

## COMUNICACIÓN BREVE

### CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS Y SUS OPERACIONES A PARTIR DE LAS FRACCIONES ARITMÉTICAS

Aura Liliana González Vivas

Estudiante de último semestre de Licenciatura de Matemáticas y Estadística  
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia  
lilisveth@yahoo.es

#### Resumen

Este artículo presenta el diseño, gestión y resultados de un proyecto de investigación de aula para estudiantes de grado noveno, orientado a corregir errores y fortalecer el aprendizaje de las fracciones algebraicas y sus operaciones. La propuesta destaca la importancia de la relación entre las fracciones aritméticas y las fracciones algebraicas. Los resultados se basan en el análisis de errores propuesto por Socas et al., (1996) y la valoración de la idoneidad didáctica del EOS de Godino et al., (2006).

**Palabras clave:** fracciones algebraicas, fracciones aritméticas, errores, Idoneidad Didáctica.

#### Abstract

This paper presents the design, management and results of a research project in the classroom for students ninth grade, designed to correct mistakes and reinforce the learning of algebraic fractions and operations. The proposal stresses the importance of the relationship between arithmetic fractions and algebraic fractions. The results are based on the error analysis proposed by the Socas et al., (1996) and assessing the suitability of the EOS Godino didactic et al. (2006)

**Key words:** algebraic fractions, fractions arithmetic, errors, Teaching Competence.

#### INTRODUCCIÓN

Este proyecto se genera en un curso de apoyo para el aprendizaje de las matemáticas con estudiantes de grado noveno del Colegio Guillermo León Valencia de Duitama, en las asignatura Proyecto Pedagógico VI y Ambientes Educativos IV de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia Seccional Duitama, como parte de la formación integral del futuro docente.

La transición de la aritmética al álgebra es quizás el camino más complejo al cual se enfrentan los estudiantes de secundaria ya que es el enlace para construir los significados de objetos algebraicos, lo cual genera conflictos que no permiten avanzar en el aprendizaje. Es por esto, que este proyecto se orienta en la construcción del significado de las fracciones algebraicas y sus operaciones por medio de las fracciones aritméticas, con el fin de corregir los errores detectados en un diagnóstico preliminar y de esta forma mejorar en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos y procedimientos matemáticos acogiendo los principios constructivistas.

#### DESARROLLO

Se llevó a cabo un diagnóstico preliminar con 29 estudiantes, niños y niñas de grado noveno del Colegio Guillermo León Valencia de Duitama, con una edad promedio de 14 años. Su principal objetivo era identificar los errores que manifiestan en fracciones algebraicas y sus operaciones. Para esto, se hizo necesaria y la aplicación de instrumentos que suministró la información precisa, entre los cuales encuentra la matriz de observación donde se

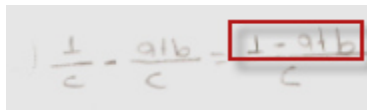
registró las situaciones que se presentaron en el aula de clase de forma esquematizada teniendo en cuenta el objetivo de la observación. El otro instrumento empleado es el cuestionario inicial que se planificó de tal forma que se pudieran detectar los errores objeto del estudio teniendo en cuenta las categorías de errores en el álgebra propuesta por Socas, Camacho, Palarea y Hernández (1996). Como se muestra en la siguiente tabla:

CATEGORÍA Según Socas (1996)	TIPO DE ERROR
LA COMPRESIÓN DE LA ARITMÉTICA POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES	USO INAPROPIADO DE ALGORITMOS PARA SUMAR FRACCIONES.
	MANEJA DE FORMA INAPROPIADA LA DISTRIBUCIÓN DEL SIGNO MENOS ANTEPUESTO A UNA FRACCIÓN.
	HACE FALSAS GENERALIZACIONES DE ALGORITMOS APRENDIDOS CON LOS NÚMEROS EN ARITMÉTICA.
	RREALIZA UNA FALSA GENERALIZACIÓN DEL NEUTRO ADITIVO Y NEUTRO MULTIPLICATIVO.
LA NATURALEZA Y SIGNIFICADO DE LOS SÍMBOLOS Y LAS LETRAS	INTERPRETA DE FORMA INCORRECTA EL SIGNIFICADO DE LA LETRA COMO VARIABLE.
EL OBJETO DE LA ACTIVIDAD Y LA NATURALEZA DE LAS RESPUESTAS EN ALGEBRA.	LA SOLUCIÓN ESTA REDUCIDA A UN ÚNICO TÉRMINO.
EL USO INAPROPIADO DE FÓRMULAS O REGLAS DE PROCEDIMIENTO.	HACE MAL USO DE LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.
	HACE FALSA GENERALIZACIÓN DE LA CANCELACIÓN CON PRODUCTOS
NOCIÓN DEL CONCEPTO O SIGNIFICADO.	TIENE UNA NOCIÓN DE FRACCIÓN ALGEBRAICA INADECUADA.

