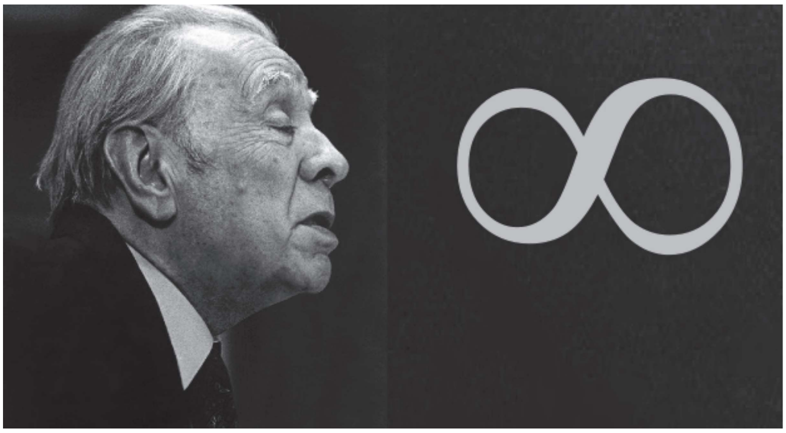
Revista EJES

El horror al infinito



Yasmín Johanna García Gaviria[1]

Resumen. En este artículo se aborda el problema del "horror al infinito" por parte de los antiguos griegos y la manera como este problema histórico se hereda hasta nuestros días. El resultado principal de este trabajo es la caracterización de algunos obstáculos epistemológicos propios de la noción de límite; tratamos de mostrar que, si bien los obstáculos están presentes en el aula de clase, el conocimiento de ellos nos permitirá crear estrategia para trabajar ese horror al infinito que experimentó Aristóteles, siendo la historia y la epistemología la única ayuda.

Palabras clave: infinito, límite, convergencia, obstáculos epistemológicos.

Introducción

El infinito tiene un papel esencial e incuestionable en las matemáticas modernas; para el matemático y el licenciado en matemática de hoy en día es una "noción matemática" con la cual es necesario trabajar. Por tanto, llevar el infinito a las aulas de clases es el reto hoy de cada educador matemático tanto a los docentes de la básica como de la media; sin embargo se puede documentar que una de las causas del fracaso por parte de los estudiantes que ingresan a la universidad en los primeros cursos de cálculo es el poco dominio de los conceptos fundamentales, porque en sus instituciones educativas no se dedica el tiempo suficiente a los últimos ejes temáticos del grado undécimo como son el límite, la derivada, la integral, entre otros, sino que incluso algunas instituciones pasan por alto el área de cálculo para dedicarse a otros propósitos propios de la institución. Pero hay que llamar la atención en el hecho de que algunos docentes no "dominan" los conceptos fundamentales. Clásicamente se atribuye a la baja formación de los estudiantes y del docente la causa del problema, muy pocas veces se examina las dificultades intrínsecas y propias de los conceptos, pues aquellos conceptos que han tomado siglos su formalización y comprensión, por parte de muchos matemáticos en diferentes contextos, se pretende enseñar en sesiones de uno o dos semestres bajo presiones académicas, créditos que cumplir y tres o más áreas de conocimiento que entender. El estudiante y el docente finalmente no pueden evitar enfrentarse a los llamados obstáculos epistemológicos, aquellos que son heredados del conocimiento como tal y que no importan los esfuerzos de las partes, siempre están ahí presentes, entorpeciendo el proceso de aprendizaje por parte de los estudiantes. Esta situación es vista con preocupación por académicos, catedráticos e investigadores que, buscando la manera de aportar al problema del fracaso, se remiten a los estudios históricos y epistemológicos donde indagan formas de abordar el problema de la mejor manera.

