educativo y que compartimos la posición del grupo de investigación Æ•G frente a esta situación, consideramos pertinente realizar un estudio que aporte información sobre las acciones de estudiantes en edad extraescolar que reflejan la emergencia de un ambiente de actividad demostrativa en una clase de geometría donde se usa CABRI. Hacemos referencia a estudiantes en edad extraescolar porque la población cuyas acciones serán objeto de estudio corresponde a un grupo de 35 estudiantes con un rango de edad entre los 24 y 57 años de edad. Estos estudiantes, en el momento de la implementación de las actividades, se encontraban nivelando los grados octavo y noveno de educación básica en jornada nocturna.
A través de esta comunicación, queremos socializar un avance de nuestro trabajo de grado, específicamente pretendemos dar cuenta de algunos de los aspectos metodológicos que han guiado la realización del proyecto haciendo énfasis en la elaboración de las categorías de análisis y de cómo creemos que estas nos pueden ayudar a caracterizar la actividad de los estudiantes.

REFERENTES TEORICOS

El marco conceptual de nuestro trabajo de grado se compone de dos referentes teóricos: el constructo Actividad Demostrativa elaborado por el grupo de investigación Æ•G de la UPN (Perry, P., et all. 2007) y las fases de Boero (1999) para la producción de teoremas y construcción de pruebas matemáticas. Consideramos que estos referentes teóricos nos permiten categorizar la actividad de los estudiantes durante el desarrollo de las tareas propuestas con miras a dar cuenta de la posibilidad de actividad demostrativa en un curso de geometría de educación básica.

El constructo Actividad Demostrativa abarca dos procesos, conjeturación y justificación, los cuales no se constituyen como procesos independientes ni las acciones que los componen se consideran secuenciales. El proceso de conjeturación se compone de acciones de tipo heurístico, tales como: visualizar, explorar, generalizar y verificar. Estas acciones permiten a los estudiantes reconocer el contenido geométrico y las propiedades que subyacen en un enunciado matemático o en una figura geométrica, contribuyen al planteamiento de conjeturas y a la verificación empírica de las mismas. La visualización, es la acción por medio de la cual el estudiante identifica, percibe o evoca propiedades geométricas de una representación gráfica dada o construida. Cuando la indagación del estudiante incluye la visualización y otros modos de actuación tales como tomar medidas, realizar construcciones auxiliares, etc., (e.g. utilizando Cabri), se manifiesta que su proceder es de carácter exploratorio. Tanto en la visualización como en la exploración, el estudiante tiene la oportunidad de encontrar regularidades en las figuras geométricas, que posteriormente se pueden comunicar en forma de generalidades, las cuales eventualmente pueden ser cuestionadas y comprobadas a partir de la verificación empírica sobre la representación gráfica. Cuando existe la plena seguridad de la veracidad de una conjetura dada, pueden surgir en los estudiantes diversas vías de justificación (segundo proceso) de la misma: la explicación cuando el estudiante basa su justificación en evidencias empíricas, como la percepción de un dibujo o la exploración de un software de geometría dinámica, la prueba cuando el estudiante realiza justificaciones basadas en propiedades generales de las figuras; o la demostración formal, que es la más rigurosa y consiste en una secuencia lógica de afirmaciones y razones, sustentadas en un sistema teórico estudiado y elaborado.

En un mismo sentido, Boero (1999) manifiesta que la demostración es una actividad matemática que implica acciones que llevan a considerar tanto la producción de la conjetura como la construcción de su justificación. Estas acciones, Boero (1999) las enmarca en lo que ha denominado *fases* en la producción de teoremas y construcción de pruebas matemáticas. Las fases establecidas por este autor son:

(i) Producción de conjeturas.
(ii) Formulación del enunciado de acuerdo con convenciones culturales compartidas.
(iii) Exploración del contenido (y limites de validez) de la conjetura.
(iv) Selección y encadenamiento de argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva.
(v) Organización de la cadena de argumentos en la forma de una prueba que es aceptable desde el punto de vista de los estándares matemáticos vigentes.
(vi) Aproximación a la prueba formal.

