Cálculo mental y estimación: Métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza

Resumen

El Cálculo Mental y la Estimación han sido descuidados en la enseñanza de las matemáticas. El propósito de este artículo es el de presentar algunas ideas que han surgido de la investigación de estos temas, y que pueden ser de provecho para ejecutarlas en el salón de clase.
Se exponen también los resultados de un estudio de cálculo mental con niños mexicanos, los cuales indican que los niños necesitan de una instrucción activa de estos temas que refleje algunas de las estrategias fundamentales como son la descomposición y el redondeo, y la de pasos repetidos, descritas en el artículo.

1. Significado de cálculo mental, estimación y aproximación

Se entiende por **cálculo mental** una serie de procedimientos mentales que realiza una persona sin la ayuda de papel y lápiz, y que le permite obtener la respuesta *exacta* de problemas aritméticos sencillos. Los datos originales del problema se descomponen o se sustituyen por "otros" con los cuales el sujeto trabaja más cómodamente para obtener la respuesta. Los procesos cognitivos involucrados en el cálculo mental son sustancialmente diferentes, en cuanto a la forma de visualizar el problema y construir la respuesta, con respecto al algoritmo de lápiz y papel. Por ejemplo, la Figura 1 muestra cuatro formas de realizar la operación 57 + 36.

Por su parte, el **cálculo estimativo** no busca dar respuestas exactas a un problema, sino que su propósito es dar una respuesta cercana al resultado correcto de un problema. Es un tipo de cálculo apropiado en muchas situaciones de la vida cotidiana. Por ejemplo: Esto se ilustra en la Figura 2.

Simón Mochón y Josueth Vázquez Román
Departamento de Matemática Educativa Centro de Investigación y de Estudios Avanzados CINVESTAV, México, D.F.

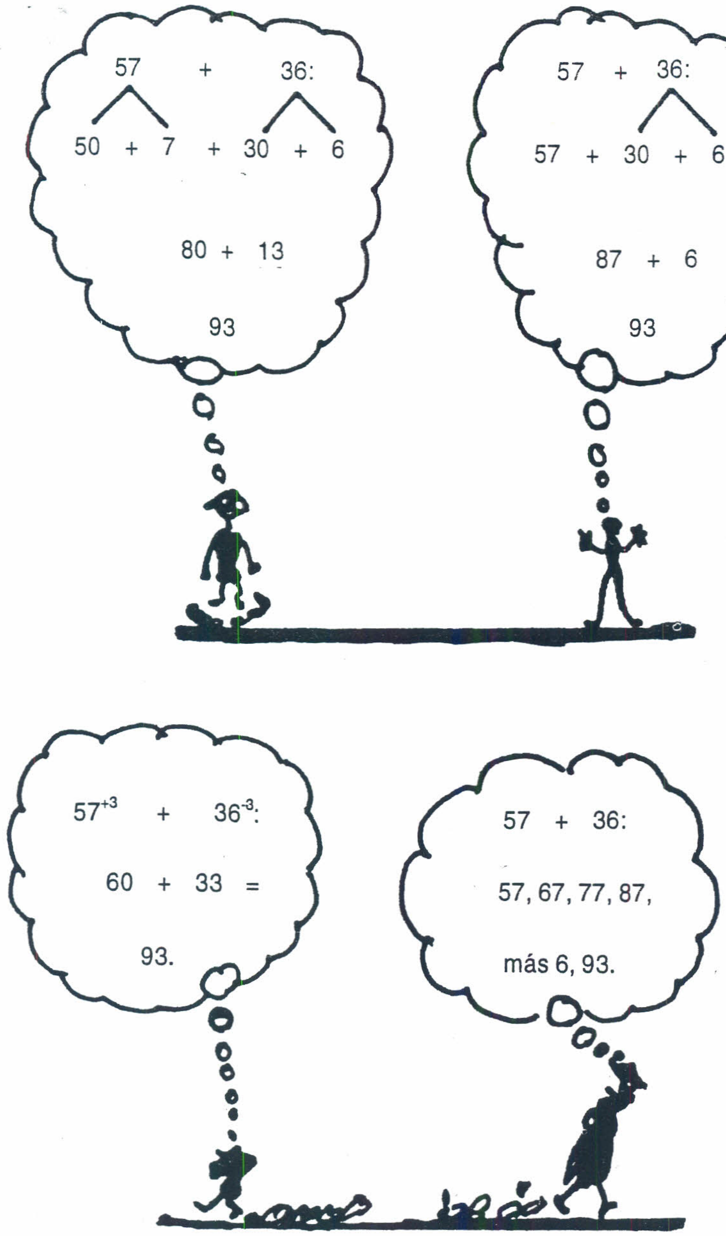

Figura 1

Por **cálculo aproximado** se entiende el proceso de obtener un resultado con cierta precisión especificada de antemano. Por ejemplo: $4 \div 17 = 0.235$, que es una respuesta con tres cifras significativas.