Tabla 1. Categorización de los errores en álgebra según Socas

Se determinó que los errores que se cometen con mayor frecuencia son los relacionados con *la comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes*, ya que si ellos no dominan las operaciones con fracciones las traducen erróneamente al campo algebraico, tal como se muestra en los siguientes protocolos:

Cuando se les pide a los estudiantes efectuar la siguiente resta de fracciones  $\frac{1}{c} - \frac{a+b}{c}$



Se ignora la distribución del signo menos antepuesto a una fracción.

Y cuando se les pide Efectuar la siguiente suma de fracciones algebraicas  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{xy}$$

Se hace falsa generalización de los algoritmos aprendidos con los números en aritmética, en este caso el uso inapropiado de algoritmos para sumar fracciones, omitiendo el mínimo común denominador.

De acuerdo con los resultados del diagnóstico se verifica que una de las principales dificultades, también señalada por Velázquez (2003), es el paso de la Aritmética al Álgebra el cual es uno de los tránsitos más difíciles dentro del desarrollo gradual de los contenidos matemáticos. De acuerdo a lo planteado, el problema de investigación se formuló de la siguiente forma: ¿En qué medida las fracciones aritméticas pueden promover la comprensión significativa de las fracciones algebraicas y sus operaciones?

El desarrollo del proyecto se centró en la construcción del significado de las fracciones algebraicas y sus operaciones, tomando como punto de referencia las fracciones aritméticas, ya que se comportan de forma similar, lo que conlleva a plantear la siguiente hipótesis: una propuesta de enseñanza a partir de las fracciones aritméticas propiciará la comprensión significativa de las fracciones algebraicas y sus operaciones.

La investigación está referenciada y apoyada en información sobre los errores comunes cometidos por los estudiantes en las fracciones algebraicas y sus operaciones de acuerdo con Brousseau, Davis y Werner (1986) citado por Rico et al. (1997) y la categorización que propone Socas et al. (1996) ya que son un buen indicador de la construcción del conocimiento matemático por parte de los estudiantes. De igual manera es necesario sustentar el proyecto con base en la configuración epistémica, necesaria para la valoración de la idoneidad epistémica y en general la idoneidad didáctica propuesta en el Enfoque Ontológico y Semiótico (EOS) de Godino (2006). También se sustenta esta propuesta en los principios constructivistas formulados por Waldegg (1998) y deficiencias encontradas en la transición de la aritmética al álgebra (Mata et al., 2009).

Los errores son indicadores fundamentales que permiten visualizar cómo los estudiantes construyen los significados, por lo cual es indispensable establecer una categorización de errores direccionada hacia las fracciones algebraicas.

Brousseau, Davis y Werner (1986) citados por Rico et al. (1997), señalan, que los errores son el resultado de un procedimiento sistemático imperfecto que el alumno utiliza de modo consistente y con confianza. Y de acuerdo con Socas (1997), el error debe ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no sólo la consecuencia de una falta específica de conocimiento o una distracción.

### **Categorización de errores en el aprendizaje de fracciones algebraicas**

De acuerdo con categorización que hace Socas (1996) con respecto a los errores en álgebra, se tienen en cuenta para la investigación las siguientes categorías:

### La naturaleza y significado de los símbolos y las letras

El mayor cambio conceptual en el aprendizaje del álgebra se centra alrededor de su diferencia con la aritmética: significado de los símbolos e interpretaciones de las letras.