El horror infinito de los griegos

Remitiéndonos a una revisión panorámica del desarrollo histórico del cálculo, hemos encontrado que a través de más de 2.500 años se dio una serie de contextualizaciones y recontextualizaciones teóricas cuya trascendencia generalmente no se ha tenido en cuenta en las aulas de clase. Entre estos aspectos podemos señalar la estrecha relación entre

[1] Licenciada en Matemáticas y Física, Universidad del Valle, Colombia; e-mail: yasmin.garcia@correounivalle.edu.co

el límite y los procesos actual y potencialmente infinitos. En nuestro estudio histórico del infinito vemos que nace la necesidad de diferenciar y entender el infinito potencial. Estos aspectos nos remiten obligatoriamente a los inicios de las matemáticas occidentales en la antigüedad griega. En especial nos conducen directamente al llamado "horror al infinito", que consiste en la no aceptación de los procesos infinitos acabados. Para Aristóteles todo sistema científico debía ser consistente, y la aceptación del infinito actual llevaría a contradicciones; claramente, el ejemplo está en las paradojas de Zenón, si se aceptaba que el continuo estaba compuesto como un agregado actualmente infinito de puntos es en sí mismo contradictorio. Por tanto se acepta solo el infinito potencial, aquel que se da en un proceso sin fin. Es importante llamar la atención en el hecho que Arquímedes, en su método exhaustivo, basado en la proposición X.1 de Euclides, calcula algunos límites; pero, de ninguna manera, podemos decir que Arquímedes defina tal noción. Sin embargo, el método permite calcular con infinitas figuras, inscritas o circunscritas, algunas cuadraturas. Si analizamos la proposición X.1[2,] podemos afirmar que se están dando condiciones, tipo épsilon-delta, para que el límite de una sucesión converja a cero. Los matemáticos griegos concibieron el método exhaustivo para encontrar la cuadratura del círculo. Este método se apoya en la suposición de que la diferencia entre la medida de un círculo y uno de sus polígonos inscritos puede ser tan pequeña como se quiera; todo depende del número de lados que contenga ese polígono. Se trata, justamente, del cálculo de una sucesión que converge a cero. Un hecho poco comentado en los libros típicos de Historia de las matemáticas es que en los *Elementos*, Euclides incorpora en la proposición XVI, el llamado ángulo de contingencia; es un ángulo formado entre una circunferencia y su recta tangente en un punto determinado. Es un ángulo tan pequeño como se desee, pero mayor que cero. Con esta proposición encontramos una magnitud infinitamente pequeña, un ángulo que siendo mayor que cero, es menor que cualquier ángulo dado. Euclides no utiliza este ángulo en ninguna operación geométrica, simplemente lo enuncia como una propiedad de la tangente a una circunferencia.

El horror al infinito en la edad media

En la edad media se dan cambios sustanciales en la forma de hacer ciencia. El orden escolástico impone condiciones y métodos. La discusión sobre el infinito pasa a un nivel teológico. Desde la teología se planteaba que si podía haber "algo" que podía denominarse infinito acabado ese algo debía ser únicamente Dios. Al utilizar palabras como eterno, omnipotente, perdurable, entre otras denominaciones, para el infinito, se designaban propiedades de la divinidad. De esta forma, se podría decir que en la cultura matemática perduraba la idea aristotélica de la no existencia del infinito actual en la Matemática. En el renacimiento resurge la necesidad de indagar sobre el infinito matemático, en especial con el estudio del espacio y el universo infinito. Los artistas de la época utilizaron las matemáticas para hacer florecer y embellecer sus obras de arte; en este sentido uno de grandes aportes fue la noción de punto de fuga, mediante el cual se daba perspectiva a las pinturas. También hay un resurgir de la discusión filosófica respecto al infinito, en particular con Giordano Bruno, el espacio, el lugar y posición que ocupamos en nuestro universo es un importante objeto de estudio, después de las teorías copernicanas las cuales afirmaban la centralización del universo. Bruno afirma que el sol era solamente una estrella que hacía parte de nuestro universo infinito que el sol no era el centro y que el universo no tendría por qué tener un centro, esta afirmación le da otro punto de vista al límite entendido desde las matemáticas, las matemáticas parecen resurgir después de un receso medieval. Matemáticamente, en este periodo, la indagación sobre el infinito resurge en los trabajos de Cavalieri, quien establece un formalismo para tratar el infinito actual en el marco de cuadraturas y curvaturas. A partir del denominado Principio de Cavalieri se hace posible la comparación entre dos figuras utilizando principios atomistas. Cavalieri formaliza esta suma, del latín *Ominus*, fijando unas reglas operativas muy particulares, obtenidas de la generalización de las operaciones finitas. A través del *Ominus x*, que se traduce: súmese continuamente "todos los objetos *x*", Cavalieri esquiva el horror al infinito de los antiguos para incorporar sumas actualmente infinitas camufladas en la teoría de razones y proporciones, pues el proceso se efectúa a partir de comparaciones sucesivas que le permiten obtener resultados en cascada; esto es, de dimensiones inferiores a dimensiones superiores. El

