

# Enseñanza de la simetría axial utilizando situaciones a-didácticas y SGD CaRMetal como medio

Flórez Santacruz, Jorge Enrique

profejorge67@yahoo.es

Grupo Edumat, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

## Resumen

Este taller propone implementar una secuencia de actividades, elaboradas por el grupo de investigación Edumat, para la enseñanza de la simetría axial, a partir de la mediación de un software de Geometría Dinámica (SGD). Esta propuesta se fundamentará en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y tomará como referente metodológico la ingeniería didáctica (ID), con el fin de poder describir las ventajas del uso del SGD; CarMetal como medio facilitador de un aprendizaje por adaptación y sus efectos cuando es integrado al diseño de una secuencia didáctica.

**Palabras clave:** Geometría Dinámica, situaciones a-didácticas, Ingeniería didáctica, Simetría axial.

## 1. Temáticas

La simetría constituye un elemento importante en el aprendizaje de la geometría, con ella se pueden resolver diversos problemas geométricos; ya que muchas figuras geométricas poseen las propiedades de esta transformación y también, efectuando movimientos simétricos en el plano es posible llegar a encontrar alternativas óptimas de solución de problemas. Por

lo anterior surge la pregunta: ¿Cómo mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la educación básica?

Es un hecho que los métodos o estrategias de enseñanza actualmente utilizados por los profesores no están produciendo los resultados esperados; por lo tanto, parte de la solución del problema debe consistir en modificar esas prácticas pedagógicas. Se deben utilizar nuevas estrategias didácticas que permitan en los estudiantes una verdadera construcción y asimilación del conocimiento geométrico. En particular en nuestro país se están liderando políticas educativas en cuanto a la promoción y uso de las tecnologías informáticas; tales como el software de geometría dinámica (SGD), sugiriéndolos como apoyo a las prácticas pedagógicas de profesores.

Surge entonces otro aspecto a considerar: ¿Cómo usar competentemente el SGD en el proceso de enseñanza para lograr un mejor aprendizaje de la geometría? La pretensión es transformar las prácticas de enseñanza de la geometría utilizando tecnologías informáticas. Pero no de manera ingenua o empírica, sino fundamentando este cambio desde una teoría de la didáctica de las matemáticas. En medio del debate, hay certeza de que ni las tecnologías son la panacea para la solución de los problemas de aprendizaje de los estudiantes, ni la educación puede seguir de espaldas a los cambios que ocurren a su alrededor.

Entonces surge un tercer interrogante: ¿Cómo sustentar teóricamente las prácticas de enseñanza que se desarrollan con SGD? El Proyecto Institucional tecnología y didáctica de la Geometría, propuesto por el grupo EDUMAT y desarrollado en distintos colegios de Santander y Bogotá, responde a estas tres preguntas proponiendo la Teoría de las Situaciones Didácticas como referente teórico para analizar las prácticas de enseñanza y la organización de estrategias para un mejor aprendizaje de la geometría, aprovechando el potencial del SGD.

## 2. Objetivos

- Aplicar un taller que comprende una secuencia de cuatro actividades de clase, alrededor del concepto de simetría axial.

- Guiar a los participantes a acercarse gradualmente a la construcción de los conceptos y a la identificación de las propiedades de la simetría axial.
- Conducir a los estudiantes a identificar los fenómenos visuales relacionados con las propiedades de la simetría axial, que les permitirán identificar luego en una construcción si dos figuras son simétricas y a predecir la posición del eje de simetría.
- Precisar de manera clara, cómo la Teoría de las Situaciones Didácticas nos proporciona un modelo de aprendizaje en el que el software de geometría dinámica CarMetal, puede considerarse como un medio adecuado para que se produzca efectivamente un aprendizaje por adaptación en los participantes.

## 3. Referentes teóricos

### 3.1 La Teoría de Situaciones Didácticas

#### Aprendizaje por adaptación

Para el desarrollo didáctico de este taller me sustento en la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (1998), quien según Acosta (2010); construye su teoría alrededor del concepto de aprendizaje por adaptación. Este aprendizaje es producto de la interacción del sujeto con un medio, sin la mediación de un profesor. Según este enfoque, en el aprendizaje por adaptación se considera esencialmente la interacción de un sujeto con un medio (que en muchos casos es material).