2. Aritmética digital y cálculo de expertos

En las culturas primitivas, uno de los primeros instrumentos de cálculo lo constituyeron los dedos. A esta forma de calcular se le conoce como "Aritmética Digital". Este procedimiento se realizaba mentalmente y se extendió en el tiempo, incluso, hasta la Edad Media y el Renacimiento, donde fueron muy pocas las personas que llegaron a

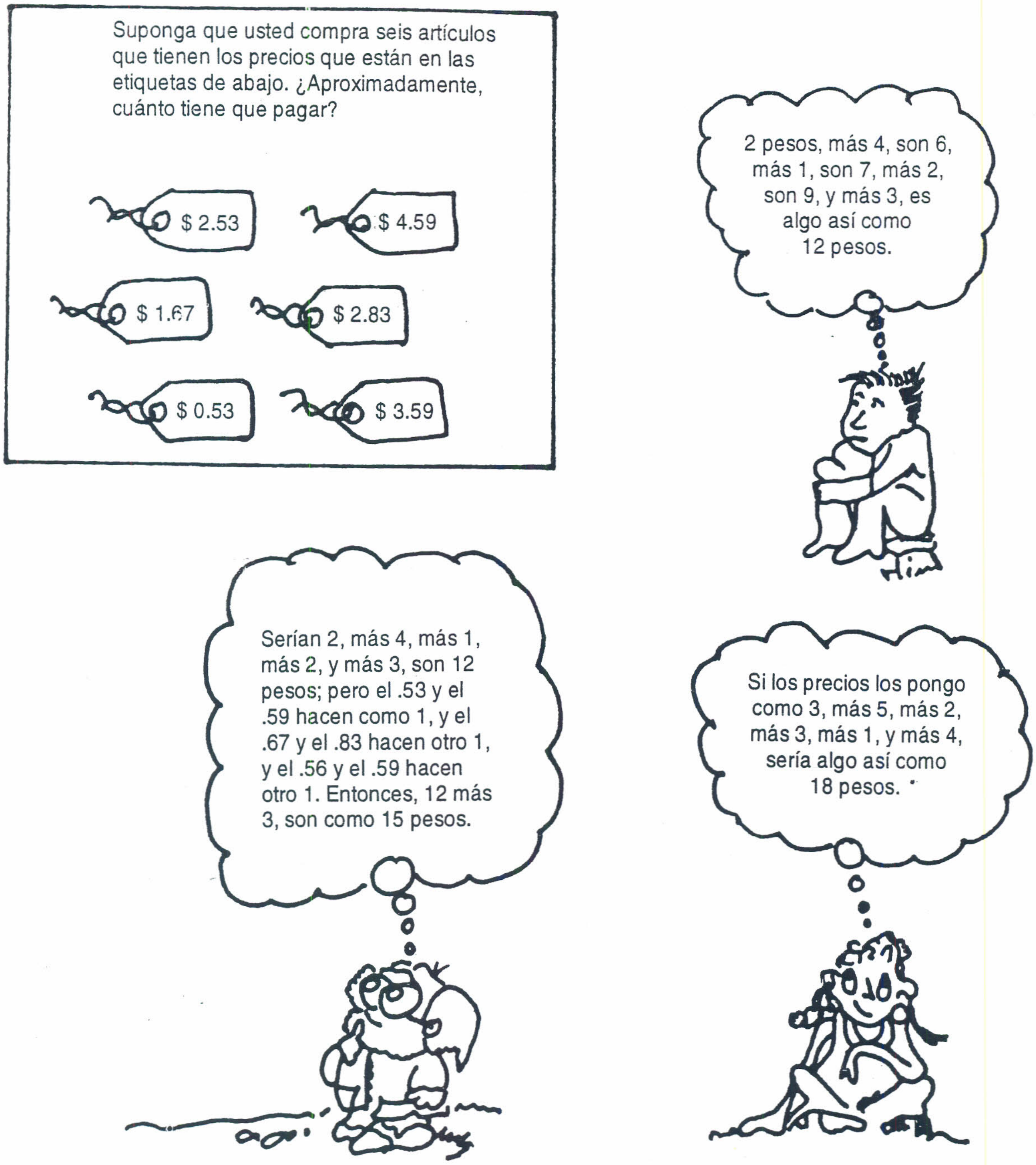

Figura 2

conocer las tablas de multiplicar más allá de 5 × 5, o que hayan tenido acceso a un ábaco [Gardner, M. (1984)].