De las fases mencionadas, las tres primeras se relacionan con el proceso de conjeturación y las restantes con el proceso de justificación de la actividad demostrativa. Dado que consideramos que las fases señaladas son un referente que nos permite categorizar la actividad de los alumnos durante el desarrollo de una tarea propuesta con el uso de CABRI, en el presente trabajo hemos decidido tomarlas como categorías de análisis. En la **tabla 1** mostramos, tres indicadores de la categoría de análisis correspondiente a la formulación del enunciado de acuerdo con convenciones culturales compartidas. Dichos indicadores se han establecido con base en los referentes teóricos citados y en la propuesta de Parra y Piñeros (2011) para la elaboración de indicadores de las fases de Boero.

	Indicadores	**Acciones del estudiante**	**Acciones de la actividad demostrativa inmersas**
FORMULACIÓN DEL ENUNCIADO DE ACUERDO CON CONVENCIONES CULTURALES COMPARTIDAS	Estructura del enunciado	• Utiliza el formato condicional "Si…entonces" en la escritura de la conjetura. • Explícita el antecedente y el consecuente pero no escribe la conjetura en el formato condicional. • Tiene en cuenta las convenciones establecidas en la clase en términos del lenguaje y notación al nombrar objetos geométricos involucrados.	Generalización
	Correcto establecimiento del antecedente y el consecuente de la conjetura	• Reconoce la relación entre antecedente y condiciones impuestas en la situación y entre consecuente e invariantes encontrados en la exploración.	Generalización
	Verificación de la formulación de la conjetura.	• Utiliza la herramienta arrastre de CABRI para verificar que el invariante este explicito en la conjetura propuesta. • Identifica y explicita que sobran o faltan propiedades o palabras. • Corrobora que las condiciones dadas estén en el antecedente y los invariantes encontrados en el consecuente.	Visualización Exploración Verificación Generalización.

Tabla 1. Adaptación de la tabla propuesta por Parra y Piñeros (2011).

ASPECTOS METODOLOGICOS DEL ESTUDIO

Para dar cuenta de la actividad de los estudiantes, se implementaron unas tareas durante diez sesiones de clase (de 40 minutos cada una). De las 10 sesiones de clase, seis se registraron en audio y video. También se grabaron dos entrevistas realizadas a los estudiantes y se recopilaron sus producciones escritas. Realizada la transcripción de cada una de las sesiones y de las entrevistas, se hizo una lectura superficial de las mismas con el propósito de hacernos una idea global de la información, para luego seleccionar episodios que podrían ser de utilidad en la fase de análisis de datos. En este momento hemos centrado la atención en episodios de dos sesiones de clase y de una de las entrevistas. La selección de éstos episodios obedeció a dos aspectos: reconocimiento de acciones de la actividad demostrativa e identificación de la forma de interacción durante la clase (interacción profesor-estudiante, estudiante-estudiante). Esto último, con el fin de identificar el nivel de autonomía[24] de los estudiantes. Las interacciones profesor-estudiante se reconocieron en el marco de la clase, mientras que las interacciones entre estudiantes se tomaron en el marco de la actividad llevada a cabo por un grupo de tres personas. La selección del grupo de tres estudiantes (E1, E2 y E9) obedeció a su asistencia regular a las sesiones de clase.

Un ejemplo de análisis: la suma de la medida de los ángulos interiores de un triángulo.

Las tareas propuestas en la fase de implementación eran abiertas y propiciaban inicialmente experiencias de carácter empírico que conducían al planteamiento de una conjetura y su validación. Una de estas tareas fue: ¿Para qué tipo de triángulo la suma de sus ángulos es 120? Esta tarea se trabajo en dos sesiones. En la primera sesión, los estudiantes lograron a través de la exploración en CABRI, descubrir que era imposible construir un triángulo con dichas condiciones, pero más allá de esto, estaba en identificar la regularidad de que la suma siempre era 180. La segunda sesión, tenía como objetivo dar el espacio para que los grupos de estudiantes discutieran y formularán el hecho geométrico encontrado. Si se suman las medidas de los ángulos de un triángulo entonces esa suma es siempre 180. Vale la pena resaltar que no se pretendía que los estudiantes probarán o demostrarán el hecho geométrico mencionado, dado que el sistema teórico construido solo les permitía dar explicaciones basadas en lo que veían en CABRI. Posterior a la segunda sesión de trabajo, se realizo una entrevista a los distintos grupos, en la que se buscaba indagar acerca de cómo ellos habían establecido el hecho geométrico. Con base en esta entrevista, se presenta el análisis de episodios que da cuenta de la categoría de análisis 2, a través de dos de sus indicadores, los cuales son: Correcto establecimiento del antecedente y el consecuente de la conjetura, y uso correcto de cuantificadores, ver **Tabla 1.**

