Revista EJES

¿Podemos admitir inconsistencias?

Diana Isabel Quintero Suica[1]

Resumen. En este artículo, se aborda las dos posiciones que surgen en las matemáticas y la lógica, a partir de las contradicciones que se evidencian en algunos sistemas teóricos, la formulación de un cálculo proposicional a partir de la lógica paraconsistente, junto con la demostración de algunos teoremas en dicho cálculo; y la jerarquización de una infinitud de cálculos proposicionales con características particulares.

Palabras clave: Inconsistencia, Principios Aristotélicos, Contradicción, Quasi-Matrices.

De acuerdo a los hechos históricos ocurridos durante el desarrollo de la humidad, fue Aristóteles quien dio las primeras bases sobre las leyes que debían gobernar la lógica. Dichos principios reciben el nombre de: Principio de Identidad (*si hay proposiciones verdaderas, hay una realidad a las cuales estas proposiciones se refieren* $[A \leftrightarrow A])$, no contradicción (*es imposible que algo sea y no sea al mismo tiempo y en el mismo sentido o en la misma dirección, y que la realidad es una y no dos, es decir, que si A es B y A no es B, son afirmaciones, solo una de las dos puede ser verdadera, y no las dos* $[\sim(A \wedge \sim A)])$ y tercero excluido (*la realidad es un sistema de partes determinadas recíprocamente, es decir, que todo tiene que ser o no ser. Si A es B o A no es B son proposiciones, no pueden ser falsas las dos. Si se niega una, no queda más alternativa que afirmar la otra*. $[A \vee \sim A])$, (Gamarra, 2004)

Algunos matemáticos de finales de siglo XIX como Frege, Pierce y Peano, fundamentaron sus trabajos en Matemáticas a partir de los principios establecidos por Aristóteles. Otro Matemático que trabajó con base en este esquema de razonamiento, fue George Cantor, y a partir de allí creó su teoría de los números transfinitos, en la cual se diferenciaba la clase de los números reales, naturales y racionales. Sin embargo, Bertrand Russell, logicista de la época, interesado en el estudio de los trabajos elaborados por Cantor en Teoría de Conjuntos, encontró en dicha teoría algunas falacias o errores de las cuales nace la paradoja de Russell que ilustra que es posible un resultado como *la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas*.

Él hizo un primer intento para remediar la contradicción que se presentaba en compañía de su profesor Whitehead, y en 1910 publicaron *Principia Mathematica,* libro donde se exponía la forma de resolver las diversas paradojas que surgían a partir de las contradicciones de los sistemas teóricos.

Paralelo a los esfuerzos por tratar de eliminar las paradojas que se encontraban en las teorías, en el mismo año nace una postura que, centrada en el estudio minucioso del principio de no contradicción de la lógica clásica, da origen a la concepción de lógicas basadas en los principios de identidad y tercero excluido, conocidas estas como lógicas no aristotélicas (paraconsistentes) - de manera semejante a como nacieron las Geometrías no euclidianas, al no aceptar como cierto el quinto postulado de Euclides.

La postura anteriormente expuesta, fue engendrada, de manera independiente, por los matemáticos Jan Lukasiewicz y Nikolaj Alexándrovic Vasiliev, y formalizada posteriormente con los trabajos de Newton Carneiro Affonso Da Costa, nacido en la ciudad de Curibita, al sur de Brasil. Con este último, se logra dar la presentación que hoy conocemos de las lógicas paraconsistentes.

Definición de las lógicas paraconsistentes

Un argumento conocido en lógica para evitar las inconsistencias es el argumento de la trivialización, donde se propone que, a partir de dos enunciados, de tal forma que uno sea la negación del otro, se puede deducir cualquier otra afirmación de acuerdo a Bomberieth (1995).

Una teoría que se caracteriza por lo dicho anteriormente, en donde todos sus enunciados son teoremas, se llama *trivial.* Estos sistemas pierden su utilidad debido a que puede deducirse cualquier fórmula bien formada. Sin embargo, desde el punto de vista sintáctico-semántico las teorías son aceptadas siempre y cuando no sean triviales.

[1] Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; e-mail: dma_dquintero472@pedagogica.edu.co

Todo lo anterior tiene como fin establecer la definición de lógica paraconsistente, si esta es una teoría inconsistente pero no trivial, entendiendo teoría inconsistente como aquella que contiene al menos dos teoremas de la forma p y $\sim p$, uno de los cuales es la negación del otro. Montes y Restrepo (2000).