Se conoce una diversidad de procedimientos de Aritmética Digital, todos aplicables a tipos específicos de operaciones. Por ejemplo, para multiplicaciones como 17 × 19; en las que las decenas son iguales y las unidades pertenecen a una misma semidecena; el procedimiento es el siguiente:

- Se asigna a los dedos la semidecena correspondiente y se unen los que representan los factores (Fig. 3).

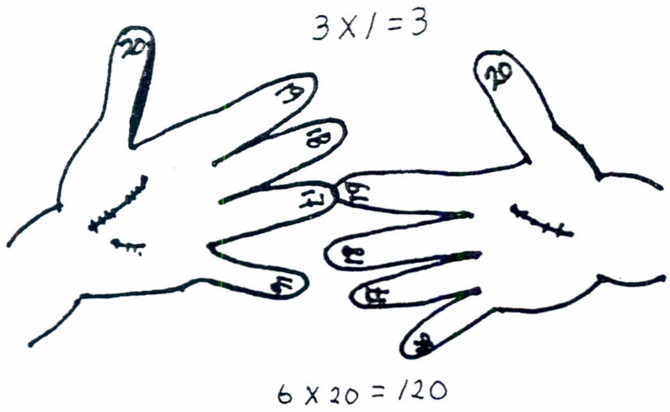

Figura 3

- La cantidad de dedos que quedan abajo incluyendo los que quedan unidos, se multiplican por 20, que es el valor que les corresponde de acuerdo con la Tabla I.

Semidecena	Valor de los dedos inferiores	Constante aditiva
1 – 5	0	0
6 – 10	10	0
11 – 15	10	100
16 – 20	20	200
21 – 25	20	400
26 – 30	30	600
31 – 35	30	900
36 – 40	40	1200
41 – 45	40	1600
46 – 50	50	2000

Tabla I

Así obtenemos el primer resultado parcial en nuestro ejemplo: $6 \times 20 = 120$.

- En las semidecenas que van de 6 - 10, 16 - 20, 26 - 30, ..., los dedos que quedan hacia arriba de los que se unen, se multiplican entre sí: $3 \times 1 = 3$, y así obtenemos el segundo resultado parcial en nuestro ejemplo. (Para las semidecenas que van de 1 - 5, 11 - 15, 21 - 25, ..., se multiplican entre sí los dedos que quedan hacia abajo de los dedos que se unen.)
- Se agrega por último, la constante aditiva para la multiplicación que, según la Tabla I, es 200. Así:

$$17 \times 19 = 120 + 3 + 200 = 323$$

Han existido personas con habilidades extraordinarias, capaces de realizar mentalmente cálculos aritméticos exactos y ultrarrápidos. La técnica básica usada por estos calculistas mentales es la de descomponer los números y operar con sus partes.

Como ejemplo del tipo de cálculos numéricos mentales hechos por calculadoras expertas, mencionaremos el caso de Dase, un prodigioso calculista mental alemán que vivió en el siglo XIX, que calculó el producto correcto de la multiplicación 79 532 853 × 93 758 479 en tan sólo 54 segundos. Este mismo alemán encontró el producto correcto de dos números de 20 dígitos en solamente 6 minutos; y también obtuvo el producto de dos números de 40 dígitos cada uno, en 40 minutos. Asimismo, calculó la raíz cuadrada de un número de 100 dígitos en 52 minutos. (Ball; 1956, citado en Hope, J.; 1985).

Del análisis de los métodos o "trucos" conocidos en aritméticas antiguas y las generalizaciones usadas por calculistas prodigiosos se han derivado una gran cantidad de procedimientos (conjuntos de reglas) para hacer cálculos mentales que se popularizaron por la actividad editorial, presentándolos en su momento como métodos "modernos" o "revolucionarios" para resolver problemas matemáticos. Algunos de estos procedimientos son conocidos como el *Sistema Trachtenberg de Matemáticas Básicas*, y *Multiplicaciones Ultrarrápidas*. (Cutler, A., y McShane, R.; 1960). A fin de ilustrarlos, la regla sugerida para resolver la operación 32 × 43 es:

1. Las unidades se multiplican entre sí, y las que se lleven se añaden al producto.
2. Unidades por decenas y decenas por unidades. Las que se lleven se suman al producto.
3. Decenas por decenas. Luego, se anota todo el número:

$$32 \times 43 = 1376$$

Al respecto, existe un método singular para efectuar una multiplicación con factores de dos dígitos, cuyas decenas deben ser iguales y las unidades de ambos factores deben sumar 10. Por ejemplo, 86 × 84, primero, se multiplica la decena de los factores por el número que sigue en forma ascendente, en este caso el 9. Así 8 × 9 da 72, que constituye las dos primeras cifras de la izquierda del resultado; después se multiplican entre sí las unidades, 6 × 4 = 24, lo que constituye las dos cifras de la derecha de la respuesta, que es 7224.