Los símbolos son un recurso que permite denotar y manipular abstracciones.

Se encuentran errores como al efectuar la siguiente suma:

$$\frac{3}{2x} + \frac{7x}{2} = \frac{10x}{4x}$$

Donde el estudiante además de olvidar el denominador común, ignora totalmente la variable y pretende dar una respuesta de término único, en si clausurar la suma.

### La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes

El algebra es la generalización de la aritmética. Luego la asimilación de la generalización de relaciones y procesos se lleva a cabo en la aritmética. A veces, las dificultades que los estudiantes presentan en el álgebra no son tanto dificultades en el algebra sino problemas que se quedan sin corregir en la aritmética. Entre los cuales es muy común el siguiente:

$$-\frac{a+b}{c} = -\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Donde el estudiante no tiene en cuenta el signo menos antepuesto a la fracción.

### El uso inapropiado de “fórmulas” o “reglas de procedimientos”.

Algunos errores de los estudiantes se deben al uso inadecuado de operaciones, formulas o reglas conocidas en situaciones nuevas.

Entre estos se encuentran los errores de linealidad como son:

Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva.

Nos damos cuenta del mal uso de esta propiedad como en lo siguiente:

$$\frac{A}{B+C} = \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$$

Algunos de los alumnos llegan a aplicarla correctamente cuando el valor que multiplica se encuentra a la izquierda pero no saben como resolverla si se encuentra a la derecha, como se encuentra en la siguiente operación.

EL error anterior puede venir de lo que al estudiante se le expone en clase como por ejemplo:

$$\frac{B+C}{A} = \frac{B}{A} + \frac{C}{A}$$

Errores de cancelación.

Se encuentran errores como:

$$\frac{Ax + By}{x + y} = A + B$$

Que probablemente viene de:

$$\frac{Ax}{x} = A$$

Donde esta regla da origen a diversas situaciones como:

$$\frac{9x + 6}{6} = 9x$$

### Configuración epistémica del concepto de fracción algebraica

Si bien es necesario hacer un análisis profundo de la experiencia docente, teniendo en cuenta la propuesta acerca de la idoneidad didáctica que exponen Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006), quienes han desarrollado un conjunto de nociones teóricas desde el enfoque ontológico y semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática, que permiten explicar muchos de los fenómenos que se producen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

La configuración epistémica es el referente de comparación que permite valorar el proceso de instrucción implementado, teniendo en cuenta los seis objetos matemáticos del EOS. (Godino, Font y Wilhelmi, 2006).

De acuerdo con Godino et al. (2006) tanto los sistemas de prácticas como los objetos que intervienen y emergen están relacionados entre sí constituyendo redes o configuraciones epistémicas, es decir, cómo van apareciendo y relacionándose los seis objetos matemáticos primarios reconocidos en el EOS: situaciones, lenguaje, procedimientos, conceptos, argumentos y proposiciones; la descripción de tales redes debe ser un objetivo del análisis epistemológico de una noción matemática desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje.

El desarrollo del proyecto se apoyó en la investigación – acción en el aula. La cual acuerdo con Martínez (2000) es la estrategia que permite la construcción colectiva del conocimiento, pretende desarrollar actitudes, habilidades y competencias investigativas en los participantes de la investigación. Acorde con Domínguez (2003) es el método de investigación en el que el investigador, en este caso el docente, tiene un doble rol, el de investigador y el de participante, también, combina dos tipos de conocimientos: el conocimiento teórico y el conocimiento de un contexto determinado. Sin dejar de lado la importancia que tienen los estudiantes que pasan de ser sujetos pasivos a sujetos activos.

El objetivo de la sistematización consistió en evaluar el proyecto de aula “construcción del significado de las fracciones algebraicas y sus operaciones a partir de las fracciones aritméticas” mediante los criterios de idoneidad didáctica propuestos en el EOS en el conocimiento de la instrucción matemática. Además se enfoca en contestar los siguientes interrogantes: ¿En qué medida es idóneo el uso de las fracciones aritméticas como herramienta para la construcción del significado de las fracciones algebraicas y sus operaciones? ¿En que nivel se corrigieron los errores el cuestionario inicial?