[1] **Proposición X1.** Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que la de su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada. (Euclides, 1991)
[2] **Proposición XVI.** La recta trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos con el mismo caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta en el espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el restante menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo (Euclides, Elementos, 1991, págs. 311-312).

método de los indivisibles fracasa por dos razones fundamentales: (1) no se puede extender para todos los casos, pues los procesos operativos algebraicos son limitados. (2) La falta de un sustento formal para los indivisibles y el *Ominus*. Con Wallis se da un paso trascendente que lleva de los indivisibles a los infinitesimales; concepto controversial que se convertirá en una herramienta conceptual en los trabajos de Newton y Leibniz. Con el proceso del uso de los infinitesimales estamos muy cerca del concepto de límite. Sin embargo, críticos de la talla de Berkeley, entendieron que la salida a través de los infinitesimales constituía una falsa salida al problema del horror al infinito planteado por los antiguos. Sería Cauchy quien daría ese gran paso de entender el límite no como una herramienta, sino como un concepto a través del cual se formalizaban los procesos potencialmente infinitos, como salida al "horror al infinito" de los antiguos. De esta manera, los infinitesimales, cantidades actualmente infinitas, se definen con base al límite, en un proceso formal que no lleva a las contradicciones planteadas por Aristóteles, pero en su línea de desarrollo filosófico. Tal como lo ha mostrado en (Arbeláez G. I., 2010) si bien el límite constituye una salida conceptual a la implementación del infinito potencial, como telón de fondo aparece el infinito actual. Concretamente la instauración del infinito actual, por parte de Cantor, tuvo como antecedente importante la implementación del concepto de límite. En otras palabras los procesos infinitos, actuales y potenciales, se encuentran dialécticamente relacionados.

El horror al infinito en el siglo XXI

Son muchas las investigaciones en la actualidad que han tomado como punto de referencia el concepto de límite atendiendo a las dificultades de los estudiantes en los primeros cursos de la universidad. Muy pocas de éstas hacen referencia directamente a la tensión entre el infinito actual y el infinito potencial. Sin embargo, hemos documentado algunos trabajos que de alguna manera serán utilizados como punto de referencia en nuestra investigación.

En su tesis doctoral *Estudio micro genético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso*,[3] César Delgado (1998) realiza un estudio de caso con relación a la secuenciación y control de obstáculos y dificultades conceptuales, con el fin de desarrollar los esquemas conceptuales de los alumnos que dan cuenta de las definiciones matemáticas de límite y continuidad. El objetivo de este trabajo es estudiar el problema de la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad, en el caso de un primer curso de cálculo a nivel Universitario, para proponer explicaciones que ayuden a comprender las fuentes de la problemática y así, encontrar soluciones a las dificultades que se presentan en la enseñanza de estos conceptos fundamentales del cálculo. La conclusión principal es la posibilidad de establecer situaciones didácticas que permitan controlar la evolución conceptual y establecer una relación eficaz entre aprendizaje y desarrollo cognitivo. En la tesis doctoral *Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión* de Rosa Elvira Páez Murillo (2004)[4] se pretende evidenciar que las nociones fundamentales del cálculo (derivada e integral) están definidas en términos de la noción de límite. Por lo tanto, es primordial entender este último para la comprensión de los conceptos en cálculo. Un problema significativo, en el quehacer académico de profesores y para la propia investigación en educación matemática, es el afrontar que un considerable número de alumnos no alcanza los rendimientos esperados en este tipo de asignaturas. El problema de su bajo rendimiento académico se refleja en los resultados obtenidos en pruebas internacionales como el TIMSS (1997), o en los resultados que ofrece la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2000). Lo anterior es un simple indicador para procesos que busquen mejorar la educación.