$86 \times 84 = 7\,224$ ... "8 × 9, 72, y, 6 × 4, 24. La respuesta es 7224".

Este método permite calcular con la misma facilidad cuadrados de dos o más dígitos que terminen en 5:

$125^2 = 15\,625$ "12 por 13, son 156; 5 × 5, son 25. Entonces, son 15625"

Una vez que se hayan memorizado los pasos a seguir, este método se puede combinar para obtener el producto de multiplicaciones como 53 × 58. Primero, encontramos el producto de 53 × 57, donde se tienen decenas iguales y las unidades suman 10, que es 3021; luego, a este resultado parcial hay que sumarle 53. Así, 3021 + 53 = 3074.

Otro procedimiento ingenioso permite efectuar multiplicaciones aceleradas usando "Complementos". Este método se aplica en aquellos casos en que los factores son próximos a 100 (o a 1000). Por ejemplo, para 96 × 92 = 8832, el procedimiento sería: "El complemento de 96 a 100, es 4; y el de 92 a 100, es 8. A cualquier factor le puedo quitar el complemento del otro, y en ambos casos me da 88 (las dos primeras cifras de la izquierda de la respuesta); luego multiplico complementos: 8 por 4, son 32, que son las dos cifras de la derecha de la respuesta".

Este tipo de ejercicios condujeron a la idea de que el cálculo mental era una serie de reglas que debían memorizarse y ser aplicadas en la resolución de un problema aritmético. Al respecto, existe una larga lista de caminos "abreviados" (atajos) para resolver operaciones. Esta imagen del cálculo mental fácilmente puede hacer creer que siempre hay soluciones mágicas para obtener la solución de problemas de aritmética. En realidad, el cálculo mental que interesa en educación es otro y con otra finalidad.

Actualmente, la idea sobre el cálculo mental ha cambiado, dejando de ser concebido como la simple memorización y aplicación de un conjunto de reglas para resolver un problema matemático. Se le ha asociado con cálculos numéricos mentales sencillos, más naturales, que el individuo realiza según su experiencia, conocimiento de los números, y la naturaleza del problema matemático a resolver.

3. Características y métodos del cálculo mental

Para entender mejor la naturaleza del cálculo mental contrastaremos en seguida algunas de las características de este tipo de cálculo con las del algoritmo de lápiz y papel. (Plunkett; 1979).

El *algoritmo de lápiz y papel* trabaja separadamente con los dígitos de los números; en cambio el cálculo mental es **holístico**, ya que la persona mantiene la identidad de los números completos. El algoritmo para una operación es fijo y todas las personas lo aplican igual. El cálculo mental es **variable**; es decir, un mismo problema puede ser resuelto de muchas formas. Por ejemplo, para 539 - 189, algunas formas de resolución serían:

- De 189 para 200, son 11; de 200 para 500, son 300: Luego, 300 + 39 + 11 = 350.
- 539 menos 100, son 439; menos 80, son 359; menos 9, son 350.
- Si le quito 39 a 539, da 500; y si le quito 39 a 189, resulta 150. Así, 500 menos 150, son 350.
- Si a 539 le quito 200, son 339; pero, a 339 le sumo los 11 que quité de más, y me da como resultado 350.

Los algoritmos son generales y se aplican igual a una operación sin importar los números. En cambio, el cálculo mental es **flexible**, ya que un mismo individuo puede usar diferentes estrategias para resolver diferentes problemas matemáticos. Por ejemplo:

- Para 83 - 29: "Si al 29 le agrego 1, son 30; luego, 83 - 30, son 53; pero a 53 le sumo 1, para *compensar* el 1 de más que quité antes. La respuesta es 54".
- Para 83 - 54: *"De* 54 *a* 60, son 6; *de* 60 *a* 80, son 20; y *de* 80 *a* 83, son 3. Así, 20 más 6 más 3, da 29".
- Para 83 - 7: 83 *menos* 3, son 80; 80 *menos* 4, son 76".

El cálculo mental también es **constructivo**, ya que como se puede notar en los ejemplos dados el resultado final se construye mediante resultados parciales, de acuerdo con la estrategia elegida. Con frecuencia, desde el principio de la construcción de la respuesta, el cálculo mental da una clara aproximación del resultado, por lo que las cifras más significativas de la izquierda son calculadas primero:

- 132 + 47: "132 más 40, son 172, más 7, obtengo 179".
- 234 × 4: "200 × 4, da 800; 30 por 4, son 120, más 800 de antes, son 920; y 4 × 4, son 16. En total, resulta 936".

Pese a la utilidad del cálculo mental para resolver problemas matemáticos en la vida real y en la educación escolarizada media y superior, no ha sido utilizado propiamente como un recurso en la enseñanza de la matemática, donde principalmente se recurre a los algoritmos de lápiz y papel.