1. El sujeto parte de una intención, de una meta que desea alcanzar.
2. para lo cual realiza una acción sobre el medio.
3. El medio reacciona a esa acción (lo cual recibe el nombre de retroacción).
4. El sujeto interpreta la retroacción del medio usando sus conocimientos previos.

5. El sujeto valida su acción de acuerdo con la interpretación que hace de las retroacciones del medio. Esta validación puede tomar dos valores. Cuando la acción realizada le permite alcanzar su intención la validación es positiva, en cuyo caso refuerza esta acción, es decir la repetirá con mayor frecuencia cuando quiera alcanzar esa intención. Cuando la acción realizada no le permite alcanzar su intención la validación es negativa, y produce una modificación de la acción, iniciando un nuevo ciclo acción-retroacción-validación.

El producto de la validación es lo que se considera como señal de aprendizaje: el refuerzo o la modificación de una conducta observable.

### 3.2 Situación didáctica y situación a-didáctica

Ahora, ¿cómo considera la TSD la relación entre el aprendizaje por adaptación y la enseñanza escolar? La TSD denomina situación a-didáctica a una actividad que produce un aprendizaje por adaptación, y la incluye dentro de una situación didáctica, que es una situación de clase. La TSD caracteriza la situación didáctica como una situación en la que intervienen tres elementos: un saber (a enseñar), un profesor (que desea enseñar ese saber) y un/unos estudiantes (que desean aprender ese saber).

Entonces el profesor debe presentar a los estudiantes una situación a-didáctica, que fomente el aprendizaje por adaptación, y que produce unos conocimientos. Para hacerlo, debe preparar cuidadosamente un problema que planteará a sus estudiantes (produciendo la intención necesaria para el aprendizaje por adaptación) y un medio con el cual los estudiantes podrán interactuar para realizar el aprendizaje por adaptación. Es decir, un medio en el cual puedan realizar acciones, que produzca unas retroacciones adecuadas (que puedan ser interpretadas por los estudiantes para validar sus acciones). Una vez que los estudiantes han adquirido un conocimiento producto de la situación a-didáctica, el profesor ‘institucionaliza el saber’, es decir explicita las relaciones entre el conocimiento personal de los estudiantes, contextualizado dentro de la situación a-didáctica, y el saber ‘oficial’.

### 3.3 El Software de Geometría Dinámica como medio

Según el modelo expuesto, uno de los elementos fundamentales del aprendizaje por adaptación, y por lo tanto de las situaciones a-didácticas es el medio. El medio es aquello con lo que interactúa el alumno, sobre el cual puede realizar acciones y recibir retroacciones que le permitan la validación. Ese medio debe ser seleccionado o diseñado de manera cuidadosa para que los conocimientos producto del aprendizaje por adaptación sean lo más parecidos posible al saber que se quiere enseñar. Considero el software de geometría dinámica CaRMetal como un medio adecuado para el aprendizaje por adaptación de la geometría, pues su programación garantiza que todos los fenómenos asociados con la construcción y la manipulación de figuras geométricas correspondan a la teoría de la geometría euclidiana.

### 3.4 Ingeniería Didáctica

Para alcanzar los objetivos propuestos voy a utilizar la metodología de investigación “ingeniería didáctica”, que se caracteriza por la confrontación de un análisis a priori y un análisis a posteriori, la cual además se centra en modelar las situaciones de enseñanza, para así permitir una elaboración y gestión controlada del aprendizaje. Se tendrán en cuenta las cuatro fases que propone la Ingeniería Didáctica a saber:

- Análisis preliminar.
- Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas.
- Experimentación y recolección de datos
- Análisis a posteriori.
- Resultados / productos esperados

Este taller contribuirá a orientar la transformación de las prácticas de enseñanza de la geometría por medio del uso de del (SGD) Car metal. Otro fin es proporcionar un juicio sobre las ventajas del uso de Car metal, como medio didáctico facilitador de un aprendizaje por adaptación y dar respuesta a la pregunta: ¿las actividades planeadas cumplen a cabalidad con los objetivos trazados?

## 4. Propuesta de actividades

La secuencia didáctica se compone de cuatro actividades que se trabajan en parejas, en un tiempo aproximado de tres horas cada una. Estas actividades se caracterizan por ser situaciones de acción que involucran en cada tarea espacios donde los estudiantes (participantes), explicitan sus estrategias de solución (situación de formulación).