Conclusiones

Algunos obstáculos epistemológicos propios del concepto de límite.

En este proceso histórico y epistemológico, hemos identificado algunos obstáculos epistemológicos propios del concepto de límite, los cuales, ahora y en la antigüedad, han causado dificultad para la comprensión de los conceptos fundamentales y no han permitido que se formalice el infinito. Esto hace que la enseñanza del cálculo sea uno de los desafíos de la actualidad y la preocupación de docentes e investigadores, no solo de las carreras en matemáticas y licenciaturas, sino de las afines, como ingeniería, entre otras. En este sentido, enunciaremos cada uno de ellos y analizaremos algunas de sus consecuencias en la enseñanza y el aprendizaje del límite.

[3] (Delgado, 1998). Tesis doctoral

[4] (Páez, 2004)

Tal vez uno de los más importantes sea la definición que se tiene de límite en la cotidianidad, por el inconveniente justamente de utilizar el término "límite", el cual es entendido como una barrera, muro, pared, o un respaldo final de algo, una línea real o imaginaria de un lugar o espacio. Este obstáculo lleva a que se experimenten contradicciones como las que se dan con las paradojas de Zenón. Esta definición intuitiva que tienen los estudiantes del bachillerato y primeros semestres de universidad, no le permiten comprender el infinito acabado, es herencia propia del horror al infinito de la antigüedad.

Otro de los obstáculos es el de generalización, consistente en llevar las propiedades de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos; pensar, por ejemplo, que las operaciones que se cumplen en lo finito se cumple en lo infinito sin comprender que lo que se está llevando a cabo es justamente el límite como formalización del proceso infinito. Un ejemplo en esta dirección se da cuando en la clase de cálculo se presenta la operación $\infty+\infty=\infty$; aquí los estudiantes creen que están aplicando procesos de sumar infinitos o tratar a ∞ como una cantidad numérica, cuando lo que se está aplicando es el límite de una función, por ejemplo, dada así:

$$\lim_{x\to\infty} x+x^2 = \lim_{x\to\infty} x + \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty+\infty=\infty$$

El procedimiento son aplicaciones de las propiedades de los límites y lo se debe comprender es ¿qué sucede en el infinito?, potencialmente hablando. La salida es comprender que el límite formaliza la potencialidad de los procesos infinitos, el resultado no es una magnitud sino un proceso acabado.

Finalmente, uno de los obstáculos más reiterativos es el uso de las expresiones "infinitamente grande" e "infinitamente pequeño". Debido a que intenta ligarse con cuestiones cotidianas, ya que concebir algo que sea infinitamente pequeño tiene otras connotaciones, como por ejemplo el átomo, el cual es considerado como algo "infinitamente pequeño", como ya se había mencionado en Demócrito y el universo es considerado como algo "infinitamente grande"; en este sentido sugiere que sigue siendo lo infinitamente grande considerado como un infinito potencial. En resumen, las nociones de infinitamente grande e infinitamente pequeño siguen siendo muy empíricas; los jóvenes parecen no estar preparados para enfrentar los trabajos de los transfinitos de George Cantor, los cuales se pueden considerar como la formalización del infinito actual, pues ni siquiera lo potencial del infinito ha sido superado.