Plunkett (1979) ha descrito un "espectro" de operaciones aritméticas graduadas en dificultad y separadas en cinco "bandas", que pueden ser tomadas en cuenta para diseñar situaciones de aprendizaje en la enseñanza del cálculo mental.

ROJA	NARANJA	AMARILLA	VERDE	AZUL
5 + 9	135 + 100	139 + 28	592 + 276	3964 + 7123
13 – 8	85 – 20	83 – 26	592 – 276	5960 – 4981
4 × 7	5 × 30	17 × 3	931 × 8	931 × 768
35 ÷ 5	90 ÷ 3	72 ÷ 4	693 ÷ 7	8391 ÷ 57

- En la **banda roja**, las operaciones se resuelven de memoria (llamados hechos básicos).
- En la **banda naranja**, las operaciones de la primera banda están complicadas con ceros.
- En la **banda amarilla** hay operaciones como las que aparecen en situaciones sencillas dentro de un contexto real. Es aquí donde las estrategias de cálculo mental son las más idóneas.
- En la **banda verde**, las operaciones se pueden resolver con cálculo mental, pero se requiere de entrenamiento (sugerimos no llegar a este nivel de cálculo mental en el salón de clase).
- En la **banda azul**, al igual que en la banda verde, tiene más sentido obtener las respuestas con el algoritmo de lápiz y papel o con la ayuda de una calculadora.

Mialaret, G. (1986) ha diseñado ejercicios que ayudan al cálculo mental, ya que en ellos se analizan los números de varias formas, descomponiéndolos y formando patrones:

Descomposición:

$10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3$

$26 = 20 + 6 = 25 + 1$

$88 = 90 - 2 = 100 - 12$

Formación de patrones:

3 + 4	13 + 4	23 + 4
6 × 5	6 × 50	6 × 500
60 ÷ 5	600 ÷ 50	6000 ÷ 500

Dichos ejercicios ayudan a desarrollar el sentido numérico en los estudiantes, a conocer el sistema decimal y a adquirir seguridad en los cálculos; con lo que se disminuyen los errores en las operaciones matemáticas.

Basados en los trabajos de expertos realizados principalmente en la obtención de productos, algunos de los métodos que se han clasificado para el cálculo mental multiplicativo son[1] (Gómez, B.; 1988):

1. Distribución

a) **Distributividad aditiva:** Los factores se descomponen y se opera con sus partes:

$$25 \times 48 = 20 \times 40 + 20 \times 8 + 40 \times 5 + 5 \times 8 = 800 + 160 + 200 + 40 = 1200$$

b) **Distributividad substractiva:** Uno de los factores se redondea hacia arriba y se compensa:

$$25 \times 4\,8 = (25 \times 50) - (25 \times 2) = 1250 - 50 = 1200$$

c) **Cuadrática:** Se aplica una diferencia de cuadrados: $49 \times 51 = 50^2 - 1^2 = 2499$
Este método sirve para calcular cuadrados de números basados en la igualdad:

$$a^2 = (a + b)\,(a - b) + b^2 \quad (43)^2 = 46 \times 40 + 3^2 = 1840 + 9 = 1849$$

2. **Factorización**

a) **Factorización:** Estrategia general que consiste en descomponer los números en factores:

$$25 \times 48 = (5 \times 5)\,(6 \times 8) = (5 \times 8)\,(5 \times 6) = 4\,0 \times 30 = 1200$$

b) **Doble y mitad:** A una de las partes se le va sacando mitad, y la otra se va duplicando, hasta encontrar el resultado definitivo (sin necesidad de usar las tablas):

$$16 \times 17 = 8 \times 34 = 4 \times 68 = 2 \times 136 = 272.$$

c) Basados en la factorización, se pueden proponer métodos sintéticos para realizar multiplicaciones por los factores de 10, 100, 1000, etc., tales como 5, 25, 50 y 125. Por ejemplo:

- 629×5: Multiplico 629 por 10, son 6290; ahora la mitad de 6290 es 3145.
- 45×25: Multiplico el 45 por 100, 4500; luego, divido 4500 entre 4, ya que 100 es 4 veces mayor que 25, y obtengo 1125.
- 912×125: Como 125 es un octavo de 1000; multiplico 912 por 1000, o que 912 000; luego, divido 912 000 entre 8, y la respuesta es 114 000.

Aun cuando no se discutirá en este artículo, el cálculo mental puede ser aplicado también al cálculo de fracciones decimales y comunes, así como al cálculo de porcentajes.

---

[1] No aconsejamos que se enseñen en clase estos métodos. Posteriormente daremos sugerencias didácticas específicas.