El cálculo proposicional C_1

Lo primero que propone Da Costa es un sistema de cálculo proposicional, que denomina C_1, el cual tiene los conectivos de la lógica clásica de negación (~), conjunción (&), disyunción (V), implicación (⊃) y equivalencia (=), además de dos reglas de deducción básicas, que son:

> ***Regla 1.*** En C_1 no debe ser válido, en general, el principio de la no contradicción.
> ***Regla 2.*** De dos proposiciones contradictorias no debe ser generalmente posible deducir cualquier proposición.

Los nueve axiomas iniciales que propone Da Costa para este sistema de cálculo proposicional son:

1. $A \supset (B \supset A)$
2. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)$
3. $A \supset (B \supset A \& B)$
4. $A \& B \supset A$
5. $A \& B \supset B$
6. $A \supset A \vee B$
7. $B \supset A \vee B$
8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$
9. $A, A \supset B / B$

Además se añaden nuevos elementos antes de mostrar algunos teoremas que se deducen en este. Uno de ellos, indica que por ejemplo, si un enunciado A es derivable en el sistema C_1, y además no se tiene simultáneamente su negación en este mismo sistema, entonces este enunciado se comportará igual que las fórmulas del cálculo proposicional clásico, es decir, que para estos enunciados sí vale el principio de no contradicción, entendiendo este desde la formulación en donde $\backsim(A \wedge \backsim A)$ es verdadera, siendo A una proposición cualquiera, $\backsim$ es el símbolo de negación y $\wedge$ representando el conectivo de la conjunción.[2]. A este tipo de enunciados se les llamará proposiciones que se "comportan bien"[3], y los notaremos como $A°$.

También se hace necesario introducir algunas definiciones dentro del sistema

Definición 1. $A°$ será definida como $\backsim(A \wedge \backsim A)$
Definición 2. $\neg A$[4] será definida como $\backsim A \wedge A°$

Con base en lo anterior, se agregan los siguientes cuatro axiomas a nuestro sistema.

10. $A° \supset ((B \supset A) \supset ((B \supset \backsim A) \supset \backsim B)))$
11. $(A° \wedge B°) \supset ((A \wedge B)° \wedge (A \vee B)° \wedge (A \supset B)°)$
12. $A \wedge \sim A$
13. $\sim\sim A \supset A$

Ya con nuestros axiomas, definiciones y reglas de inferencia, demostremos algunos teoremas en este sistema

Teorema 1: Ley de Pierce $((A \supset B) \supset A) \supset A$

Además debemos tener tres esquemas para obtener la demostración. La verificación de que estos esquemas son tautologías se podrá hacer en el Anexo por medio de las *quasi-matrices*[5].

Esquema 1: $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$
Esquema 2: $\neg(A \supset B) \supset A$
Esquema 3: $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

Demostración. Para iniciar la demostración debemos tener en cuenta que $(A \supset B) \supset A \vdash A$ por el recíproco de la regla de introducción del implicador (T.D.).

1. $(A \supset B) \supset A$	Hipótesis
2. $\big((A \supset B) \supset A\big) \supset (\neg A \supset \neg(A \supset B))$	Esquema 1
3. $\neg A \supset \neg(A \supset B)$	Modus Ponen (1,2)
4. $\neg(A \supset B) \supset A$	Esquema 2
5. $(\neg(A \supset B) \supset A) \supset (\neg A \supset (A \supset B))$	Esquema 1
6. $\neg A \supset (A \supset B)$	Modus Ponen (4,5)
7. $\big(\neg A \supset (A \supset B)\big) \supset ((\neg A \supset \neg(A \supset B)) \supset A)$	Esquema 3
8. $(\neg A \supset \neg(A \supset B)) \supset A$	Modus Ponen (6,7)
9. A	Modus Ponen (3,8)
10. $((A \supset B) \supset A) \supset A$	T.D. (7)

[2] Otra formulación del principio de no contradicción y que no es equivalente a la mencionada en el artículo es que, dadas dos proposiciones A y $\backsim A$, una de las cuales es la negación de la otra, entonces una de ellas es falsa. Esta formulación no se aceptará ya que no es coherente con la definición de lógica paraconsistente dada en el artículo anterior, donde esta era inconsistente (es decir A y $\backsim$A y eran aceptados), pero no trivial.

[3] Da costa propone usar en portugués la expresión "bem comportada", o lo que en inglés es equivalente a "well-behaved"

[4] El símbolo (¬), denominado negación débil, difiere del símbolo (~) (denominado en este sistema negación fuerte), y es el conector lógico de la negación clásica.

[5] El papel de las quasi-matrices en la lógica paraconsistente es el mismo de las tablas de verdad en la lógica proposicional clásica. Se nombra así porque en ella se debe tener en cuenta que dada una determinada proposición que se supone verdadera, su negación tendrá dos valores de verdad. Para consultar mayor información acerca de la construcción de las quasi-matrices, el lector interesado lo puede hacer en Montes y Restrepo (2000).