Al inicio de cada situación entregaré a los estudiantes la respectiva hoja de trabajo; Finalizada cada sesión se recoge la hoja de trabajo, la cual se retorna en la siguiente sesión cuando el tiempo no alcance para que la mayoría de los estudiantes finalicen.

Las tareas que se proponen en las situaciones que involucran CarMetal son de tipo caja negra, puesto que el estudiante explora las figuras presentadas en cada situación y encuentra el comportamiento común de estas figuras cuando son arrastradas, permitiéndole el acercamiento a las propiedades de la simetría axial. En el análisis a priori, se tienen en cuenta únicamente las características del medio y las posibles reacciones de los sujetos ante la situación. En el análisis a posteriori se presentaran las acciones realmente efectuadas por los estudiantes luego de implementadas las actividades.

## 5. Análisis a priori actividades simetría axial

Presentaremos una secuencia de algunos ejemplos de las cuatro actividades de clase, alrededor del concepto de simetría axial. Cada actividad está compuesta de series, y en cada una de las series se les pedirá a los estudiantes (participantes), que realicen tareas específicas. Para cada serie hay un archivo con una figura, hecha en CarMetal, sobre la que los estudiantes trabajarán para desarrollar las tareas (Los estudiantes no necesariamente deben saber manejar el programa).

La secuencia está planteada para que los estudiantes (participantes), se familiaricen con algunos fenómenos que caracterizan la simetría axial, de modo que esto les permita predecir o anticipar las posiciones de los objetos simétricos, dados ciertos elementos de la simetría. Para que identifiquen el eje, lo ubiquen de manera perceptiva y posteriormente sean capaces de

construirlo, además que puedan construir alguno de los componentes de la simetría dados los otros; por ejemplo, dado un triángulo y el eje de simetría, construir el simétrico.

Además, en cada actividad, las series tienen una secuencia que se detallará a medida que avancemos en el documento. Para ello analizaremos una de las actividades, haciendo una descripción, especificando los objetivos, precisando las tareas y lo que esperamos que los estudiantes hagan.

## 5.1 Actividad 1

### Saber en juego

Una simetría axial es una transformación geométrica, es decir una correspondencia entre parejas de puntos del plano. Decimos que dos puntos del plano  $A$  y  $A'$  son simétricos con respecto a una recta  $e$  (llamada eje de simetría) si y sólo si  $e$  es mediatriz del segmento  $AA'$ . Esta condición implica que el segmento  $AA'$  debe ser perpendicular a  $e$  y que  $e$  debe pasar por el punto medio de  $AA'$ . También se deduce que  $A$  y  $A'$  deben quedar en semiplanos opuestos con respecto a  $e$ . Por lo tanto, si dos figuras (por ejemplo polígonos) son simétricas con respecto a  $e$ , deben tener orientaciones contrarias con respecto a  $e$ , ya que la distancia de cada punto a  $e$  debe ser igual a la distancia de su homólogo a  $e$ . Una simetría axial es una isometría, puesto que conserva la forma y el tamaño de las figuras; es decir, si dos figuras son simétricas con respecto a un eje, entonces son congruentes.

### Objetivo

La finalidad de esta actividad es que los estudiantes se familiaricen con algunos fenómenos visuales concernientes al movimiento de figuras simétricas, tales como la dependencia de una con respecto a la otra, los movimientos contrarios con respecto al eje (Los estudiantes podrían asimilarlo como un espejo imaginario). Esto implica que logren identificar el eje de simetría y predecir su ubicación.

### *Descripción del medio*

Para esta actividad, se trabaja con 12 figuras, en cada una de las cuales hay 6 triángulos con los vértices ocultos, tres rojos y tres verdes, simétricos con respecto a un eje que permanece oculto. Los tres triángulos rojos tienen diferentes formas, cada triángulo verde es congruente con un triángulo rojo. En las figuras numeradas 1-1 a 1-6, aparece también un círculo; en las figuras numeradas 1-1a a 1-6a aparecen tres círculos cada uno con un punto sobre él. La diferencia entre las seis series es la orientación (inclinación) del eje. Las 12 figuras se presentan a continuación.