4. Métodos del cálculo estimativo

El cálculo estimativo se usa frecuentemente para resolver problemas aritméticos cotidianos que requieren de una respuesta aproximada. Las situaciones presentadas en el aula para ser resueltas con cálculo estimativo deben tener sentido para los estudiantes, es decir, la respuesta apropiada no debe ser la exacta sino sólo un valor aproximado. Por ejemplo, calcular el 15% de propina, o estimar el costo de reparación de un coche, o bien, estimar el costo de un tapete de pared a pared. También, las operaciones propuestas en el cálculo estimativo deben tener cierta dificultad: pedir que se estime la suma 27 + 19 no tendría sentido, ya que la respuesta exacta es fácil de obtener.

Se ha logrado identificar tres procesos cognitivos generales que se aplican en el cálculo estimativo. Dichos procesos son conocidos en la literatura especializada como **reformulación, traducción y compensación** [Flores, A., et al. (1990)].

La **reformulación** consiste en el cambio de los datos numéricos de las cantidades implicadas en el problema.

Por ejemplo: 0.24×4.39 se puede aproximar por 0.25×4

La **traducción** consiste en cambiar la estructura matemática del problema, ya sea procesando los valores numéricos en un orden diferente de como aparecen en el problema, o cambiando las operaciones para formar un problema equivalente. Por ejemplo:

$$(6.28 \times 5.12) \; 2.5 \; (5 \; 2.5) \times 6.3 = 12.6$$

$$2.47 + 2.64 + 2.39 + 2.72 \; 2.5 \times 4 = 10$$

$$0.24 \times 4.39 \text{ es aproximadamente } \frac{44}{4}, \text{ o sea, } 1.10.$$

Como se puede observar, la traducción viene acompañada generalmente por una reformulación de los datos.

La **compensación** se refiere a los ajustes hechos para reducir el error que provoca la reformulación. Esta puede tener un carácter cualitativo o cuantitativo, como se verá a continuación.

En el contexto de estos tres procesos cognitivos ya comentados, se han identificado algunas estrategias específicas que se utilizan en los cálculos estimativos, y que a continuación clasificamos:

- **Idea de punto de referencia:** En su forma más simple, se fundamenta en el sentido común referido acerca de comparar lo que se está estimando con una medida conocida. Por ejemplo, conocemos nuestro peso y lo usamos como punto de referencia para estimar el peso de otras personas.
- **Orden de magnitud:** Esta es la estimación más primitiva. Por ejemplo:

  $3\,240 \times 1\,270$: Los dos números son del orden de miles, entonces se espera una respuesta del orden de millones. Es decir, $10^3 \times 10^3 = 10^6$

- **Operación frontal:** Se refiere a tomar el primer dígito inicial de la izquierda (que es el más significativo) de cada una de las cantidades involucradas en el problema matemático. Por ejemplo:

$$5\,346 \times 6\,432 \approx 5\,000 \times 6\,000 = 30\,000\,000$$

$$27\,344 + 2\,547 + 25 \approx 20\,000 + 2\,000 + 20 = 22\,020$$

Esta estrategia, si se ejecuta literalmente, puede llevar a consideraciones algo absurdas. Por ejemplo, en la suma anterior, en el sumando de la izquierda se desprecia el 7 000 del primer sumando, y se toma en cuenta el 20 del tercero. Por ello, está técnica debe estar basada en un buen sentido numérico para tomar en cuenta las cifras más significativas, y complementarla con un **ajuste** que considere las cantidades más importantes que se despreciaron:

$$27\,000 + 2\,000 \approx 29\,000, \text{ más casi mil, } = 30\,000$$

- **Redondeo:** Es una estrategia que consiste en cambiar los números involucrados en la operación por otros que tengan ceros (las potencias de diez más próximas a dichos números) para operar más fácilmente con ellos:

$$57 \times 52 \approx 60 \times 50 = 3\,000$$

Si se tiene, por ejemplo, 42×42, al redondear los números a 40×40, se llega a la misma estimación que con la operación frontal: 1600.

El redondeo puede estar acompañado también de un ajuste. Como ya indicamos, esta compensación puede ser de tipo cualitativo: "un poco más de 1 600, algo así como 1 700"; o de tipo cuantitativo: "serían 1 600, más dos veces el producto de 2×40, o sea 160. Algo así como 1760".

- **Números compatibles:** Esta estrategia tiende a usarse cuando los números involucrados en el problema se puedan cambiar por "parejas", de manera que sus valores sean compatibles entre sí, ya que resultan más fáciles en la operación mental. Esta técnica se usa principalmente en la estimación de cocientes:

$46\,224 \div 83$ se aproxima por $48\,000 \div 80$ (ya que son compatibles: $48 \div 8 = 6$)

- **Punto de referencia:** Esta estrategia en su aspecto numérico consiste en apoyarse en valores conocidos. Por ejemplo:

22% de $1590 \approx 25\%$ de $1590 \approx 1600 \;\; 4 = 400$ (25% es el punto de referencia)

La suma que se menciona en la traducción es otro ejemplo de esta estrategia. Ahí el punto de referencia utilizado fue el valor 2.5.