Por ejemplo, para comprobar si las leyes de Morgan son esquemas válidos en este sistema, se tienen dos opciones: la primera verificar que la tabla de verdad o quasi-matriz de este esquema indica que es una tautología, es decir, que el valor de verdad al final de la tabla sea siempre 1. La segunda demostrar que se cumple por medio de una presentación como la realizada anteriormente para la ley de Pierce. En este documento abordaremos la primera opción dejando al lector interesado abordar la segunda.

Ley de Morgan: $(\sim A \vee \sim B) \supset \sim (A \wedge B)$

La cuasi matriz asociada será la siguiente

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$\sim A \vee \sim B$	$(A \wedge B)$	$\sim (A \wedge B)$	$(\sim A \vee \sim B) \supset \sim (A \wedge B)$
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
			1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
		1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
			1	1	1	0	0
						1	1
		1	0	1	1	0	0
						1	1
			1	1	1	0	0
						1	1

Con la información anterior se puede ver que algunas leyes de Morgan como esta no son válidas. Con la misma estrategia es posible demostrar que por ejemplo $\sim (A \wedge B) \supset (\sim A \vee \sim B)$ sí es tautología.

Jerarquía de Cálculos proposicionales C_n

Da Costa, al hacer público el trabajo sobre el tipo particular de cálculo proposicional C_1, establece algunas características de él, como por ejemplo que en este se mantienen válidos el *modus ponen,* la introducción y eliminación de la conjunción, la disyunción y eliminación de la doble negación. Además, si a los axiomas de este sistema se les agrega el principio de no contradicción, obtendremos el cálculo proposicional clásico.

Lo interesante de este asunto es que no solo existe un tipo particular de cálculo proposicional, en este caso C_1, que cumple con los aspectos antes mencionados, sino que existe un infinito número de cálculos que lo cumplen. Da Costa los presenta de una manera formal jerarquizándolos de acuerdo al grado de buen comportamiento de las proposiciones en cada uno de ellos. De acuerdo a esto último tenemos que hay un primer nivel de comportamiento, llamado A° o $A° = A^1$, luego un segundo nivel $(A°)°$, o sea A^2, etc.

Se halla una relación entre el cálculo proposicional C_n, en la medida en que las fórmulas “clásicas” se representan como A^n, es decir, que indica el nivel de contradicción que soporta dicho cálculo. Por esta razón el cálculo proposicional C_0, que para nuestro caso será el cálculo proposicional clásico, tiene un nivel cero de contradicción, es decir, no acepta contradicción alguna en su sistema.

Finalizando, Da Costa menciona que con esta presentación de un nuevo tipo de lógica, es posible abrir una vía diferente a la eliminación de las paradojas comentadas en la primera edición, que conmocionaron a los matemáticos de la época, obviando la necesidad de crear restricciones para lograr esta eliminación.

Referencias

Bobenrieth, A. (1995). *Inconsistencias ¿Por qué no?* Bogotá: Tercer mundo editores.
Gamrra, S. (2004). *Lógica Jurídica, Principio de razón suficiente*. Lima: Fondo Editorial de la UNMSM.
Montes, J., & Restrepo, C. (2000). *Lógicas Paraconsistentes: una introducción.* (Tesis de pregrado). Escuela de Ingenierías Universidad EAFIT, Medellín, Colombia.

Anexo

Quasi-matriz Esquema 1

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$A \supset B$	$B \wedge \sim B$	$A \wedge \sim A$	$\sim (B \wedge \sim B)$	$\sim (A \wedge \sim A)$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \supset \neg A$	$(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1
			1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
		1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
			1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
		1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
			1	1	1	1	0	0	0	0	1	1

Quasi-matriz Esquema 2

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$A \supset B$	$\sim (A \supset B)$	$(A \supset B) \wedge \sim (A \supset B)$	$\sim ((A \supset B) \wedge \sim (A \supset B))$	$\neg(A \supset B)$	$\neg(A \supset B) \supset A$
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
			1	1	0	0	1	0	1
					1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
		1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
			1	1	0	0	1	0	1
					1	1	0	0	1
		1	0	1	0	0	1	0	1
					1	1	0	0	1
			1	1	0	0	1	0	1
					1	1	0	0	1

Quasi-matriz Esquema 3

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$A \supset B$	$B \wedge \sim B$	$A \wedge \sim A$	B°	A°	$\neg B$	$\neg A$	$A \supset \neg B$	$(A \supset \neg B) \supset \neg A$	$(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
			1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
		1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
			1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
		1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
			1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1