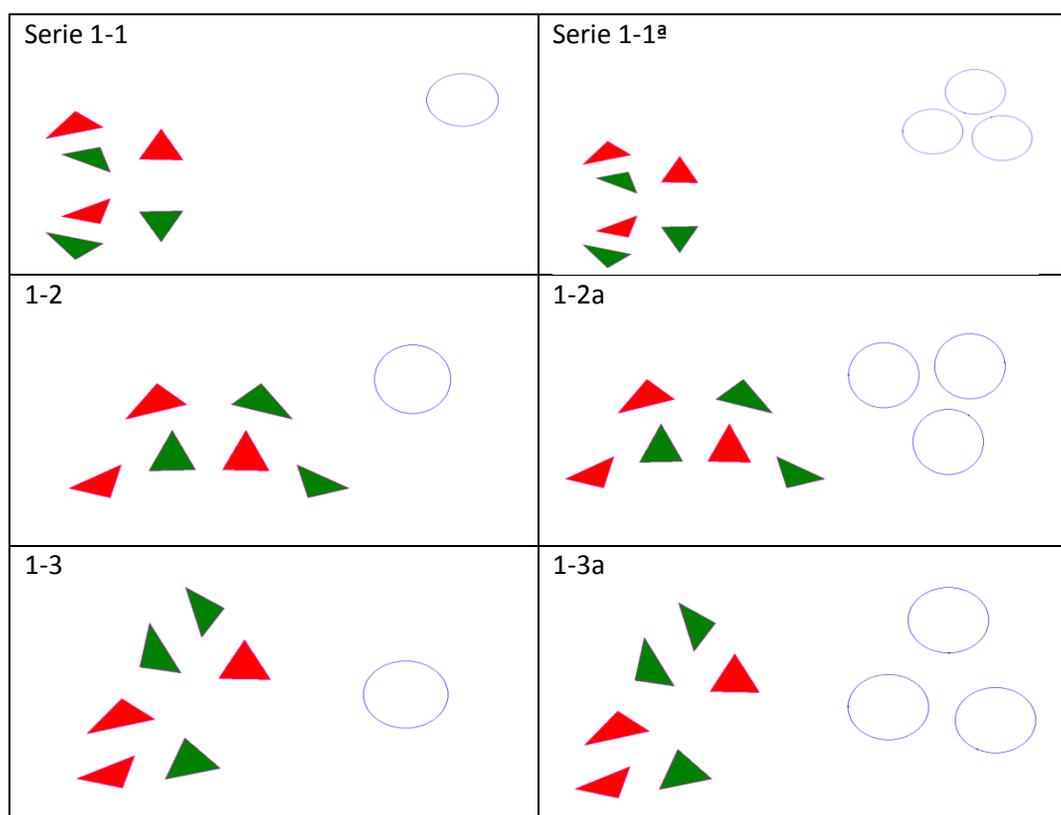


Figura 1. Tareas a realizar. Fuente: Edumat

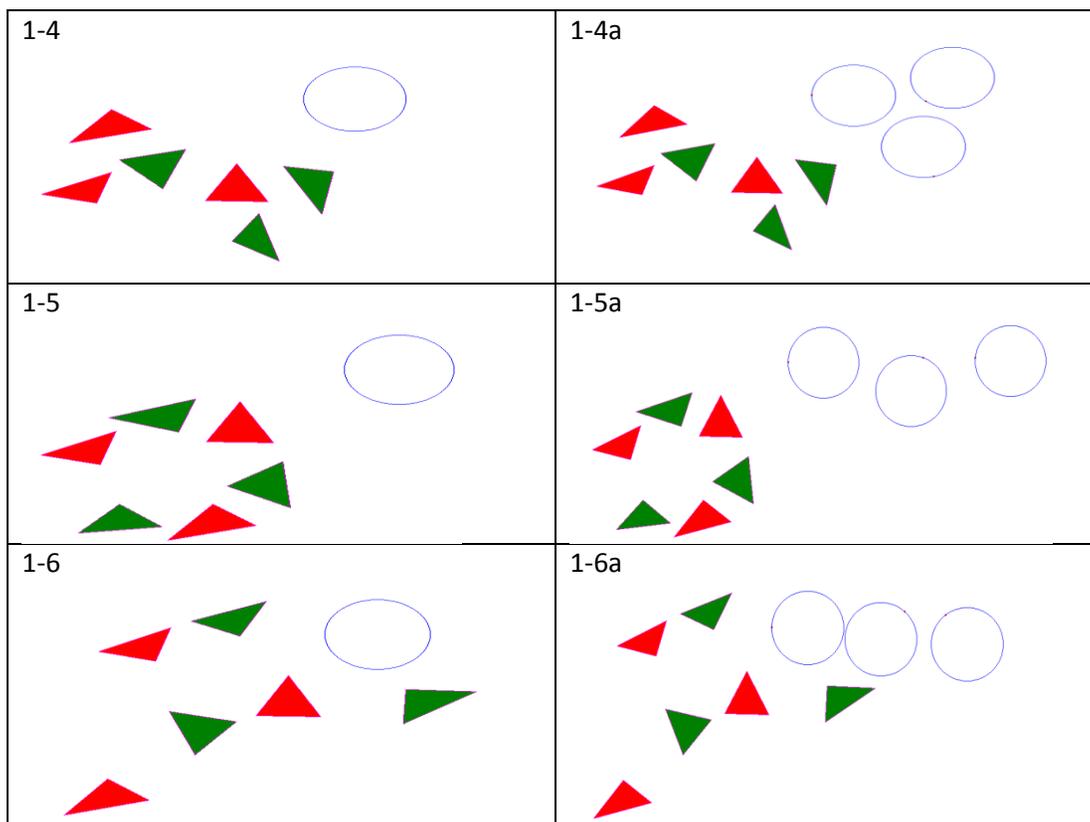


Figura 2. Tareas a realizar. Fuente: Edumat.

De acuerdo con las características del software, los triángulos verdes no se pueden arrastrar directamente, dada la dependencia de éstos con respecto a los rojos, lo cual no es una propiedad específica de la simetría, sino una particularidad del programa; pero los triángulos rojos sí se pueden arrastrar agarrándolos por un lado o un vértice, permitiendo llevarlos libremente a cualquier lugar de la pantalla sin que cambien su forma y tamaño, para ello basta hacer clic sostenido sobre el triángulo y arrastrar. Adicionalmente, al arrastrar los triángulos rojos, los verdes se mueven de manera que conservan la simetría. Del mismo modo, los círculos de las series 1-1 a 1-6 no se pueden arrastrar, mientras que los de las series 1-1a a 1-6a se pueden mover libremente agarrándolos por el punto que aparece sobre ellos. Para alcanzar los objetivos propuestos, y para que los estudiantes identifiquen esos fenómenos visuales y se familiaricen con ellos, se les pedirá que realicen cuatro tareas.

**Primera y segunda tareas:** esperamos que tomen conciencia de que en distintas series los movimientos de un triángulo y su pareja tienen diferentes orientaciones. Es decir, que en la primera serie al arrastrar un triángulo rojo hacia arriba su pareja se mueve hacia abajo y viceversa, pero al arrastrarlo en dirección horizontal la distancia entre ellos no varía; mientras que en la segunda serie al arrastrar un triángulo rojo hacia la derecha su pareja se mueve hacia la izquierda y viceversa, pero al arrastrarlo en dirección vertical la distancia entre ellos no varía.