Las estrategias de estimación comentadas anteriormente pueden ser enseñadas a los estudiantes mediante el diseño de situaciones que reflejen la necesidad de un cálculo estimativo, y fundamentadas en la experiencia del individuo.

5. Un estudio de cálculo mental

Durante los años de 1992-1994 realizamos una investigación sobre las habilidades de cálculo mental y estrategias que utilizan niños alumnos de 6 escuelas primarias y secundarias, ubicadas en el municipio de Ciudad Nezahualcóyotl, México (Vázquez J.; 1994). Los estudiantes que participaron en este estudio fueron elegidos al azar, y su edad osciló entre los 11 y 16 años.

Los propósitos de la investigación fueron:

- Investigar sistemáticamente las estrategias de cálculo mental que los estudiantes usan en sus respuestas a problemas aritméticos dados.
- Realizar una descripción detallada y una explicación de las estrategias de cálculo mental utilizadas por los estudiantes, proponiendo una clasificación de las mismas.
- Indagar si el contexto que acompaña a los problemas aritméticos induce a usar con mayor frecuencia estrategias de cálculo mental en su resolución.

Se diseñó un cuestionario dividido en dos bloques de preguntas: uno compuesto de 20 operaciones aritméticas "puras", y el otro, de 9 problemas aritméticos "contextualizados". Las preguntas en ambos bloques correspondieron a preguntas de adición, sustracción, multiplicación y división, con números enteros. El cuestionario mostró un desempeño pobre de los estudiantes, pero sirvió para detectar a los alumnos que eran más hábiles para contestar mentalmente, con el fin de seleccionarlos para ser entrevistados posteriormente y conocer los procesos cognitivos que emplearon.

La entrevista individual consistió en 17 preguntas, de las cuales 12 fueron operaciones aritméticas "puras", y 5 fueron problemas aritméticos "contextualizados". Algunas de las preguntas de la entrevista fueron:

(1) 3 7 + 46

(2) 6 × 99

(4) 8 3 - 54

(5) 400 25

3. Una señora compra 8 pastelitos que tienen un valor de 999 pesos cada uno. ¿Cuánto tiene que pagar?

Los estudiantes entrevistados construyeron sus respuestas recurriendo a una diversidad de estrategias de cálculo mental, que fueron clasificadas en este trabajo (diferenciándolas del algoritmo de lápiz y papel) como puede apreciarse en la siguiente tabla:

ESTRATEGIAS MANIFESTADAS EN LOS CALCULOS

0.	PASOS DEL ALGORITMO	Se refiere a la aplicación mental del algoritmo escolarizado. (No es una estrategia propia del cálculo mental).
I.a.	DESCOMPOSICION SENCILLA	Se descompone uno de los números y se opera con sus partes.
I.b.	REDONDEO SENCILLO MAS COMPENSACION	Los números se redondean hacia una potencia de diez y se opera con ellos, haciendo una compensación posterior.
II.a.	DESCOMPOSICION DOBLE	Se descomponen los dos números y se operan sus partes comunes, preferentemente de izquierda a derecha.
II.b.	COMPENSACION	Se altera un número y se compensa inmediatamente con el otro, aplicando el efecto inverso al producido por el primero.

III.a. ENSAYO Y ERROR	Se opera en forma intuitiva, y mediante tanteos se logra obtener paulatinamente el resultado correcto.
III.b. PASOS REPETIDOS	Es un procedimiento con pasos bien definidos desde el principio, y repetitivos, que se van acercando a la respuesta.

Se dan a continuación algunos ejemplos de las estrategias anteriormente clasificadas:

Pregunta No. 14: "62 × 15". Abraham, 12 años: (*Estrategia—Descomposición sencilla*). "...62 × 10, 620; luego, 62 × 5, 310. Entonces 620 más 310, son 930".

Pregunta No. 12: "Pedro compra una torta que vale $3 900, una bolsa de papas que cuesta $2 900, y un refresco de $1 800. ¿Cuánto debe pagar?" Martha Patricia, 12 años: (*Estrategia—Redondeo sencillo más compensación*). "A la torta la tomé como si fuera 4 000, a las papas como si fuera 3 000, y al refresco como 2 000. Luego sumé: 4 000 + 3 000 + 2 000, y ello me dio 9 000. Después resté las diferencias que sumé en cada número, 100 + 100 + 200 + 400, y me dio como resultado 8 600".