El horror al infinito: un obstáculo en sí mismo

El temor a aceptar procesos acabados es una experiencia que sienten estudiantes, docentes e investigadores en los estudios del cálculo; es una herencia griega y moderna, porque la experiencia empírica parece decirnos lo contrario, la no aceptación de los procesos infinitos acabados van en contra de nuestros sentidos y se puede considerar en sí mismo un obstáculo propio de la noción, porque en todo los cursos de cálculo en los primeros semestres hay una negación por dejar atrás los procesos potencialmente infinitos y aceptar los actualmente infinitos. Desde los primeros grados de escolaridad vemos como, a veces de manera inconsciente, estamos negándoles la posibilidad a los estudiantes de aceptar el infinito utilizando expresiones que cohíben el uso del límite matemático. Pero, si los obstáculos siempre van a estar presentes ¿cómo lograremos el éxito de una clase de cálculo? Es claro que el infinito no es fácil de estudiar, la historia nos confirma que no será factible la introducción en un par de clases de colegio y universidad; los obstáculos epistemológicos propios del concepto no se pueden evitar, están intrínsecos en el concepto y por tanto en las clases. Es un proceso que se debe hacer despacio y no forzar ni condicionar su uso, así se lograrán resultados distintos a los que se han obtenido hasta ahora. El esfuerzo debe ser de investigadores y didactas juntos, quienes deben buscar estrategias de acercamiento al campo de las ciencias, en este caso las matemáticas. El colegio y la universidad deberían tener puntos de contacto, tanto metodológica como conceptualmente; de esta forma se suavizaría en algo la distancia conceptual del estudiante que se gradúa y logra entrar a la universidad. El límite es un concepto difícil, pasó por muchos procesos para lograr la formalización, su enseñanza es difícil y su estudio también pero, docentes y estudiantes, debemos tomar conciencia de que el infinito hace parte de nuestra cultura y el límite no es ajeno a los procesos matemáticos actuales, si bien los obstáculos no se pueden evitar, con ayuda de la historia y epistemología, tendremos herramientas para trabajar con ellos en el aula de clase.

Referencias

Arbeláez, G. &. (s.f.). *Aspectos culturales estéticos y epistemológicos del infinito matemático.* Documento de trabajo. Cali: Universidad del Valle .

Arbeláez, G. I. (2010). *La Evolución del análisis matemático en Colombia: 1850-1950.* Cali: Tesis doctoral, Universidad del Valle.

Arbeláez, G., & Recalde, L. (s.f.). *Aspectos históricos y culturales, estéticos y epistemológicos del infinito matemático*. Cali: Universidad del Valle.

Bolzano, B. (1851). *Las paradojas del infinito.* (L. S. 1991, Trad.) México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias: UNAM.

Borges, J. L. (1975). Avatares de la tortuga. En J. Borges, *Obras completas* (págs. 254-259). Buenos Aires: Emecé.

Cauchy, l. (1821). *Curso de Análisis.* México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias: UNAM.

Delgado, C. (1998). *Estudio microgénetico de esquemas conceptuales asociados a definición de límite y continuidad en universitarios de primer curso.* Universidad Autónoma de Barcelona: Departamento de didáctica de las matemáticas y de las ciencias experimentales.

Páez, R. (2004). Procesos de construcción del proceso de límite en un ambiente de aprendizaje corporativo, debate científico y autorreflexión. *Tesis doctoral*. México: Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN.

Recalde, L. (2012). *De los fundamentos de las matemáticas.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Recalde, L. C. (10 de Diciembre de 2010). Los filósofos presocráticos: la naturaleza como fuente de experiencia abstracta. *Revista de Ciencias, 14*, 87-99.

Recalde, l. C. (2012). El cálculo y la solución al problema de las cuadraturas. *Lectura 7,* 19-20.Cali: Universidad del Valle.

Recalde, L. C. (2012). La instauración del álgebra y del análisis como rama de las matemáticas. *Lectura 8*, 5-16.Cali: Universidad del Valle.