**Tercera tarea:** esperamos que al avanzar de una serie a otra demoren menos tiempo intentando meter todos los triángulos en el círculo antes de argumentar que no es posible resolver la tarea, incluso no sería extraño que al pasar de la segunda a la tercera serie o de la tercera a la cuarta argumenten que no es posible resolver la tarea antes de intentar arrastrar los triángulos.

**Cuarta tarea:** esperamos que los estudiantes tomen conciencia de que para diferentes series los círculos quedan ubicados en distintas direcciones (horizontal, vertical...). Sería importante que el profesor solicite a los estudiantes dibujar en su cuaderno la posición en que quedaron los círculos en cada serie al terminar la tarea.

### ***Puesta en común***

Es de esperarse que haya grupos de trabajo más adelantados que otros, entonces el profesor puede disponer una puesta en común una vez finalizadas las cuatro tareas con las seis series, con el fin de constatar que los estudiantes manifiestan los fenómenos visuales que se pretendía que descubrieran y que de alguna manera se hayan familiarizado con ellos. El profesor pedirá a algunos estudiantes que pasen al frente del grupo para que expliquen a los demás cómo desarrollaron las tareas. Es importante que el profesor identifique cuáles grupos terminaron y cuáles no, con el propósito de pasar primero a los grupos más rezagados. También es conveniente que en su mayoría los grupos expongan su trabajo. Es importante que los estudiantes hablen (con sus propias palabras) de la dependencia de los triángulos verdes con respecto a los rojos, de los movimientos contrarios, de que los triángulos se juntan a lo largo de una línea recta.