En la sesión de trabajo en la que se solicito a los estudiantes establecer un hecho geométrico de la regularidad encontrada en la suma de los ángulos interiores de un triángulo, nos interesamos por el grupo de E1, E5 y E9 debido a que produjo dos versiones, ver **Figura 1**.

[24] Según Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A., Molina, O. (2007), "autonomía" hace referencia a la capacidad de fundamentar con razones propias lo que se dice y lo que se hace independientemente de otra autoridad.

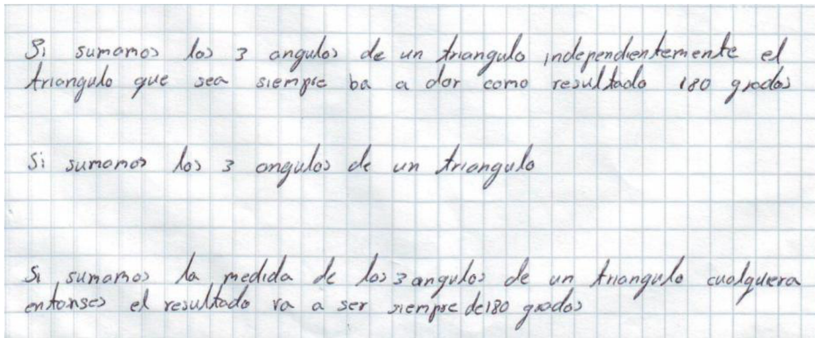

Figura 1. Los tres hechos geométricos que establece el grupo conformado por los estudiantes E1, E5 y E9

Correcto establecimiento del antecedente y el consecuente de la conjetura

Cuando los estudiantes buscan explicarle a la profesora, que tienen en cuenta para formular un hecho geométrico, hacen explicito la relación que establecen entre antecedente y condiciones impuestas en la situación, y entre consecuente e invariante encontrado durante la exploración. El siguiente episodio de la entrevista señala dicha relación.

14.	P	Listo. Cuando fueron a escribir el hecho geométrico, qué tuvieron en cuenta para escribir el hecho geométrico. [Los estudiantes se miran y no saben que responder, la profe vuelve a intervenir y replantea la pregunta]. O sea cuando les dicen escribir un hecho geométrico de un invariante qué encontraron cuando estaban explorando en CABRI, en qué piensan para escribir el hecho geométrico.
15.	E1	En qué tenemos.
16.	P	En lo primero que piensan es en lo que tienen, listo. ¿En esta situación que tenían?
17.	E5	[Luego de una pausa] Un triángulo.
18.	P	¿Un triángulo?
19.	E5	Decía que si sumamos la medida de los tres ángulos de un triángulo.

En las intervenciones de los estudiantes E1 y E5, éstos exhiben la necesidad de tener en cuenta lo que les ha sido dado en la tarea propuesta (antecedente) antes de empezar a formular la conjetura. En intervenciones posteriores, se percibe cómo antes de escribir el hecho geométrico buscan identificar las partes que lo constituyen (no solo el antecedente sino también el consecuente), así como formularlo de acuerdo con convenciones establecidas en la clase (estructura *si…entonces)*. El siguiente episodio de la entrevista evidencia lo anterior.

22.	P	Después de tener en cuenta lo que tienen ¿qué hacen?
23.	E5	Pues nos damos cuenta que el resultado siempre va a hacer de 180 grados independientemente el triángulo que sea.

24.	E1	Y comenzamos a formar, que si tenemos un triángulo que es de lo que estamos hablando, entonces comenzamos a armar con *sí* y *entonces*. O sea que por lo menos con el si tenemos un triángulo ya comenzando así vamos armando el hecho geométrico.