Pregunta No. 1: "37 + 46". Martha, 13 años: (*Estrategia—Descomposición doble*). "Sumé 40 + 30, son 70; después, 6 + 7, son 13. Así, 70 más 13 son 83".

La *estrategia de compensación* casi no fue utilizada; posiblemente por su complejidad. Esta se puede ilustrar con el ejemplo dado en la segunda sección: 57 + 36 = 60 + 33 = 93 (más 3 y menos 3).

Pregunta No. 10: "87 3". María Dolores, 12 años: (*Estrategia—Ensayo y error*). "Primero multipliqué el 3 por 10, y salió 30. Después multipliqué el 3 por 20, y salió 60...; pero como todavía faltaba, lo multipliqué por 25, salió 75. Después lo multipliqué por 29 y esa es la respuesta".

Pregunta No. 9: "Una maestra quiere repartir 400 hojas a sus alumnos, dándoles 25 a cada uno. ¿Cuántos alumnos alcanzarán hojas?" Manuel, 12 años: (*Estrategia—Pasos repetidos*). "...Sumo 4 veces el 25, resulta 100 y me alcanzan para 4; para 200 sumo otros 4, y me alcanzan para 8, (hace una pausa y sigue), pero como son 400, más otros 8, 16. Entonces, el resultado es 16."

La estrategia aplicada con mayor frecuencia en ambos niveles educativos fue la de *Pasos repetidos* que se puede asociar en algunas situaciones con un procedimiento de conteo rápido (Para 83 - 54: "De 54 *a* 60, son 6; además *de* 60 *a* 80, son 20; y *de* 80 *a* 83, son 3. Así, 20 más 6 más 3, son 29".). Otra estrategia muy utilizada fue la *Descomposición doble*, que puede considerarse como la más cercana al algoritmo de lápiz y papel. Las estrategias *Redondeo sencillo más compensación* y la de *Descomposición sencilla* fueron usadas con menor frecuencia en las respuestas de los entrevistados.

Conviene destacar que de los entrevistados (que habían sido ya seleccionados como los mejores), dos terceras partes resolvieron las operaciones aritméticas de la entrevista usando el algoritmo de lápiz y papel, y solamente una tercera parte las contestó con diversas estrategias de cálculo mental. Esto indica que los estudiantes en general, no tienen a su disposición estrategias variadas de dicho cálculo.

Los resultados anteriores *indican* que se debe trabajar primero en clase con las estrategias de Pasos Repetidos, y Descomposición Sencilla y Doble, por ser las más cercanas a los niños. Posteriormente se debe introducir el Redondeo, que resultó ser una usada muy poco, pero que es muy importante, ya que ayuda a hacer muchos cálculos de manera muy eficiente (por ejemplo: $8 \times 999 = 8 \times 1000 - 8 = 7992$).

Cuando los estudiantes contestaron con la ayuda del algoritmo de lápiz y papel, se equivocaron con mayor frecuencia que cuando respondieron con estrategias de cálculo mental. En las publicaciones del tema, revisadas, se señala que antes de enseñar el algoritmo de lápiz y papel debe recurrirse al conocimiento informal de los estudiantes. El cálculo mental puede ser un buen recurso para ello.

Se observó también en este estudio que un contexto real ayuda a los estudiantes a utilizar estrategias de cálculo mental. Por lo tanto se sugiere presentar este tema dentro de situaciones cotidianas como cálculos monetarios, etc.

Conviene recalcar nuevamente que los métodos presentados en la segunda y tercera sección no son propios para la enseñanza del cálculo mental, por ser de carácter memorístico. Al contrario, deben desarrollarse estrategias más propias de los niños, alentando el trabajo grupal, a fin de que ellos mismos observen los procedimientos diferentes de sus compañeros y poco a poco los puedan ir internal zando.

Bibliografía

CUTLER, A. y MCSHANE, R., (1960). *The Trachtenberg speed system of basic mathematics*. Nueva York: Doubleday Company, Inc.

FLORES, A., et al. (1990). "Desempeño y estrategias en la estimación en operaciones aritméticas". *Educación Matemática*, 1, 2, 30-44.

GARDNER, M., (1984). *Festival mágico-matemático*. Madrid, España: Alianza Editorial.

GÓMEZ, B., (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

HOPE, J.A., (1985). "Unravelling the mysteries of expert mental calculation". *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 16 (4), 335-374.

MIALARET, G., (1986). *Las matemáticas: Cómo se aprenden y cómo se enseñan*. Madrid, España: Visor Libros.

PLUNKETT, S., (1979). *Decomposition and all that rot*. Mathematics in school, 8, 2-5.

VÁZQUEZ, J., (1994). *Una investigación de las estrategias de cálculo mental utilizadas por niños estudiantes de primaria y secundaria*. Tesis de maestría. CINVESTAV-IPN, México.