### ***Concurso (para finalizar la primera actividad)***

En esta instancia se supone que ya los estudiantes están familiarizados con los fenómenos visuales que hemos mencionado anteriormente, pero para ello solo han utilizado estrategias meramente perceptivas. El propósito de este concurso es bloquear esas estrategias, y llevar a los estudiantes a que utilicen los conocimientos que han adquirido para anticipar la posición del eje de simetría.

Para este concurso se organizan equipos competidores dentro del salón de clase (entre 6 y 8 estudiantes por equipo), el profesor explica que deberán solucionar la cuarta tarea: colocar los círculos donde puedan meterse todos los triángulos dentro de ellos, pero no podrán mover los triángulos antes de colocar los círculos. Para garantizar que los estudiantes se comuniquen y se pongan de acuerdo en una estrategia, el profesor explica que él seleccionará un representante de cada equipo para realizar la tarea.

El representante escogido por el profesor deberá ubicar los tres círculos *sin mover los triángulos* y luego otro estudiante, o en su defecto el profesor, moverá los triángulos para comprobar si es posible meter todos los triángulos dentro de cada círculo. Del mismo modo lo harán los representantes de los otros equipos. En caso de que uno de los representantes no logre resolver la tarea puede repetirse el concurso, y finalmente organizar una puesta en común para que los grupos expongan sus estrategias. Para resolver la tarea, los estudiantes deben identificar cuál es la pareja de cada triángulo (sin moverlos), y además identificar los puntos donde se unen, que deben estar sobre el eje de simetría.

Para el análisis a priori de este concurso tendremos en cuenta que se llevará a cabo en dos etapas; la primera consiste en ubicar los círculos, acción llevada a cabo por parte del representante del grupo escogido por el profesor. La segunda consiste en validar la acción intentando meter las parejas de triángulos en los círculos.

Los estudiantes siempre tienen la posibilidad de invalidar las estrategias perdedoras gracias a las retroacciones del medio, y de darse cuenta que la estrategia ganadora consiste en identificar las parejas de triángulos simétricos para anticipar la posición del eje de simetría y ubicar los círculos sobre este eje, ya que de la tarea tres, ellos han descubierto que un objeto y

su simétrico se superponen sobre el eje de simetría. Como consecuencia del concurso, es ineludible que los estudiantes intenten anticipar la posición del eje de simetría, siendo esta la única estrategia ganadora, porque las demás no permiten concluir la tarea. Además, si no todos han descubierto la estrategia, la puesta en común permite confrontar esta situación, ya que los distintos grupos expondrán la manera como planearon desarrollar la tarea.

En conclusión, como producto del desarrollo de las cuatro tareas de esta primera actividad, los estudiantes lograrán identificar la dependencia de los triángulos verdes y los rojos; los movimientos contrarios con respecto a una recta que pasa por la mitad de un triángulo rojo y su pareja; las orientaciones contrarias de los triángulos con respecto a tal recta; además precisar su ubicación; por último, del concurso lograrán anticipar la posición del eje de simetría sin mover los triángulos. Correspondiendo estos hechos al objetivo de la actividad.

Es importante que el profesor institucionalice estas conclusiones utilizando las palabras de los propios estudiantes, y haga tomar nota de las mismas en el cuaderno.

## Referencias bibliográficas básicas

- Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, P. (Eds.), Colombia.
- Brousseau, Guy. (2007). *Inicialización al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas*. 1ª.ed. Buenos Aires: Editorial Libros del Zorzal.
- Acosta, G. Martín. (2010) Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio, En: *Colombia, Revista Integración*, ed: Ediciones Universidad Industrial De Santander, ISSN 0120-419X, v. 28, fasc. 2, 173-189.
- Acosta, G. Martín. (2003) Nuevas posibilidades de razonamiento geométrico en un ambiente de geometría dinámica”, en Colombia, *Evento: Congreso internacional de tecnologías computacionales en el currículo de matemática*. Ed. Ministerio de Educación Nacional.