A continuación se hace énfasis a la valoración de la idoneidad didáctica en sus componentes cognitivo, interaccional y mediacional.

**Idoneidad cognitiva:** Es importante destacar que para el desarrollo de esta investigación se hizo una revisión extensa acerca de las fracciones algebraicas para poderlas abordar en el aula de clase, se pretendió revisar la mayoría de objetos, significados y procesos que permite una construcción significativa. Sin embargo así como se evidencia en los cuestionarios inicial y final y las opiniones de los estudiantes en la encuesta que se les aplicó, se presentaron dificultades de comprensión de significados, se abordó el contraste entre el cuestionario inicial y el cuestionario final el cual nos permite visualizar que tanto los significados construidos por los estudiantes se acercan a los institucionales.

De acuerdo a los resultados se evidencia en gran medida que los estudiantes siguen cometiendo los mismos errores, probablemente debido a vacíos que persisten desde años atrás.

**Idoneidad Interaccional.** Se conoce de antemano qué errores se cometen relacionados a las fracciones algebraicas mediante una investigación que permitió determinarlos. A pesar de la intervención y la propuesta implementada basada en construir el significado de las fracciones algebraicas a través de las fracciones aritméticas, sigue persistiendo, como se muestra en los siguientes protocolos:

Cuando se le pide al estudiante efectuar e indique el procedimiento que permite pasar de la fracción  $-\frac{a+b}{c}$  a la fracción  $\frac{-b-a}{c}$

$$-\frac{a+b}{c} = -\frac{b-a}{c}$$

Se ignora el signo menos antepuesto a una fracción.

Al pedirle al estudiante simplificar la siguiente fracción algebraica.  $\frac{9x-6}{6}$



Persiste el mal uso de la cancelación.

Y además salen a flote nuevos errores que dificultan aún más la construcción de un aprendizaje significativo, relacionados con las propiedades de los exponentes y factorización.

Idoneidad mediacional. De acuerdo como lo manifiestas los estudiantes en la encuesta faltó poner en marcha actividades más innovadoras, pero debido al tiempo y al tema era difícil crearlas y ponerlas en marcha. Aunque las actividades propuestas pretendían que el estudiante saliera de la rutina tradicional.

## CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados obtenidos es necesario indagar acerca del quehacer en el aula de clases ya que se evidencia grandes falencias en el desarrollo cognitivo de los estudiantes. Puede ser que un factor importante como no haber abarcado toda la temática sobre fracciones algebraicas haya incidido en los resultados obtenidos. Se evidencia que para desarrollar esta experiencia es necesario un tiempo más prolongado, ya que dar conclusiones sobre la estrategia aplicada como inadecuada o adecuada es demasiado prematuro, sería conveniente replantearla, mejorarla y corroborar su pertinencia. Sin embargo, hay que tener en cuenta que construir el significado de las fracciones algebraicas a partir de las fracciones es algo relativamente nuevo que tiene que ser explorado y ampliado. También es importante reconocer que estas experiencias permiten ampliar la noción que se tiene acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

## BIBLIOGRAFÍA

- Domínguez, R. (2003). La Investigación Acción como Método de Investigación para docentes Recuperado:marzo de 2011, disponible en: <http://www.grade.org.pe/ime/docs/presentGRADE.ppt#261,4,...>
- Godino, J., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27(2).
- Martínez, M. (2000). La investigación-acción en el aula. *Agenda Académica*, 7(1), 27-39.
- Mata, E., Ramírez, M., Porce, A., & Siwert, P. (2009). Deficiencias en la transición de la aritmética al álgebra. // *Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales*, (págs. 74-80). La Plata.
- Palarea, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 3-28.
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., y otros. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori.
- Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., & Hernández, J. (1996). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Velázquez, F. (2003). Una propuesta de tránsito gradual de la aritmética al álgebra. *Conferencias y ponencias de las XJAEM*, 669-688.
- Waldegg, G. (1998). Principios constructivistas para la educación matemática. *EMA*, 4(1), 16-31.