La respuesta de E5 a la pregunta realizada por la profesora, nos lleva a inferir que este estudiante reconoce que luego de identificar lo dado debe dar cuenta del invariante encontrado, asignándole el papel de consecuente en la formulación de la conjetura. E1 a diferencia de E5, se enfoca en reconocer la estructura de implicación que debe tenerse en cuenta a la hora de redactar el hecho geométrico, enfatizando que en dicha estructura luego del *si* se hace referencia al antecedente.

Uso correcto de cuantificadores

Otro de los intereses de la profesora en las dos versiones del hecho geométrico se centro en la razón que los llevó a cambiar el término ”independientemente” por “cualquiera”, ella decide preguntarles a los estudiantes sobre la diferencia que encuentran entre las dos versiones propuestas. Las respuestas de los estudiantes a esta inquietud, se señalan en el siguiente fragmento.

72.	E9	Ahora otra cosa, cuando decimos un triángulo independientemente, pues cuando decimos que es un triángulo ya sabemos que es cualquier triángulo, aquí ya no le colocamos eso, de un triángulo cualquiera.
73.	E1	Le cambiamos el independiente por cualquiera que también sobra. [Risas]
74.	P	¿Qué?
75.	E1	Esta palabra independiente y cualquiera también sobran porque sabíamos que estábamos hablando de un triángulo.
76.	E9	Independientemente y cualquiera, pues a mí me parece que es cómo lo mismo.

En las intervenciones anteriores más que señalar una diferencia entre las dos versiones propuestas, los estudiantes manifiestan una necesidad por utilizar un término que les permitiera hacer explicito que la regularidad encontrada era válida para todo triángulo, en este sentido utilizan los términos “independiente” y “cualquiera” como cuantificadores universales (para todo). Del fragmento anterior se resaltan dos conclusiones del grupo: (i) los dos términos utilizados pueden considerarse como sinónimos [76]. (ii) en la escritura de la conjetura pueden omitirse los términos mencionados debido a que el referirse a un “triángulo” ya implica una generalidad [72].

Es importante señalar que no todas las acciones que se establecieron en el diseño de las categorías de análisis fueron producto de la construcción de la teoría del estudio, algunas fueron emergentes, es decir se identificaron en la práctica al momento de la realización de transcripciones de las sesiones y la selección de los episodios. Por ejemplo, la acción “Identifica y explicita que sobran o faltan propiedades o palabras” del indicador Verificación de la formulación de la conjetura. Surgió, al observar que los estudiantes al plantear un hecho geométrico, buscan utilizar palabras correctas y el releer muchas veces lo que han escrito les permite indagar sobre la pertinencia del mismo. Es lo que sucede en el episodio anterior, los estudiantes del grupo E1, E5 y E9, usaron dos palabras “cualquiera” e “independiente”, la profesora al indagar sobre el cambio pudo establecer, que más allá de la estructura del enunciado, los estudiantes intentan verificar que en el enunciado quede claro la generalización de los triángulos.

CONCLUSIONES

Dado que esta comunicación es producto de un trabajo en curso, más que plantear conclusiones queremos señalar una de las reflexiones que hemos hecho en relación con nuestra experiencia investigativa. La selección de los episodios y la lectura global de las transcripciones, nos ha llevado a contemplar aspectos en los indicadores de las categorías que no teníamos previamente establecidos. Por ejemplo, considerar que un estudiante puede realizar acciones que lo llevan a identificar elementos que sobran o faltan al formular la conjetura, es un indicador emergente de las acciones del grupo de estudiantes con los que se desarrollo el proyecto, y es un reflejo de que las categorías no solo son el producto de una revisión teórica sino que también emergen de la práctica.

BIBLIOGRAFÍA

Boero, P. (1999). *Argumentation and mathematical proof: A complex productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof.* Traducción realizada por Patricio Herbst.

Parra, D. y Piñeros, A. (2011). *Elaboración de conjeturas: El caso de una pareja de estudiantes en una clase de geometría plana.* Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006). *La actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas.* Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A., Molina, O. (2007*). Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores*. Memorias XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática.